ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ

Лекция №4

Тема: **Элементарная кривая. Касательная. Длина кривой**

План лекции

1. Понятие и способы задания элементарной кривой. Вектор-функция одного переменного.
2. Касательная к кривой.
3. Длина кривой. Естественная параметризация.

Основы дифференциального и интегрального исчисления были созданы в конце XVII в. И. Ньютоном и Г. Лейбницем как аппарат для решения задач механики и геометрии. Систематическое применение методов математического анализа в геометрии привело в конце XVIII – начале XIX в. к созданию того раздела геометрии, который сейчас называется дифференциальной геометрией. Среди создателей дифференциальной геометрии следует назвать прежде всего таких знаменитых математиков, как Л. Эйлер, Г. Монж и К. Гаусс.

Задачей дифференциальной геометрии является локальное изучение объектов евклидова пространства, в частности, методами дифференциального и интегрального исчисления.

Сведения, изучаемые в курсе дифференциальной геометрии, наряду со сведениями, изучаемыми в курсе топологии, дают обоснование понятийному аппарату школьной математики: области, границы, кривые, поверхности, тела и т.д.

Элементарные кривые и способы их задания.

Для изучения кривых необходимо иметь их точное определение. Мы ограничимся здесь тем, что дадим определение элементарной кривой. Множество C на плоскости или в пространстве называется *элементарной кривой*, если оно является образом отрезка при некотором непрерывном взаимно однозначном отображении этого отрезка в плоскость или в пространство.

Примерами элементарных кривых являются отрезки прямых, дуги окружностей, графики непрерывных функций, заданных на отрезке. Простые конечнозвенные ломаные тоже будут элементарными кривыми в нашем определении.

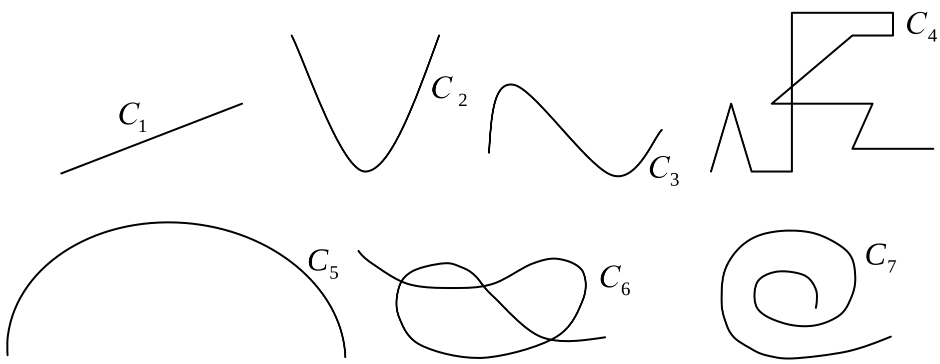

Рис.1

Образы концов отрезка называются *концами* элементарной кривой, а образ любого отрезка, содержащего в исходном отрезке, называется *дугой*. Очевидно, что всякая дуга элементарной кривой сама является элементарной кривой.

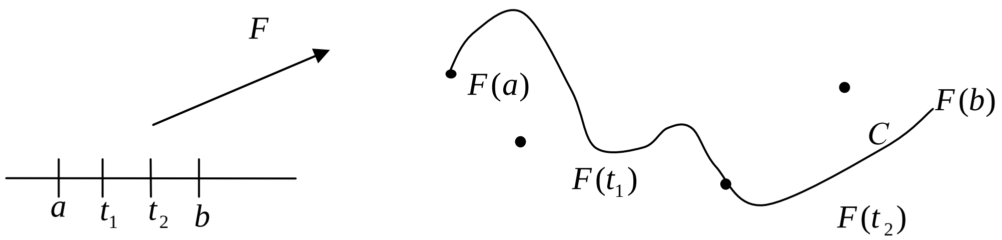

Рис.2

Если элементарная кривая C есть образ отрезка $[a,b]$ при взаимно однозначном и непрерывном отображении $F:[a,b]\to R^3$, то положение любой точки P на кривой C определяется одним-единственным числом $t\in[a,b]$, образом которого эта точка является: $P=F(t)$. Переменная t называется *параметром* кривой C. Разным значениям параметра соответствуют различные точки кривой C. Отображение F будем называть *параметризацией* кривой C. У одной и той же элементарной кривой может быть много различных параметризаций. Кривую, снабженную параметризацией, будем называть *параметризованной* кривой .

Фиксируем систему координат. Пусть точка $P=F(t)$ имеем координаты x,y,z. При изменении параметра t они тоже будут меняться – каждая координата является некоторой функцией от t:

$$\begin{cases} x=f_1(t), \\ y=f_2(t), \\ z=f_3(t), \end{cases}$$

где f_1, f_2, f_3 - непрерывные числовые функции, заданные на отрезке $[a,b]$ (рис. 3).

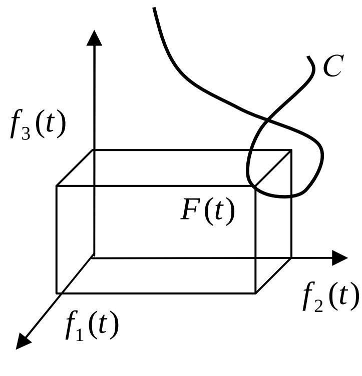

Рис. 3

Функции f_1, f_2, f_3 полностью описывают параметризацию F и называются ее *координатными функциями*. Соотношения $\begin{cases} x=f_1 \\ y=f_2 \\ z=f_3 \end{cases}$ называются *уравнениями* параметризованной кривой C.

Если $f:[a,b]\to R^2$ - непрерывная функция, то ее график является плоской элементарной кривой, допускающей параметризацию $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$. Как множество кривая C задается уравнением $y=f(x)$. Такое задание кривой называется *явным* (рис. 4).

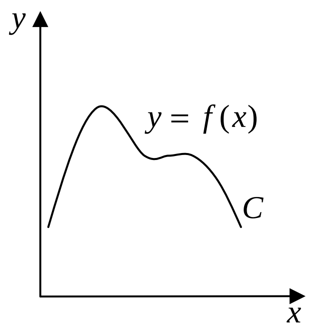

Рис. 4

Пространственная кривая допускает *явное задание* если она обладает параметризацией вида $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \\ z = g(t) \end{cases}$. Такая кривая как множество может быть задана системой уравнений $\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$.

Не все кривые допускают явное задание.

Пример. Любая дуга окружности, большая 180^0, не допускает явного задания.

Для нас основной интерес будут представлять кривые, обладающие параметризацией с некоторыми дополнительными свойствами. Пусть $F:[a,b] \to R^3$ - параметризация кривой C, а f_1, f_2, f_3 - ее координатные функции. Параметризация F называется *регулярной*, если во-первых, при каждом значении параметра $t \in [a,b]$ производная по крайней мере одной из этих не обращается в нуль. (Последнее условие удобно записать в виде: $((f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2 \neq 0.)$ Кривая, обладающая регулярной параметризацией, называется *гладкой* (рис. 5).

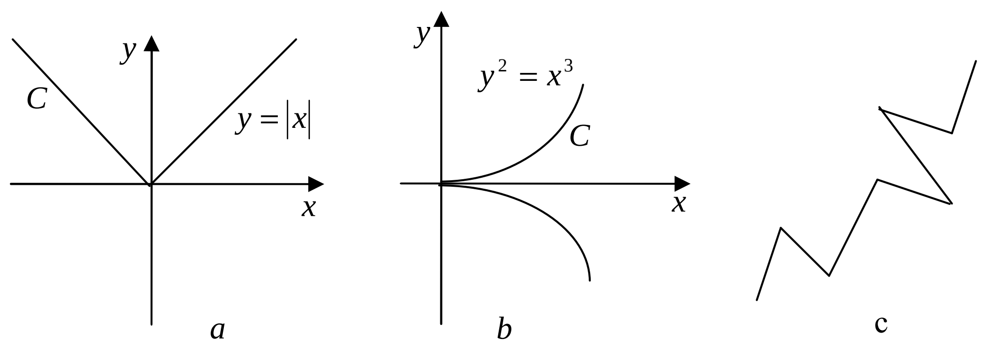

Рис. 5

При необходимости мы будем без дополнительных оговорок требовать *повышенной гладкости*, то есть существования у функций f_1, f_2, f_3 непрерывных производных до n-го порядка включительно при некотором $n \geq 2$.

Из теоремы о неявной функции следует, что в окрестности каждой своей точки гладкая кривая допускает явное задание. Другими словами, всякая достаточно малая дуга гладкой кривой является графиком некоторого гладкого отображения (в подходящей системе координат).

Пример. Рассмотрим отображение $[a,b] \xrightarrow{f} R^2$, заданное формулой: $f(x) = (\cos x, \sin x)$. Его графиком в R^3 будет отрезок *винтовой линии*. Он лежит на цилиндре радиуса 1 с осью Ox (рис. 6).

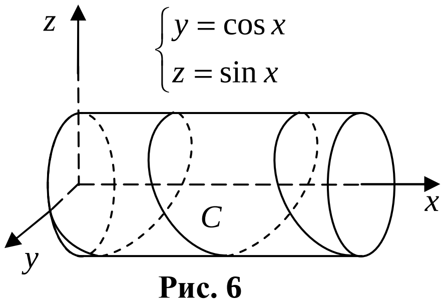

Рис. 6

Рассмотрим произвольное биективное непрерывное, а значит, и монотонное отображение φ некоторого отрезка $[c,d]$ в отрезок $[a,b]: \tau \mapsto t = \varphi(\tau)$.

Если $F:[a,b] \to R^3$ - параметризация кривой C, то сквозное отображение $G:[c,d] \to R^3$, определяемое по формуле $G(\tau) = F(\varphi(\tau))$, также будет параметризацией кривой C. Говорят, что она получается из параметризации F при помощи *замены параметра* $t = \varphi(\tau)$. Если $\varphi(a) = c$ и $\varphi(b) = d$, то φ- монотонно убывающая функция (рис. 7).

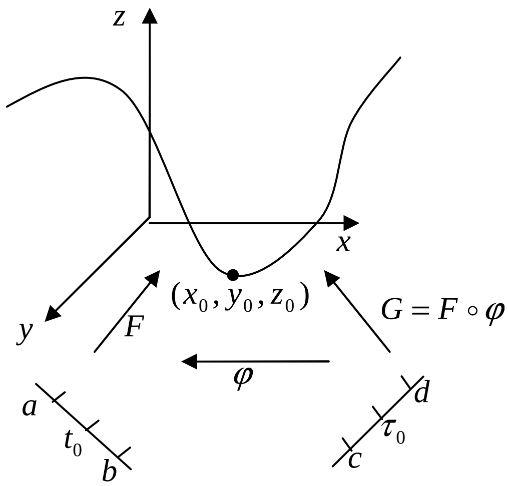

Рис. 7

Каждая параметризация определяет некоторый *порядок* точек на кривой. Если две параметризации связаны возрастающей заменой параметра, то они определяют один и тот же порядок, а если они связаны убывающей заменой параметра- то разный. Чтобы фиксировать порядок точек на кривой, достаточно указать *начальную* и *конечную* точки кривой (обе они являются концами кривой).

Элементарную кривую, у которой фиксированы начальная и конечная точки, назовем *ориентированной*. Всякая дуга ориентированной кривой сама ориентирована. В дальнейшем мы будем под *кривой* обычно подразумевать элементарную ориентированную кривую. Ориентацию удобно указывать стрелкой (рис. 8).

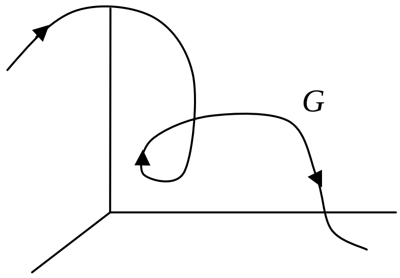

Рис. 8

Замечание. Для того чтобы параметризация $G(\tau)$, полученная из регулярной параметризации $F(t)$ при помощи замены $t=\varphi(\tau)$, также была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы замена была *неособой*, то есть чтобы функция $\varphi(\tau)$ была непрерывно дифференцируемой, а ее производная $\varphi'(\tau)$ нигде не обращалась в нуль (она будет всюду положительной или всюду отрицательной).

До сих пор мы рассматривали кривую как множество точек или фигуру на плоскости или в пространстве. При параметризации кривой параметр играет роль координаты в этом множестве. (Координатной функцией служит функция, обратная параметризации.) Возможен и другой, очень плодотворный взгляд на кривую, как на траекторию движущейся материальной точки- птицы, рыбы, самолета и тому подобное. (Например, летящий по инерции камень описывает параболу.) Здесь роль параметра играет время, прошедшее, например, от начала движения. Этот подход позволяет использовать в геометрии такие понятия из механики, как скорость, ускорение, путь и т. п.

Вектор-функция одного переменного

До сих пор вам было известно способы задания кривых связаны с координатами и используют числовые функции. Часто удобен бескоординатный способ задания, когда для параметризации кривой используются вектор - функции. Здесь мы коротко изложим связанные с ними понятия и формулировки. Почти все доказательства опускаются.

Каждому значению параметра $t\in[a,b]$ сопоставим какой-нибудь вектор $\vec{v}\in V$. Поскольку вектор будет зависеть от t, то имеем функцию $\vec{v}=\vec{v}(t)$. Она называется **вектор–функцией**.

Если отложить все векторы $\vec{v}(t)$ от общего начала, то концы всех этих векторов образуют кривую. В случае, если $\vec{v}(t)$ непрерывно, получаем гладкую кривую. Такая кривая называется годографом вектор - функции $\vec{v}=\vec{v}(t)$ (рис. 9).

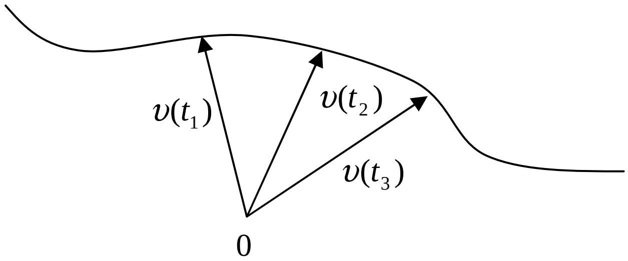

Рис. 9

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана вектор- функция $\upsilon(t)$. Говорят, что вектор a есть *предел* этой вектор – функции в точке $t_0\in[a,b]$,если

$$\lim_{t\to t_0}|\upsilon(t)-a|=0.$$

В таком случае используют запись: $a = \lim\limits_{t \to t_0} \upsilon(t)$. Вектор – функция $\upsilon(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если

$$\upsilon(t_0) = \lim_{t \to t_0} \upsilon(t).$$

Если вектор – функция $\upsilon(t)$ непрерывна во всех точках промежутка $[a,b]$, то говорят, что она *непрерывна на* $[a,b]$.

Понятие непрерывной вектор - функции и ее предела вводится аналогично соответствующим понятиям для числовых функций. Рассмотрим алгебраические операции над вектор - функцией: сложение, умножение на числовую функцию, скалярное, векторное и смешанное произведение. Эти операции вводятся поточечно.

Пусть $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ -произвольные вектор - функции. Тогда

$(\vec{u} \pm \vec{v})(t) = \vec{u}(t) \pm \vec{v}(t)$;

$(f \cdot \vec{u})(t) = f(t) \cdot \vec{u}(t)$;

$(\vec{u} \cdot \vec{v})(t) = \vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)$;

$(\vec{v} \times \vec{u})(t) = \vec{u}(t) \times \vec{v}(t)$;

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})(t) = (\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t))$.

Говорят, что вектор – функция $\upsilon(t)$ *дифференцируема в точке* $t_0 \in [a,b]$, если при $t \to t_0$ существует предел отношения $(\upsilon(t) - \upsilon(t_0))/(t - t_0)$. Этот предел называется *производной* вектор – функции $\upsilon(t)$ *в точке* t_0 и обозначается через $\upsilon'(t_0)$ (рис. 10) :

$$\upsilon'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\upsilon(t) - \upsilon(t_0)}{t - t_0}.$$

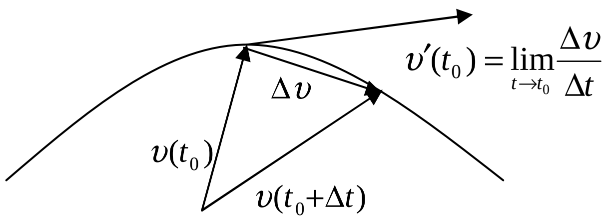

Рис. 10

Если вектор – функция дифференцируема в некоторой точке, то, очевидно, она и непрерывна в этой точке. Если вектор – функция $\upsilon(t)$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a,b]$, то говорят, что она *дифференцируема на всем отрезке* $[a,b]$.

Разобьем промежуток $[a,b]$ на n частей точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b.$$

Пусть δ - максимальное из чисел $t_{i+1} - t_i$ при $i = 0, \ldots, n-1$. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \upsilon(\tau_i)(t_{i+1} - t_i),$$

где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Будем говорить, что вектор – функция $\upsilon(t)$ *интегрируема*, если для произвольного выбора τ_i существует предел интегральных сумм σ_n при $\delta \to 0$. Этот предел будем называть *определенным интегралом* от вектор – функции $\upsilon(t)$ и обозначать его как обычно:

$$\int_a^b \upsilon(t)dt.$$

Из неравенства треугольника для векторов можно вывести полезное неравенство для вектор – функций:

$$\left|\int_a^b \upsilon(t)dt\right| \le \int_a^b |\upsilon(t)|dt$$

Понятие производной и интеграла для вектор - функции вводится по аналогии с соответствующими понятиями для числовой функции. Различные свойства удобнее доказать в координатах. Зафиксируем в пространстве декартовую систему $Oxyz$, координатными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда $\vec{v}(t) = v_1(t)\cdot\vec{i} + v_2(t)\cdot\vec{j} + v_3(t)\cdot\vec{k}$, где $v_1(t), v_2(t), v_3(t)$ -числовые функции, которые являются координатами вектора $\vec{v}(t)$ (координатные функции) (рис. 11).

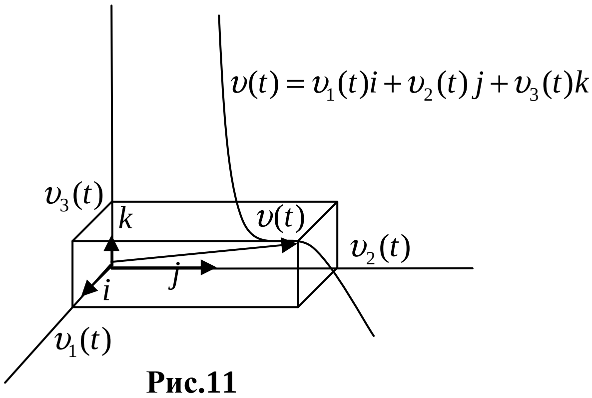

Рис.11

Свойства координат производной и интеграла вектор -функции

1. Если $\vec{v}(t)$ дифференцируема на $[a,b]$, то ее координатные функции также дифференцируемы на этом отрезке. Верно и обратное утверждение. Каждая координата производной вектор - функции равняется производной соответствующей координатной функции $\vec{v}'(t)(v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t))$.

2. Если функции $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ и $f(t)$ дифференцируемы на $[a,b]$, то $(u+v)' = u' + v'$;
$(u-v)' = u' - v'$;

$(f\cdot\vec{u})' = f'\cdot\vec{u} + f\cdot\vec{u}'$;

$(\vec{u}\cdot\vec{v})' = \vec{u}'\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v}'$;

$(\vec{u}\times\vec{v})' = \vec{u}'\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{v}'$;

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}'\cdot\vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{v}'\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}'$.

3. Вектор-функция $\vec{v}(t)$ интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда на этом отрезке интегрируемы ее координатные функции v_1, v_2, v_3, при этом каждая координата интеграла $\int\vec{v}(t)dt(\int v_1(t)dt, \int v_2(t)dt, \int v_3(t)dt)$. Это свойство справедливо и для определенного интеграла на отрезке $[a,b]$. Всякая непрерывная вектор-функция

интегрируема.

4. Если вектор-функция $\vec{v}(t)$ имеет непрерывную производную, то справедлива формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b \vec{v}'(t)dt = \vec{v}(b) - \vec{v}(a)$.

Векторное уравнение кривой

Как мы скоро убедимся, вектор – функции очень удобно для описания и исследования кривых.

Пусть $F:[a,b] \to R^3$-параметризация кривой C. Этой параметризации соответствует вектор-функция

$$\vec{f}(t) = \vec{OF}(t).$$

Функция F может быть однозначно восставлена по векторной функции $\vec{f}$. Координатные функции параметризации F и вектор - функции $\vec{f}$ очевидно совпадают.

Вектор-функция $\vec{f}$ называется **векторной параметризацией** кривой C. Если радиус-вектор $\vec{OF}(t)$ обозначить через $\vec{r}$, то получим, что

$$\vec{r} = \vec{f}(t)$$

-векторное уравнение кривой C. Кривую C при этом можно рассмотреть как годограф вектор - функции $\vec{f}(t)$.

Вектор-функция $\vec{f}$ непрерывна в силу непрерывности отображения F. Если C-гладкая кривая и F-ее регулярная параметризация, то функция $\vec{f}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, причем ее производная ни в одной точке не обращается в нуль

$$\vec{f}(t) \neq \vec{0}.$$

Закончим пункт одной леммой о вектор – функциях, которой мы часто будем пользоваться при изучении кривых.

Лемма. *Пусть* $\upsilon(t)$- *вектор - функция, дифференцируемая всюду на отрезке* $[a,b]$. *Тогда для того, чтобы ее модуль* $|\upsilon(t)|$ *был постоянной функцией, необходимо и достаточно, чтобы* $\upsilon(t)$ была всюду ортогональна своей производной $\upsilon'(t): \upsilon(t)\cdot\upsilon'(t) \equiv 0$.

Доказательство. Ясно, что $|\upsilon(t)|$- постоянная функция тогда и только тогда, когда $\upsilon^2(t)$- постоянная функция. Но производная этой функции как раз и совпадает с $2\upsilon(t)\cdot\upsilon'(t) \equiv 0$. Осталось заметить, что равенство нулю производной равносильно постоянству самой функции.

В дальнейшем все параметризации у нас будут только векторными. При этом мы позволим себе отождествлять точку с ее радиус-вектором и писать $\vec{f}(t) = P$ вместо $\vec{f}(t) = \vec{OP}$.

Касательная к кривой

Пусть C-гладкая элементарная кривая и пусть $\vec{f}(t)$-вектор-функция, задающая ее регулярную параметризацию. Если $P = \vec{f}(t_0)$-некоторая точка кривой C, то вектор $\vec{f}'(t_0)$ называется *касательным вектором кривой* C в точке P.

Если вектор – функция $\vec{f}(t)$ описывает перемещение материальному точки вдоль кривой C, то вектор $\vec{f}'(t_0)$ будет *вектором скорости* этой точки в момент времени t_0.

Касательные векторы в одной и той же точке, соответствующие различным параметризациям, коллинеарны и, значит, могут отличаться только множителем.

Пусть $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(\tau)$-параметризации C.Если $\vec{g}(\tau) = \vec{f}(\varphi(\tau))$-другая параметризация той же кривой, где $t = \varphi(\tau)$, причем $t_0 = \varphi(\tau_0)$, то вектор $\vec{g}'(\tau_0) = \vec{f}(\varphi(\tau_0)) \cdot \varphi'(\tau_0)$ очевидно коллинеарен вектору $\vec{f}'(t_0) = \vec{f}'(\varphi(\tau_0))$.

Прямая, проходящая через точку P в направление касательного вектора $\vec{f}'(t_0)$, называется *касательной прямой в точке* P. Параметрическое уравнение касательной прямой имеет вид

$$\vec{r}(\tau) = \vec{f}(t_0) + \tau \cdot \vec{f}'(t_0)$$

Пример. 1. Касательная прямая к отрезку в любой точке совпадает с прямой, на которой лежит этот отрезок.

2. Касательная к дуге окружности совпадает с обычной касательной к самой окружности в данной точке.

Замечание: если функция $y = f(x)$ является гладкой, то касательная к ней в точке x_0 имеет уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ -явное уравнение касательной.

Данное выше определение касательной не вполне геометрично, хотя удобно на практике. За основу другого определения можно взять следующее важное свойство касательной.

Теорема. Пусть дана кривая C и P -некоторая ее точка, а точка Q кривой C достаточно близка к точке P. *Тогда при стремлении точки* Q *к точке* P. *Предел отношения расстояния* δ *от точки* Q *до касательной прямой кривой* C *в точке* P *к расстоянию* d *от* Q *до* P *равен нулю:*

$$\lim_{Q \to P} \frac{\delta}{d} = 0 .$$

Касательная является единственной прямой, обладающей этим свойством.

Доказательство. Пусть $Q = \vec{f}(t)$. Положим $\Delta t = t - t_0$, $\Delta f = \vec{PQ} = f(t) - f(t_0)$. Расстояние d от точки Q до точки P равняется $|\Delta f|$, а расстояние δ от точки Q до касательной в точке P равняется $|\Delta f \times f'(t_0)| : |f'(t_0)|$. Наконец,

$$\lim_{Q \to P} \frac{\delta}{d} = \lim_{t \to t_0} \frac{\delta / \Delta t}{d / \Delta t} = \frac{\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\delta}{\Delta t}}{\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{d}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{t \to t_0} \left| \dfrac{\Delta f}{\Delta t} \times f'(t_0) \right|}{\lim\limits_{t \to t_0} \left| \dfrac{\Delta f}{\Delta t} \right| \cdot |f'(t_0)|} =$$

$$= \frac{|f'(t_0) \times f'(t_0)|}{|f'(t_0)|^2} = 0 .$$

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь l- произвольная прямая, проходящая через точку P, а b- ее направляющий вектор. Обозначим через δ_1 расстояние от точки Q до прямой l. Воспроизводя для прямой l предыдущие выкладки, получаем, что

$$\lim_{Q\to P}\frac{\delta_1}{d}=\frac{|f'(t_0)\times b|}{|f'(t_0)|\cdot|b|}.$$

Осталось заметить, что этот предел равен нулю в том и только в том случае, когда векторы $\vec{f}'(t_0)$ и b коллинеарны, то есть когда прямая l является касательной. Теорема доказана.

Рассмотрим плоскость проходящей через точку P ортогональная касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью* кривой C в точке P .

Длина кривой. Естественная параметризация

Пусть элементарная кривая C параметризована вектор - функцией $\vec{f}$, которая отображает отрезок $[a,b]$ в пространство R^3. Выберем на отрезке $[a,b]$ $n-1$ точек, разбивающие его на n частей: $a<t_1<t_2<...<t_{n-1}<b$. Ломаная с вершинами точках $f(t_0), f(t_1),\dots, f(t_n)$ называется *вписанной* в кривую C.

Интуитивно кажется ясным, что длина кривой C не должна сильно отличаться от длины вписанной ломаной при условии, что у ломаной достаточно много звеньев и все они достаточно малы. Очевидно, что при увеличении числа точек разбиения кривой значение длины ломаной (вписанной) как сумма длин ее звеньев будет стремиться к длине кривой C. Это приводит нас к следующему определению.

Длиной кривой C называется предел, к которому стремится длина вписанных в нее ломаных при неограниченном возрастании числа звеньев ломаной (при неограниченном убывании длин этих звеньев), то есть при $n\to\infty$.

Нетрудно видеть, что этот предел (конечный или бесконечный) всегда существует: это есть не что иное, как супремум длин ломаных, вписанных в кривую.

Кривая C называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Теорема. *Всякая элементарная гладкая кривая C спрямляема. Ее длина S может быть найдена по формуле*

$$S=\int_a^b|f'(t)|dt,$$

где $f:[a,b]\to R^3$ -произвольная регулярная параметризация кривой C.

Доказательство. Оценим разность между длиной ломаной и интегралом модуля производной. Для этого введем обозначения:

$\Delta_i f=f(t_i)-f(t_{i-1}),\qquad f_i'=f'(t_i),\qquad \Delta_i t=t_i-t_{i-1}.$

Тогда имеем

$$\left|\sum_{i=1}^n|\Delta_i f|-\int_a^b|f'(t)|dt\right|\le\left|\sum_{i=1}^n|\Delta_i f|-\sum_{i=1}^n|f_i'|\Delta_i t\right|+\left|\sum_{i=1}^n|f_i'|\Delta_i t-\int_a^b|f'(t)|dt\right|=I+II.$$

Второе слагаемое по мере уменьшения звеньев ломаной стремится к нулю по определению интеграла. Осталось доказать, что к нулю стремится и первое слагаемое. Преобразовывая, получаем неравенство:

$$I=\left|\sum_{i=1}^n(|\Delta_i f|-|f_i'|\Delta_i t)\right|\le\sum_{i=1}^n|\Delta_i f-f_i'\Delta_i t|.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в этой сумме:

$$\left|\Delta_i f - f_i'\Delta_i t\right| = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_i' dt\right| = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t) - f_i')dt\right| \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|f'(t) - f_i'\right| dt .$$

Так как функция $\vec{f}'(t)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $x, y \in [a,b]$ и $|x-y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Поэтому если все отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ по длине меньше δ, то $|f'(t) - f_i'| < \varepsilon$ для любого $t \in [t_{i-1}, t_i]$, и, следовательно,

$$\left|\Delta_i f - f'\Delta_i t\right| \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon \cdot dt = \varepsilon \cdot \Delta_i t .$$

Окончательно получаем, что для достаточно мелких разбиений

$$I \le \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon \cdot \Delta_i t) = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta_i t = \varepsilon (t_n - t_0) .$$

Отсюда в силу произвольности выбора числа ε следует, что первое слагаемое стремится к нулю.

Замечание: 1. Если f_1, f_2, f_3-координатные функции вектор - функции $\vec{f}$, то формула длины кривой примет вид

$$S = \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2}\, dt$$

или, короче,

$$S = \int_a^b \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}\, dt .$$

2. Если кривая C плоская и явно задана уравнением $y = f(x)$, то, подставляя в предыдущую формулу $t = x, f_1(x) = x, f_2(x) = f(x), f_3(x) = 0$, получаем

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}\, dx .$$

Естественная(натуральная)параметризация кривой

Длину дуги можно использовать для введения одной очень удобной параметризации кривой C. Зададим на промежутке $[a,b]$ функцию $\psi(t)$ по формуле

$$\psi(t) = \int_a^t \left|\vec{f}'(\tau) d\tau\right|$$

Ясно, что $\psi(t)$ равняется длине дуги с началом в точке $\vec{f}(a)$ и концом $\vec{f}(t)$. Функция $\psi(t)$ гладкая: очевидно, $\psi'(t) = \left|\vec{f}'(\tau)\right|$. Она монотонно возрастает(поскольку ее производная $\left|\vec{f}'(t)\right|$ положительна) и отображает отрезок $[a,b]$ в отрезок $[0,S]$-где S- длина кривой C.

Рассмотрим обратную функцию $\varphi = \psi^{-1}$, тогда $\varphi(s) : [0,S] \to [a,b]$. Следовательно, если $\psi(t) = s$, то $\varphi(s) = t$.

Рассмотрим параметризацию $\vec{g}(s)$ кривой C, получающуюся из параметризации

$\vec{f}(t)$ при замене параметра $t=\varphi(s)$:

$$\vec{f}(t)=\vec{f}(\varphi(s))=\vec{g}(s).$$

Такая параметризация кривой называется *естественной или натуральной параметризацией*. Параметром в этой параметризации служит s -длина дуги кривой. Это и есть так называемый *естественный параметр*. Параметризация $f(t)$ получается из $g(s)$ при обратной замене параметра $s=\psi(t)$.

Важное свойство естественной параметризации состоит в том, что касательный вектор при такой параметризации имеет единичную длину

$$\left|\vec{g}'(s)\right|\equiv 1.$$

Действительно, поскольку

$$\varphi'(s)=\frac{1}{\psi'(t)}=\frac{1}{\psi'(\varphi(s))}=\frac{1}{\left|\vec{f}'(\varphi(s))\right|},$$

То

$$\left|\vec{g}'(s)\right|=\left|\vec{f}'(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)\right|=\left|\vec{f}'(\varphi(s))\right|\cdot\frac{1}{\left|\vec{f}'(\varphi(s))\right|}\equiv 1.$$

Этим свойством и тем, что $\vec{g}(0)$ совпадает с началом кривой, естественная параметризация определена однозначно.

$\vec{g}'(s)=\vec{t}$ -единичный вектор касательной в естественной параметризации.