

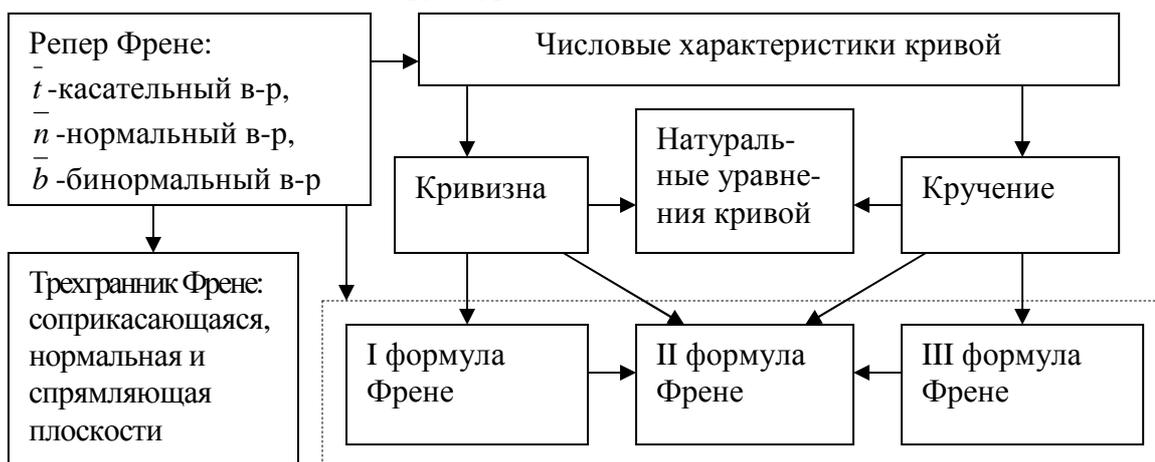
## Практическое занятие №5

### Тема: Репер Френе. Кривизна и кручение кривой. Формулы Френе

#### План занятия

1. Кривизна кривой.
2. Кручение кривой.
3. Репер Френе. Сопровождающий трехгранник кривой.
4. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой.

#### Структурно-логическая схема



#### Основные термины

Вектор кривизны, кривизна, единичный вектор главной нормали, главная нормаль, вектор бинормали, бинормаль, репер (базис) Френе, соприкасающаяся плоскость, спрямляющая плоскость, сопровождающий трехгранник кривой, кручение, абсолютное кручение, натуральные уравнения кривой, формулы Френе.

#### Кривизна кривой

##### Основные факты

Пусть  $C$  – гладкая кривая, заданная естественной параметризацией  $\vec{g}(s)$ , и  $P = \vec{g}(s_0)$  – произвольная точка кривой  $C$ . Вектор  $\vec{k} = \vec{g}''(s_0)$  называется *вектором кривизны* (рис. 5), а его длина  $|\vec{k}| = k$  – *кривизной* кривой  $C$  в точке  $P$ .

Если  $k \neq 0$ , прямая, проходящая через точку  $P$  в направлении вектора  $\vec{k}$ , называется *главной нормалью* кривой  $C$  в точке  $P$ .

Единичный вектор  $\vec{n} = \vec{k}/k$  называется *единичным вектором главной нормали*.

Прямая, проходящая через точку  $P$  в направлении вектора  $\vec{n}$  называется *главной нормалью* кривой  $C$  в точке  $P$ .

Вектор кривизны лежит в нормальной плоскости.

Кривизна позволяет определить, насколько данная кривая отличается от прямой.

Кривизна кривой, заданной произвольной параметризацией  $\vec{f}(t)$ , вычисляется по формуле:



Рис. 5.

$$(7) \quad k = \frac{|\vec{f}' \times \vec{f}''|}{|\vec{f}'|^3}.$$

### Репер Френе. Сопровождающий трехгранник кривой Основные факты

Вектор  $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$  называется *вектором бинормали*, а прямая, проходящая через точку Р кривой С в направлении вектора  $\vec{b}$  называется *бинормалью* кривой С в точке Р.

Если кривая С задана произвольной параметризацией  $\vec{f}(t)$ , то вектор бинормали находится по формуле:

$$(8) \quad \vec{b} = \frac{\vec{f}' \times \vec{f}''}{|\vec{f}' \times \vec{f}''|}.$$

В каждой точке кривой С, где кривизна отлична от нуля, единичный вектор касательной  $\vec{t}$ , единичный вектор главной нормали  $\vec{n}$  и вектор бинормали  $\vec{b}$  образуют правый ортонормированный базис, который называется *базисом Френе*, или *репером Френе*.

Плоскость, натянутая на векторы  $\vec{t}$  и  $\vec{n}$  и проходящая через точку Р, называется *соприкасающейся* плоскостью кривой С в точке Р.

**Теорема (геометрическое свойство соприкасающейся плоскости).** При стремлении точки Q кривой С к точке Р этой кривой отношение расстояния  $\delta$  от точки Q до соприкасающейся плоскости в точке Р к квадрату расстояния  $d$  от Q до Р стремится к нулю:  $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\delta}{d^2} = 0$ . Если кривизна кривой С в точке Р отлична от нуля, то соприкасающаяся плоскость является единственной плоскостью, обладающей таким свойством (рис. 6).

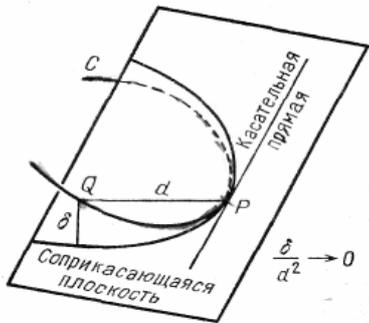


Рис. 6.

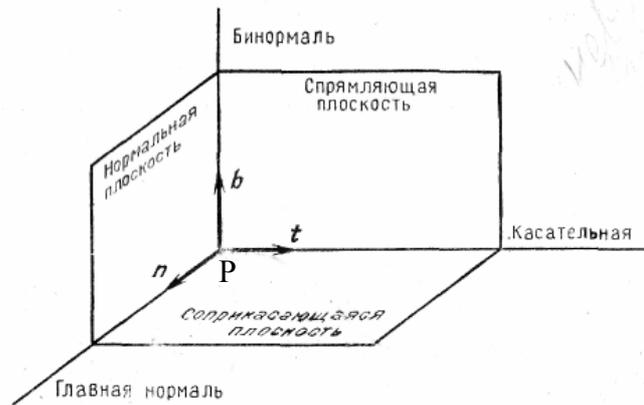


Рис. 7.

Плоскость, натянутая на векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{t}$  и проходящая через точку Р, называется *спряmlяющей* плоскостью кривой С в точке Р.

Соприкасающаяся, нормальная и спряmlяющая плоскости в точке Р образуют *сопровождающий трехгранник*, или *трехгранник Френе*, кривой С в точке Р (рис.7).

### Кручение кривой. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой Основные факты

Пусть гладкая кривая С задана естественной параметризацией  $\vec{g}(s)$ , и пусть  $P = \vec{g}(s_0)$  – произвольная точка кривой С.

Длина вектора  $\vec{b}'(s_0)$  называется *абсолютным кручением* кривой  $C$  в точке  $P$  и обозначается  $|\alpha|$ .

Абсолютное кручение характеризует отличие пространственной кривой от плоской.

**Теорема (геометрическое свойство абсолютного кручения).** При стремлении точки  $Q$  кривой  $C$  к точке  $P$  этой кривой предел отношения угла  $\theta$  к расстоянию между точками  $Q$  до  $P$  равен абсолютному кручению кривой  $C$  в

точке  $P$  (рис. 8):  $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\theta}{QP} = |\alpha|$ .

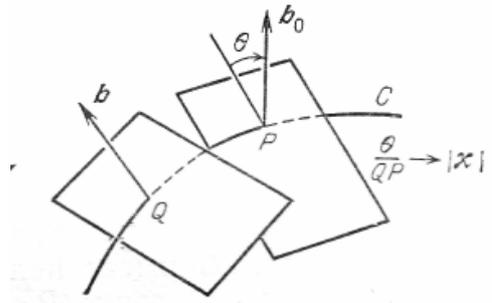


Рис. 8.

**Формулы Френе:**

(9)  $\vec{t}'(s) = k(s) \cdot \vec{n}(s)$  – первая формула Френе;

(10)  $\vec{n}'(s) = -k(s) \cdot \vec{t}(s) + \alpha(s) \cdot \vec{b}(s)$  – вторая формула Френе;

(11)  $\vec{b}'(s) = -\alpha(s) \cdot \vec{n}(s)$  – третья формула Френе.

Кручение кривой  $\alpha$  в точке вычисляется по формуле:

(12)  $\alpha = \frac{(\vec{g}', \vec{g}'', \vec{g}''')}{k^2}$ , если кривая задана естественной параметризацией  $\vec{g}(s)$ ,

и по формуле:

(13)  $\alpha = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|\vec{f}' \times \vec{f}''|^2}$ , если кривая задана произвольной параметризацией  $\vec{f}(t)$ .

**Теорема.** Кривизна и кручение определяют кривую с точностью до положения в пространстве.

**Теорема.** Для любых непрерывных функций  $h(s) > 0$  и  $\eta(s)$ , определенных на отрезке  $[0, S]$ , существует гладкая кривая  $C$ , кривизна и кручение которой определяются этими функциями:

(14)  $k = h(s), \alpha = \eta(s)$ .

Равенства (14) называются *натуральными уравнениями* кривой  $C$ .

**Примеры решения типовых задач**

Задача 11

Найти уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей кривой, заданной параметризацией  $\vec{f}(t) = (e^t, e^{2t}, e^{4t})$ , при  $t_0 = 0$ .

Решение

$\vec{f}(t_0) = (e^0, e^0, e^0) = (1, 1, 1)$  – точка  $M_0$  с параметром  $t_0 = 0$ .

$\vec{f}'(t) = (e^t, 2e^{2t}, 4e^{4t}), \vec{f}'(t_0) = (e^0, 2e^0, 4e^0) = (1, 2, 4)$ .

$\vec{f}''(t) = (e^t, 4e^{2t}, 16e^{4t}), \vec{f}''(t_0) = (e^0, 4e^0, 16e^0) = (1, 4, 16)$ .

Соприкасающаяся плоскость проходит через точку  $M_0$  и натянута на векторы  $\vec{f}'(t_0)$  и  $\vec{f}''(t_0)$ ; эта плоскость имеет уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 8x-6y+z-3=0.$$

Нормальная плоскость определяется точкой  $M_0$  и нормальным вектором  $\vec{f}'(t_0)$ , поэтому ее уравнение имеет вид:

$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 4 \cdot (z-1) = 0, \text{ или } x+2y+4z-7=0.$$

Направляющее подпространство спрямляющей плоскости задается перпендикулярным вектором соприкасающейся плоскости:  $(8, -6, 1)$  и перпендикулярным вектором нормальной плоскости:  $\vec{f}'(t_0) = (1, 2, 4)$ . Поэтому спрямляющая плоскость имеет уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 26x+31y-22z-35=0.$$

### Задача 12

Найти уравнение главной нормали и бинормали кривой, заданной параметризацией  $\vec{f}(t) = (\sin^2 t, 1 - \cos t, 2t)$ , в точке с параметром  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Решение

$$\vec{f}(t_0) = \left( \sin^2 \frac{\pi}{2}, 1 - \cos \frac{\pi}{2}, 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = (1, 1, \pi) \text{ — точка } M_0 \text{ с параметром } t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{f}'(t) = (\sin 2t, \sin t, 2), \quad \vec{f}'(t_0) = \left( \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \sin \frac{\pi}{2}, 2 \right) = (0, 1, 2).$$

$$\vec{f}''(t) = (2 \cos 2t, \cos t, 0), \quad \vec{f}''(t_0) = \left( 2 \cos \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \cos \frac{\pi}{2}, 0 \right) = (-2, 0, 0).$$

Уравнение соприкасающейся плоскости (см. задачу №11) имеет вид:  
 $2y - z + \pi - 2 = 0.$

Уравнение нормальной плоскости (см. задачу №11) имеет вид:  
 $y + 2z - 2\pi - 1 = 0.$

Главная нормаль является линией пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей, поэтому определяется системой:

$$\begin{cases} 2y - z + \pi - 2 = 0 \\ y + 2z - 2\pi - 1 = 0 \end{cases}$$

Параметрическое уравнение главной нормали имеет вид: 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = \pi \end{cases}$$

Нормальный вектор соприкасающейся плоскости  $(0, 2, -1)$  является направляющим вектором бинормали. Поэтому параметрическое уравнение бинормали имеет вид:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = \pi - t \end{cases}$$

Задача 13

Найти векторы репера Френе кривой, заданной параметризацией  $\vec{f}(t) = (a(t + \sin t), a(1 - \cos t), 4a \cos \frac{t}{2})$ ,  $a > 0$ , в точке с параметром  $t_0 = \pi$ .

Решение

$$1) \vec{t} = \vec{g}'(s) = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}.$$

$$\vec{f}'(t) = (a(1 + \cos t), a \sin t, -2a \sin \frac{t}{2}), \quad |\vec{f}'(t)| = \sqrt{a^2(1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t + 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2a.$$

Тогда  $\vec{t} = (\frac{1}{2}(1 + \cos t), \frac{1}{2} \sin t, -\sin \frac{t}{2})$ ; при  $t_0 = \pi$  имеем:  $\vec{t}(0, 0, -1)$ .

$$2) \vec{n} = \frac{\vec{g}''(s)}{|\vec{g}''(s)|}$$

$$\vec{g}''(s) = \frac{1}{|\vec{f}'(t)|} \vec{t}' = \frac{1}{2a} (-\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}), \quad |\vec{g}''(s)| = \frac{1}{4a} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}}.$$

Тогда  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}}} (-\sin t, \cos t, -\cos \frac{t}{2})$ ; при  $t_0 = \pi$  имеем:  $\vec{n}(0, -1, 0)$ .

$$3) \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -\cos \frac{t}{2} \\ -1 & 0 & \cos t \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 0) \text{ при } t_0 = \pi.$$

Задача 14

Найти кривизну и кручение кривой, заданной вектор-функцией  $\vec{f}(t) = (t \cos t, t \sin t, at)$ .

Решение

$$\vec{f}'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, a);$$

$$\vec{f}''(t) = (-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 0);$$

$$\vec{f}'''(t) = (-3 \cos t + t \sin t, -3 \sin t - t \cos t, 0);$$

$$|\vec{f}'(t)| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + a^2} = \sqrt{t^2 + a^2 + 1};$$

$$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - t \sin t & \sin t + t \cos t & a \\ -2 \sin t - t \cos t & 2 \cos t - t \sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-a(2 \cos t - t \sin t), -a(2 \sin t + t \cos t), (2 + t^2));$$

$$|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)| = \sqrt{t^4 + (a^2 + 4)t^2 + 4a^2 + 4};$$

$$(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t), \vec{f}'''(t)) = (\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)) \cdot \vec{f}'''(t) = -a(2 \cos t - t \sin t)(-3 \cos t + t \sin t) - a(2 \sin t + t \cos t)(-3 \sin t - t \cos t) = a(t^2 + 6).$$

Тогда по формулам (7) и (13) получим:

$$k(t) = \frac{|\vec{f}' \times \vec{f}''|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{\sqrt{t^4 + (a^2 + 4)t^2 + 4a^2 + 4}}{(t^2 + a^2 + 1)\sqrt{t^2 + a^2 + 1}} \text{ – кривизна кривой;}$$

$$\alpha(t) = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|\vec{f}' \times \vec{f}''|^2} = \frac{a(t^2 + 6)}{t^4 + (a^2 + 4)t^2 + 4a^2 + 4} \text{ – кручение кривой.}$$

### Задача 15

Найти кривизну и кручение кривой, заданной параметризацией

$$\vec{f}(t) = (t, t^2 + 2t + 3, t^3 - 5t^2 + 7) \text{ в точке } M(1, 6, 3).$$

Решение

$$\vec{f}'(t) = (1, 2t + 2, 3t^2 - 10t); \quad \vec{f}''(t) = (0, 2, 6t - 10); \quad \vec{f}'''(t) = (0, 0, 6).$$

Точке А соответствует значение параметра  $t_0 = 1$ . В точке А имеем:

$$\vec{f}'(t_0) = (1, 4, -7), \quad \vec{f}''(t_0) = (0, 2, -4), \quad \vec{f}'''(t_0) = (0, 0, 6).$$

$$|\vec{f}'(t_0)| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-7)^2} = 4\sqrt{14};$$

$$\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (2, 4, 2);$$

$$|\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0)| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6};$$

$$(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0), \vec{f}'''(t_0)) = (\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0)) \cdot \vec{f}'''(t_0) = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12.$$

Тогда по формулам (7) и (13) получим:

$$k(t) = \frac{|\vec{f}' \times \vec{f}''|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{(4\sqrt{14})^3} = \frac{1}{448} \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad \alpha(t) = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|\vec{f}' \times \vec{f}''|^2} = \frac{12}{(2\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2}.$$

### Задача 16

Найти кривизну кривой  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  в точке  $M(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ .

Решение

Параметризуем данную кривую:  $\vec{f}(t) = (2\cos t, 3\sin t)$ .

$$\vec{f}'(t) = (-2\sin t, 3\cos t); \quad \vec{f}''(t) = (-2\cos t, -3\sin t).$$

Точке А соответствует значение параметра  $t_0 = \frac{\pi}{4}$ ; тогда в точке А:

$$\vec{f}'(t_0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right); \quad \vec{f}''(t_0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

$$|\vec{f}'(t_0)| = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}};$$

$$\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 6); \quad |\vec{f}'(t_0) \times \vec{f}''(t_0)| = 6.$$

Тогда по формуле (7):  $k = \frac{6}{(\sqrt{13/2})^3} = \frac{12\sqrt{2}}{13\sqrt{13}}.$

### Задача 17

Найти кручение кривой  $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ z = 2y^2 - 1 \end{cases}$  в точке M(4, 2, 7).

Решение

Параметризация данной кривой имеет вид:  $\vec{f}(t) = (t, \sqrt{t}, 2t-1).$

$$\vec{f}'(t) = (1, \frac{1}{2\sqrt{t}}, 2), \quad \vec{f}''(t) = (0, -\frac{1}{4t\sqrt{t}}, 0), \quad \vec{f}'''(t) = (0, \frac{3}{8t^2\sqrt{t}}, 0).$$

Точке A соответствует значение параметра  $t_0=4$ ; тогда в точке A:

$$\vec{f}'(t_0) = (1, \frac{1}{4}, 2), \quad \vec{f}''(t_0) = (0, -\frac{1}{32}, 0), \quad \vec{f}'''(t_0) = (0, \frac{3}{256}, 0);$$

$(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0), \vec{f}'''(t_0)) = 0$ , т.к. координаты  $\vec{f}''(t_0)$  и  $\vec{f}'''(t_0)$  пропорциональны.

Тогда кручение  $\alpha=0$ .

### Задача 18

Найти натуральные уравнения кривой, заданной параметризацией

$$\vec{f}(t) = (at, a\sqrt{2} \ln t, \frac{a}{t}), \quad a > 0.$$

Решение

Для решения необходимо определить кривизну  $k(t)$ , кручение  $\alpha(t)$  кривой, выразить параметр  $t$  через натуральный параметр и заменить  $t$  на  $s$  в найденных соотношениях для  $k(t)$  и  $\alpha(t)$ .

$$\vec{f}'(t) = (a, \sqrt{2} \frac{a}{t}, -\frac{a}{t^2}); \quad \vec{f}''(t) = (0, \frac{a\sqrt{2}}{t^2}, 2\frac{a}{t^3}); \quad \vec{f}'''(t) = (0, \frac{2\sqrt{2}a}{t^3}, -6\frac{a}{t^4});$$

$$|\vec{f}'(t)| = a \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} = \frac{a(t^2 + 1)}{t^2};$$

$$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = a^2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix} = (\frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}, -\frac{2a^2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}a^2}{t^2});$$

$$|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)| = \frac{\sqrt{2}a^2}{t^4} (t^2 + 1);$$

$$(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t), \vec{f}'''(t)) = (\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)) \cdot \vec{f}'''(t) = \frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6}.$$

Тогда по формулам (7) и (13) получим:

$$k(t) = \frac{|\vec{f}' \times \vec{f}''|}{|\vec{f}'|^3} = \frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}; \quad \alpha(t) = \frac{(\vec{f}', \vec{f}'', \vec{f}''')}{|\vec{f}' \times \vec{f}''|^2} = \frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}.$$

В качестве начальной примем точку с параметром  $t=1$ . Тогда:

$$s = \int_1^t \frac{a(t^2+1)}{t^2} dt = a(t - \frac{1}{t}).$$

$$\text{Отсюда } at^2 - st - a = 0, \text{ или } t = \frac{s\sqrt{s^2+4a^2}}{2a}.$$

Поэтому натуральные уравнения кривой имеют вид:

$$k(s) = \alpha(s) = \frac{\sqrt{2}a(s + \sqrt{s^2+4a^2})^2}{(s^2 + 4a^2 + s\sqrt{s^2+4a^2})^2}.$$

### Задача 19

Кривая задана своей натуральной параметризацией  $\vec{g}(s)$ . Доказать, что  $\vec{g}'(s) \cdot \vec{g}'''(s) = -k^2$ .

Решение

Согласно первой ф-лы Френе,  $\vec{t}'(s) = k(s) \cdot \vec{n}(s)$ . С другой стороны,  $\vec{g}'(s) = \vec{t}(s)$ .

Тогда  $\vec{g}'''(s) = (\vec{t}'(s))' = k'(s) \cdot \vec{n}(s) + k(s) \cdot \vec{n}'(s)$ .

По второй ф-ле Френе:  $\vec{n}'(s) = -k(s) \cdot \vec{t}(s) + \alpha(s) \cdot \vec{b}(s)$ ; тогда:

$\vec{g}'''(s) = k'(s) \cdot \vec{n}(s) - k(s) \cdot k(s) \cdot \vec{t}(s) + k(s) \cdot \alpha(s) \cdot \vec{b}(s)$ . Домножим обе части равенства на  $\vec{g}'(s) = \vec{t}(s)$  скалярно. Получим:  $\vec{g}'(s) \cdot \vec{g}'''(s) = (k'(s) \cdot \vec{n}(s) - k^2(s) \cdot \vec{t}(s) + \alpha(s) \cdot k(s) \cdot \vec{b}(s)) \cdot \vec{t}(s) = k'(s) \cdot \vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) - k^2(s) \cdot \vec{t}(s) \cdot \vec{t}(s) + \alpha(s) \cdot k(s) \cdot \vec{b}(s) \cdot \vec{t}(s)$ .

Учитывая, что базис Френе ортогональный, имеем:

$$\vec{g}'(s) \cdot \vec{g}'''(s) = -k^2(s), \text{ ч.т.д.}$$

### Задача 20

Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой  $\gamma$  параллельны одной прямой, то эта кривая плоская.

Решение

Пусть кривая задана в естественной параметризации. Вектор  $\vec{t}$  перпендикулярен нормальной плоскости; которая параллельна постоянному вектору  $\vec{a}$ . Значит, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{t}$  взаимно перпендикулярны и  $\vec{a} \cdot \vec{t} = 0$ .

Дифференцируя, получаем:  $\vec{a} \cdot \vec{t}' = 0$ . Применив первую ф-лу Френе, получим:  $k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{n}) = 0$ . Это возможно в двух случаях: либо  $k=0$ , тогда  $\gamma$ ; либо  $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ .

Снова дифференцируя и применяя вторую ф-лу Френе, получаем:

$\vec{a} \cdot (-k \cdot \vec{t} + a \cdot \vec{b}) = 0$ . Так как  $\vec{a} \cdot \vec{t} = 0$ , то имеем:  $a \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$ . Равенство  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  невозможно, так как тогда вектор  $\vec{a}$  оказывается взаимно перпендикулярным трем попарно ортогональным векторам Френе. Следовательно,  $a=0$  и кривая плоская, ч.т.д.

### Задачи для самостоятельного решения

30. Дана параметризация  $\vec{r}(t)$  кривой. Найти уравнения нормальной  $\alpha$  и соприкасающейся  $\beta$  плоскостей при  $t = t_0$ :

- а)  $\vec{r}(t) = (e^t, e^{2t}, e^{4t}), t_0 = 0$ ;
- б)  $\vec{r}(t) = (t^3, t^2 + 1, t - 1), t_0 = 0$ ;
- в)  $\vec{r}(t) = (a \sin t, a \cos t, bt), t_0 = 0$ ;
- г)  $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos 2t, \sin 3t), t_0 = \pi$ ;
- д)  $\vec{r}(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t), t_0 = 0$ ;
- е)  $\vec{r}(t) = (\ln t, \ln(t^2), (\ln t)^2), t_0 = 1$ ;
- ж)  $\vec{r}(t) = (\sqrt{t+1}, \sqrt[3]{t^2+1}, \sqrt{t+4}), t_0 = 0$ ;
- з)  $\vec{r}(t) = (\ln \cos t, \ln(\sin t + 1), 2t), t_0 = 0$ ;
- и)  $\vec{r}(t) = (e^{\ln t^2}, e^{2 \ln \sqrt{t}}, e^{3 \ln \sqrt[3]{t^4}}), t_0 = 1$ ;
- к)  $\vec{r}(t) = \left( \operatorname{tg} t^2, \operatorname{ctg} \left( t + \frac{\pi}{2} \right), \cos 2t \right), t_0 = 0$ .

31. Точки кривой принадлежат пересечению двух поверхностей  $P_1$  и  $P_2$ . Найти уравнения нормальной  $\alpha$  и соприкасающейся  $\beta$  плоскостей в указанной точке  $M$ :

- а)  $P_1: xy = z, P_2: x - y = 0, M(2, 2, 4)$ ;
- б)  $P_1: 2x + y = 0, P_2: x^2 - y^2 = z, M(0, 0, 0)$ ;
- в)  $P_1: xz = 1, P_2: yz = 3, M(1, 3, 1)$ ;
- г)  $P_1: y^3 = x, P_2: x^2 = z, M(1, 1, 1)$ ;
- д)  $P_1: x^2 + z^2 = a^2, P_2: y^2 + z^2 = b^2, M(a, b, 0)$ .

32. Дана параметризация кривой  $\vec{r}(t) = (t^2, t^3, t)$ . Найти такую ее точку, соприкасающаяся плоскость которой проходит через точку  $N(-1, 18, 0)$ .

33. Кривая задана своей параметризацией  $\vec{r}(t) = (a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t)$ . Доказать, что все ее нормальные плоскости проходят через начало координат.

34. Пусть  $\vec{r}(t) = (e^t, e^{2t}, e^{3t})$  - параметризация кривой. Найти такую ее точку  $M$ , в которой соприкасающаяся плоскость проходит через точку  $N(3, 6, 0)$ .

35. Дана параметризация винтовой линии  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ . Найти координаты всех ее точек, в которых соприкасающаяся плоскость параллельна прямой  $x = t - 2, y = t + 1, z = 3$ .

36. Дана вектор-функция, определяющая параметризацию кривой. Найти уравнение главной нормали и бинормали кривой в точке, соответствующей данному значению параметра:

- а)  $\vec{r}(t) = (\sin^2 t, 1 - \cos t, 2t), t_0 = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $\vec{r}(t) = (\cos t, t + \cos 3t, \cos 5t), t_0 = 0;$

в)  $\vec{r}(t) = (t, \sin t, \cos t), t_0 = \pi;$

г)  $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right), t_0 = 1;$

д)  $\vec{r}(t) = (\ln t, \ln(t^2), t), t_0 = 1;$

е)  $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, e^{2t}), t_0 = 0;$

ж)  $\vec{r}(t) = \left(\sin t - \frac{t}{2}\cos t, \cos t + \frac{t}{2}\sin t, t\right), t_0 = \frac{\pi}{2}.$

37. Доказать, что все главные нормали кривой, определенной параметризацией  $\vec{r}(t) = (\sin t, t, -\cos t)$ , параллельны координатной плоскости  $xOz$ .

38. Доказать, что все нормали винтовой линии перпендикулярны оси  $Oz$ .

39. Доказать, что все бинормали кривой, определенной параметризацией  $\vec{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$ , образуют постоянный угол с вектором  $\vec{a}(1, 0, 1)$ . Найти этот угол.

40. Найти векторы  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$  сопровождающего репера Френе кривой, определенной параметризацией  $\vec{r}(t)$ , в точке, соответствующей параметру  $t_0$ :

а)  $\vec{r}(t) = \left(a(t + \sin t), a(1 - \cos t), 4a \cos \frac{t}{2}\right), t_0 = \pi, a > 0;$

б)  $\vec{r}(t) = (a \sin t, a \cos t, c), t_0 = \frac{\pi}{2}, a > 0;$

в)  $\vec{r}(t) = (t^2, t, t - 2), t_0 = 0;$

г)  $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \sin t), t_0 = 0;$

д)  $\vec{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t}), t_0 = 0;$

е)  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t_0 = \frac{\pi}{2};$

ж)  $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, at), t_0 = 0;$

з)  $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right), t_0 = 1;$

и)  $\vec{r}(t) = (acht, bsht, at), t_0 = 1, a > 0.$

41. Найти кривизну  $k(t)$  и кручение  $\chi(t)$  кривой, заданной вектор-функцией  $\vec{r}(t)$ :

а)  $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, at);$

б)  $\vec{r}(t) = (t^2, t, 2t - 1);$

в)  $\vec{r}(t) = (3t^2 + 5t, t^2 - t, 2t);$

г)  $\vec{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3);$

д)  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, b), a > 0;$

е)  $\vec{r}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t});$

ж)  $\vec{r}(t) = (t + \ln t, t, \ln t);$

з)  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), a > 0;$

$$\text{и) } \bar{r}(t) = \left( t, \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}t^2 \right);$$

$$\text{к) } \bar{r}(t) = \left( \frac{1}{2}t^2, \frac{2\sqrt{2}}{5}\sqrt{t^5}, \frac{1}{3}t^3 \right);$$

$$\text{л) } \bar{r}(t) = (acht, bsht, at), \quad a > 0;$$

$$\text{м) } \bar{r}(t) = \left( at, a\sqrt{2}\ln t, \frac{a}{t} \right).$$

42. Найти кривизну и кручение кривой, заданной параметризацией

$$\bar{r}(t) = \left( t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin \frac{t}{2} \right) \text{ при } t = \pi.$$

43. Кривая задана своей натуральной параметризацией  $\bar{r}(s)$ . Доказать, что:

$$\text{а) } \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = -k^2;$$

$$\text{б) } \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = 0;$$

$$\text{в) } \left| \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right|^2 = k^4 + k^2 \chi^2 + \left| \frac{dk}{ds} \right|^2;$$

$$\text{г) } \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = k \frac{dk}{ds}.$$

44. Дана параметризация кривой  $\bar{r}(t)$ . Доказать, что кривая плоская. Найти уравнение плоскости, содержащей кривую:

$$\text{а) } \bar{r}(t) = (2t, 3t + 4, t^2 - 3);$$

$$\text{б) } \bar{r}(t) = (t^2 - 1, t^3, t^2 + 2);$$

$$\text{в) } \bar{r}(t) = (\ln t, \ln t^2, \ln t^3);$$

$$\text{г) } \bar{r}(t) = \left( \frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t} \right);$$

$$\text{д) } \bar{r}(t) = (e^t, -e^t + 2e^{-t}, e^{-t} + 1);$$

$$\text{е) } \bar{r}(t) = (\sin t, 2\sin t + 1, t\cos t);$$

$$\text{ж) } \bar{r}(t) = (2ctg t, -tgt, 4ctg 2t);$$

$$\text{з) } \bar{r}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1, a_2 t^2 + b_2 t + c_2, a_3 t^2 + b_3 t + c_3),$$

$$\text{где } \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2} \neq 0$$

45. Найти натуральные уравнения кривой, если дана ее параметризация  $\bar{r}(t)$ :

$$\text{а) } \bar{r}(t) = \left( at, a\sqrt{2}\ln t, \frac{a}{t} \right), \quad a > 0;$$

$$\text{б) } \bar{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt);$$

$$\text{в) } \bar{r}(t) = \left( \frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2} \right), \quad t \geq 0;$$

$$\text{г) } \bar{r}(t) = (acht, bsht, at), \quad a > 0.$$

### ***Вопросы для самоподготовки***

1. Дайте определение кривизны кривой в точке и вектора кривизны. По какой формуле вычисляется кривизна кривой? В чем состоит геометрический смысл кривизны?
2. Дайте определение репера Френе и всех его элементов.
3. Дайте определение сопровождающего трехгранника кривой и всех его элементов. Каким геометрическим свойством обладает соприкасающаяся плоскость поверхности?
4. Дайте определение кручения кривой в точке. По какой формуле вычисляется кручение? В чем состоит геометрический смысл кручения? Каким геометрическим свойством обладает абсолютное кручение?
5. Напишите Формулы Френе.
6. Что можно сказать о кривых, имеющих в каждой точке одинаковые кривизны и одинаковые кручения? Какие уравнения называются натуральными уравнениями кривой?