

**Тема: Свойства топологических пространств. Гомеоморфизм.
Топологические многообразия.**

План лекции

1. Свойства топологических пространств: отделимость, компактность, связность.
2. Непрерывное отображение топологических пространств. Гомеоморфизм.
3. Понятие n -мерного топологического многообразия. Поверхности, поверхности с краем.

Связность

Топологическое пространство X называется *несвязным*, если существуют два непустых открытых множества U и V , не имеющих общих точек, в объединении дающих все пространство X . Другими словами, несвязное топологическое пространство X может быть разбито на два непустых открытых множества, не имеющих общих точек.

Пространство X называется *связным*, если такого разбиения не существует.

Несвязным пространством является пространство X с дискретной топологией, в котором более одной точки. Взяв любое непустое множество $U \neq X$ в этом пространстве и его дополнение $V = X \setminus U$, мы получим разбиение X на два непустых открытых множества.

Заметим, что если несвязное пространство X разбито на два непустых открытых множества U и V , не имеющих общих точек, то $U = CV$ и $V = CU$. Поэтому можно дать другое определение связного пространства: *пространство X называется связным, если в нем одновременно открытым и замкнутым множеством является лишь само пространство или пустое множество.*

Множество H в топологическом пространстве X называется *связным*, если оно является связным пространством относительно индуцированной топологии. Другими словами, множество H в топологическом пространстве X называется связным, если нельзя найти двух открытых в X множеств G_1 и G_2 таких, что

$$\begin{aligned} H &\subset G_1 \cup G_2, \\ (H \cap G_1) \cap (H \cap G_2) &= \emptyset \\ H \cap G_1 \neq \emptyset, H \cap G_2 &\neq \emptyset \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема 11. Пусть $\{H_\alpha\}$ — совокупность связных подмножеств пространства X , имеющих общую точку. Тогда множество $H = \bigcup_{\alpha} H_\alpha$ также будет связным в X .

Пусть теперь a — произвольная точка топологического пространства X . Согласно теореме 11 среди всех связных множеств в X , содержащих a , всегда имеется наибольшее, т. е. такое, которое содержит любое связное множество, содержащее точку a . Это наибольшее связное множество, содержащее точку a , называется *компонентой связности точки a в X* .

Если H_a и H_b — компоненты точек a и b и $H_a \cap H_b \neq \emptyset$, то из теоремы 11 и определения компоненты следует, что $H_a \cup H_b = H_a = H_b$. Поэтому справедлива следующая теорема:

Теорема 12. Компоненты связности двух различных точек либо не пересекаются, либо совпадают.

Из этой теоремы вытекает, что всякое топологическое пространство разбивается в сумму попарно не пересекающихся компонент связности его точек. Компоненты связности отдельных точек пространства X обычно просто называют *компонентами X* .

Областью называется непустое открытое связное множество. *Замкнутой областью* называется такое замкнутое множество, которое является замыканием области.

Отделимость

Аксиома Хаусдорфа. Для любых двух различных точек пространства существуют их непересекающиеся окрестности.

Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме отделимости, называются хаусдорфовыми.

Подпространства хаусдорфова пространства будут хаусдорфовыми. Это непосредственно вытекает из определений соответствующих понятий. Отметим, что метрическое пространство является хаусдорфовым относительно топологии, индуцированной метрикой, так как любые две различные точки можно отделить шаровыми окрестностями с центрами в этих точках и с радиусами, меньшими половины расстояния между ними.

Теорема 13. В хаусдорфовом пространстве X сходящаяся последовательность точек a_n имеет единственный предел.

Компактность

Совокупность $\sum \{G_\beta\}$ открытых множеств топологического пространства (X, Φ) называется *открытым покрытием*, если объединение множеств семейства Σ совпадает с X .

Топологическое пространство X называется *компактным ИЛИ компактом*, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Множество M в топологическом пространстве называется *компактным*, если оно является компактным топологическим пространством относительно индуцированной топологии.

Теорема 14. Для того чтобы множество M в топологическом пространстве X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы из любого открытого покрытия множества M в X можно было выделить конечное подпокрытие.

Лемма. Пусть M — компактное подмножество хаусдорфова пространства X и точка $a \notin M$. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества $G_1 \supset M$ и $a \in G_2$.

Теорема 15. Компактное множество M хаусдорфова пространства замкнуто.

Доказательство. Возьмем любую точку $y \notin M$. Тогда по лемме существуют непересекающиеся открытые множества $G_y \supset M$ и $y \in H_y$. Так как $H_y \cap M = \emptyset$, то замкнутое множество $C_x H_y \supset M$. Но множество $M = \bigcap_{y \notin M} C_x H_y$, так как пересечение множеств $C_x H_y$ не содержит ни одной из точек $y \notin M$, но содержит M , поскольку $M \subset C_x H_y$ для каждого $y \notin M$. Как пересечение семейства замкнутых множеств $C_x H_y$ множество M замкнуто.

Теорема 16. Для того чтобы в n -мерном евклидовом пространстве E^n множество M было компактным, необходимо и достаточно, чтобы M было замкнуто и ограничено.

Ограниченность M означает, что M лежит внутри некоторого шара.

Из этой теоремы следует, например, что отрезок, квадрат, шар, сфера в евклидовом пространстве компактны, а любое непустое открытое множество в евклидовом пространстве некомпактно.

Непрерывные отображения топологических пространств

Пусть даны топологические пространства X и Y и отображение $f: X \rightarrow Y$. Отображение f называется *непрерывным в точке $a \in X$* , если для каждой окрестности V точки $f(a)$ существует такая окрестность U точки a , что $f(U) \subset V$ (рис. 2).

Отображение f называется *непрерывным на множестве $H \subset X$* , если f непрерывно в каждой его точке. Слова «непрерывное отображение» означают, что это отображение непрерывно во всех точках.

Если X есть открытое множество в E^n , а Y совпадает с R , то данное определение

непрерывности есть известное в анализе

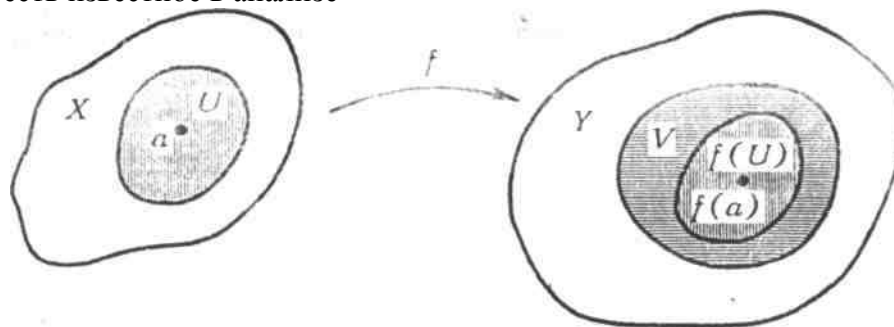


Рис. 2

определение непрерывности функции на языке « ε - δ ».

Теорема 1. Для того чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ было непрерывным на X , необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого открытого (замкнутого) множества был открытым (замкнутым) множеством.

Замечание. Образ замкнутого (открытого) множества при непрерывном отображении может быть и не замкнутым (не открытым) множеством. Например, отображение $u=e^x \cos y, v=e^x \sin y$ плоскости X с координатами (x, y) в плоскость U с координатами (u, v) отображает полупрямую $x \leq 0, y=0$, являющуюся замкнутым множеством в X , на множество $0 < u < 1, v=0$, которое уже не является замкнутым в U .

Теорема 2. Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Если отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ непрерывны, то отображение $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ также непрерывно.

Доказательство. Пусть W — любое открытое множество в Z . Тогда в силу теоремы 1 множества $V = g^{-1}(W)$ и $U = f^{-1}(V)$ открыты. Поскольку $U = h^{-1}(W)$, то, снова применяя теорему 1, получаем, что h непрерывно.

Теорема 3. Если X — компактное топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение X в Y , то $f(X)$ компактно в Y .

Доказательство. Пусть $\sum \{G_\beta\}$ — покрытие $f(X)$ открытыми множествами $G_\beta \subset Y$. В силу теоремы 1 каждое множество $U_\beta = f^{-1}(G_\beta)$ открыто в X . Система $\sum_1 = \{U_\beta\}$ будет открытым покрытием X . Выбирая из $\sum_1$ конечное подпокрытие $U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_k}$, получаем подпокрытие $G_{\beta_1}, \dots, G_{\beta_k}$ множества $f(X)$. В силу теоремы 14 множество $f(X)$ компактно.

Теорема 4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение и $f(X)=Y$. Тогда если X связно, то $f(X)$ связно.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие непустые одновременно открытые и замкнутые множества U_1 и U_2 , что $U_1 \cup U_2 = f(X)$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Так как f непрерывно, то непустые множества $V_1 = f^{-1}(U_1)$ и $V_2 = f^{-1}(U_2)$ одновременно открыты и замкнуты. Так как $V_1 \cup V_2 = X$, а $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, то X несвязно. Получили противоречие.

Гомеоморфизм

Пусть даны топологические пространства X и Y . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется топологическим или гомеоморфизмом, если f обратимо и отображения f и f^{-1} непрерывны.

Из этого определения и теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение: для того чтобы взаимно однозначное отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ любого открытого множества из X был открытым множеством в Y и чтобы прообраз любого открытого множества из Y был открытым множеством в X .

Говорят, что топологическое пространство X гомеоморфно топологическому пространству Y , если существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$. Очевидно, что если X

гомеоморфно Y , то и в свою очередь Y гомеоморфно X ; при этом соответствующим гомеоморфизмом будет отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$. Из приведенных выше свойств гомеоморфизмов вытекает, что *отношение гомеоморфности топологических пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно*, т. е. оно является *отношением эквивалентности*.

Поэтому про гомеоморфные пространства X и Y также говорят, что они топологически эквивалентны, обозначая это следующим образом: $X \stackrel{\text{top}}{=} Y$. В связи с этим свойства фигур, которые сохраняются при гомеоморфизмах в пространствах, имеющих, кроме топологической, и другие структуры, называют *топологическими*.

Приведем примеры гомеоморфных пространств и гомеоморфизмов.

1. Любые два интервала (a, b) и (c, d) гомеоморфны. Гомеоморфизм между ними устанавливается, например, линейной функцией $y = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$, где $x \in (a, b)$, а $y \in (c, d)$ (рис. 3).

2. Интервал (a, b) и числовая ось R гомеоморфны. Гомеоморфизм между ними устанавливается, например, функцией

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{рис. 4}).$$

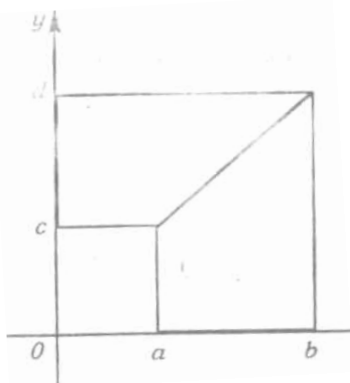


Рис. 3

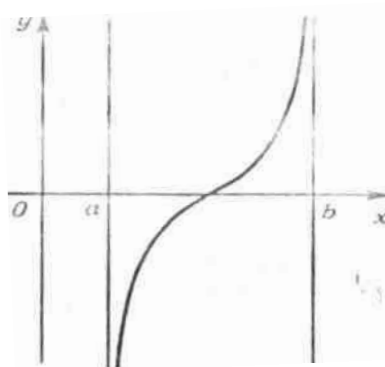


Рис. 4

3. Сфера гомеоморфна поверхности куба. Для того чтобы установить гомеоморфизм между ними, достаточно поместить их центры в одну точку и произвести из нее центральное проектирование (рис. 5).

4. Сфера, из которой удалена (выколота) одна точка, гомеоморфна плоскости. Гомеоморфизм устанавливается центральным проектированием сферы из выколотой точки на плоскость, касающуюся сферы в точке, диаметрально противоположной выколотой точке (рис. 6). Это отображение называется *стереографической проекцией*.

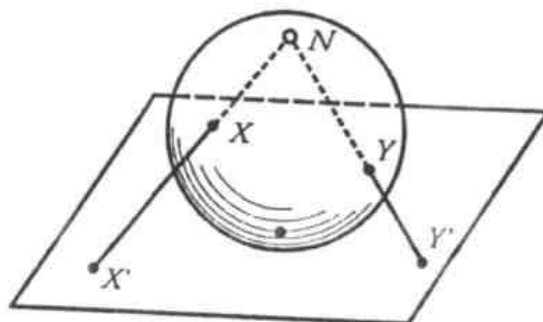
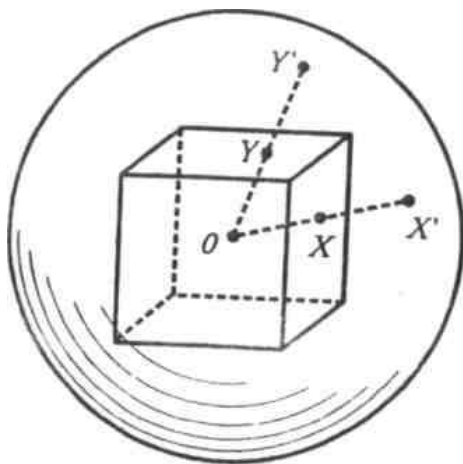


Рис. 5

Рис. 6

Понятие n -мерного многообразия

Важнейшим для геометрии классом топологических пространств являются n -мерные *многообразия*, т. е. такие хаусдорфовы топологические пространства, каждая точка которых имеет окрестность, гомеоморфную n -мерному евклидову пространству E^n (или, что то же самое, открытому шару в E^n).

Примером n -мерного многообразия, отличного от E^n , является, например, n -мерная сфера S^n в E^{n+1} , заданная уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Другой пример дает график непрерывной функции $f(x_1, \dots, x_n)$, заданной в некоторой области G в плоскости переменных $x_1, \dots, x_n$. Этот график F в E^{n+1} задается уравнением $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$. (рис. 7).

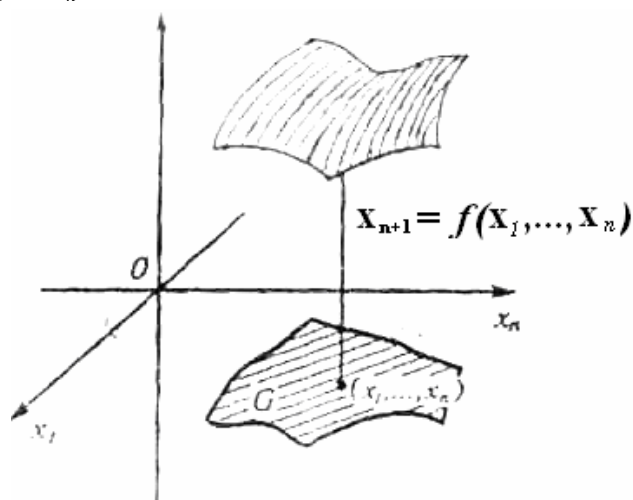


Рис.7

Поверхности и поверхности с краем

Итак, *поверхностью* мы будем называть такое хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу (рис. 8).

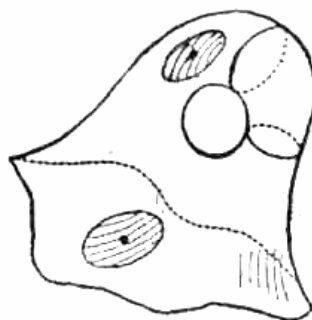


Рис.8

Примерами поверхностей являются любая область на евклидовой плоскости E^2 , сфера, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды в E^3 (рис. 9).

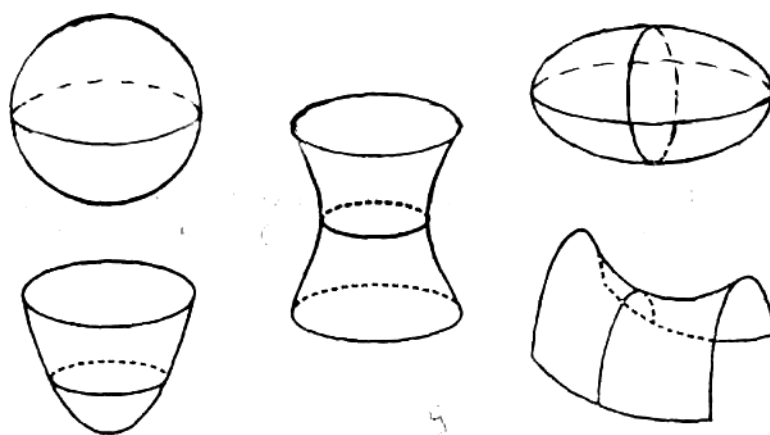


Рис.9

Часто будет рассматриваться поверхность, которую называют тором (рис. 10).

Тором T^2 в пространстве E^3 называется множество точек, образованное вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей окружности.

Проективная плоскость P^2 также является поверхностью. Если воспользоваться моделью P^2 в виде сферы S^2 в E^3 , каждая пара диаметральных точек которой отождествляется и считается за одну точку плоскости P^2 , то круговыми окрестностями таких точек на P^2 будут пары диаметрально противоположных круговых окрестностей на S^2 . (рис. 11).

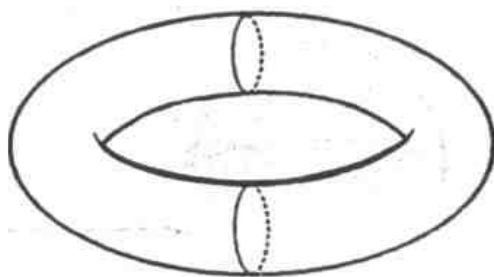


Рис.10

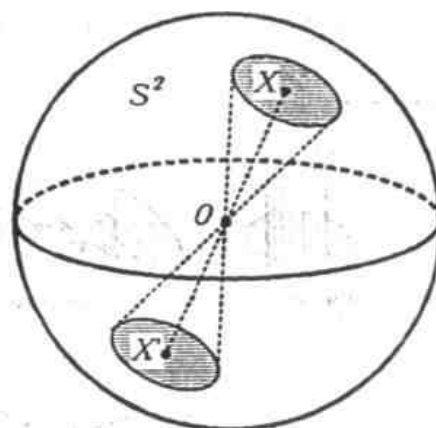


Рис.11

Поверхностью с краем будем называть такое хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную евклидовой плоскости E^2 или евклидовой полуплоскости. (рис. 12). Те точки поверхности с краем, которые имеют окрестности, гомеоморфные плоскости, называются *внутренними точками поверхности*, а те ее точки, которые имеют окрестности, гомеоморфные полуплоскости, называются *точками края*.

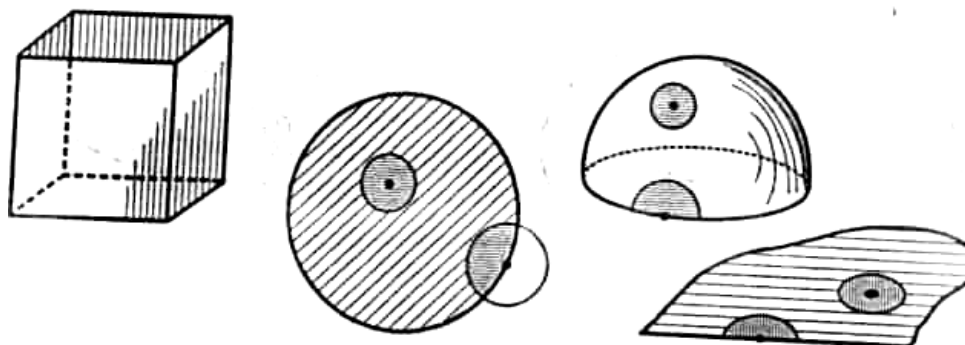


Рис.12

Множество внутренних точек любой поверхности с краем F открыто в F и само

является поверхностью. Потому множество точек края в F замкнуто; его называют *краем F* и обозначают ∂F . Отметим, что ∂F является границей в F множества внутренних точек. Каждая поверхность является частным случаем поверхности с краем, край которой пуст.

Если край ∂F поверхности с краем F не пуст, то он имеет простое строение: каждая его компонента гомеоморфна либо окружности, либо прямой. В частности, когда F компактна, то край ее состоит из конечного числа компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности. Так, край круга – это окружность, а край кольца – это две окружности. (рис. 13).

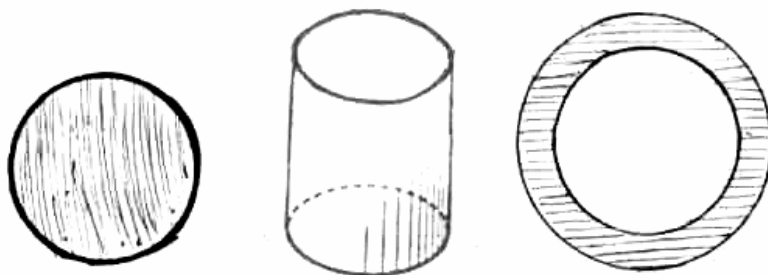


Рис.13