2. Конспект лекций (рекомендации к теоретической части)

ТОПОЛОГИЯ

Лекция№1

Тема: **Понятие топологического пространства и его базиса. Открытые и замкнутые множества**

План лекции

1. Аксиоматика топологического пространства. Примеры топологий.
2. Открытые и замкнутые множества. Внутренние, внешние и граничные точки. Замыкание.
3. Базис топологии. Топологические подпространства.

Аксиоматика топологического пространства

Топология изучает наиболее общие свойства геометрических фигур, связанные с «прикосновением» друг к другу частей фигуры и с «непрерывностью» в самом общем виде.

С топологическими понятиями школьному учителю постоянно приходится иметь дело в курсе геометрии: граничные и внутренние точки, геометрическое тело и его поверхность и т.п. Точных определений этим понятиям в школьном курсе, как правило, не дается. Кроме того, сейчас топология является крупным разделом современной математики и знакомство с ней необходимо для общего образования школьного учителя.

Геометрические фигуры, рассматриваемые в школьной планиметрии, достаточно просты – треугольники, параллелограммы и трапеции, правильные многоугольники, окружность и круг. При их изучении вряд ли стоит обсуждать с учениками встречающиеся топологические понятия, хотя, конечно, они появляются, например, в таких фразах: «Окружность – это граница круга» или «Многоугольником называется часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной» и т.п.

В стереометрии же в школе круг изучаемых геометрических фигур становится значительно шире, уровень строгости курса повышается, и в старших классах вполне естественно достаточно подробно обсудить с учениками встречающиеся топологические понятия. К таким понятиям прежде всего относится понятие геометрического тела. На примере этого понятия хорошо видно, как в геометрии от наглядности переходят к точным формулировкам и насколько труден бывает такой переход.

Понятие топологического пространства играет большую роль во многих разделах математики. Изучение топологии формирует взгляды будущего учителя на современную геометрию и школьную (модель современной) геометрию.

Имеется много равносильных аксиоматик топологического пространства. Мы выбираем ту из них, в которой аксиоматизируются хорошо известные свойства открытых множеств в евклидовых пространствах.

Пусть задано некоторое множество *X*. Его элементы будем называть точками. Выделим семейство Ф некоторых подмножеств G_α множества *X*. Будем говорить, что семейство $\Phi = \{G_\alpha\}$ является *топологической структурой* в *X*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

АТ.1. *Объединение любой системы множеств из* Ф *принадлежит* Ф.

АТ.2. *Пересечение любых двух множеств из* Ф *принадлежит* Ф.

АТ.3. *Пустое множество* $\varnothing$ *принадлежит* Ф.

АТ.4. *Само множество X принадлежит* Ф.

Часто топологическую структуру Ф называют *топологией* в *X*. Множество *X*, в котором задана некоторая топология $\Phi = \{G_\alpha\}$ называется топологическим пространством, а множество G_α из семейства Ф называются *открытыми* в этом пространстве.

Таким образом, топологическое пространство есть пара – множество X и введенная в нем топология Ф. Поэтому топологическое пространство естественно обозначить (X, Ф). В тех случаях, когда ясно, о какой топологии Ф идет речь, топологическое пространство будем обозначать просто X. Требования АТ.1 – АТ.4 называются *аксиомами топологического пространства*.

Примеры топологических пространств

Пример 1. Пусть X – произвольное множество. Из аксиом АТ.3 и АТ.4 топологического пространства вытекает, что среди открытых множеств любой топологической структуры в X обязательно должны быть пустое множество $\varnothing$ и само X. Очевидно, что для семейства $\Phi_0 = \{\varnothing, X\}$, которое состоит лишь из этих двух множеств, выполняются также и аксиомы АТ.1 и АТ.2. Поэтому Φ_0 является простейшей топологической структурой в X. Эта топология называется *тривиальной*.

Пример 2. Пусть снова X – произвольное множество. Сейчас рассмотрим другой крайний случай, когда любое подмножество множества X считается открытым множеством. Очевидно, что и в этом случае все аксиомы АТ.1 – АТ.4 выполняются. Такая топология $\Phi_d = \{H, H \subset X\}$, состоящая из всех подмножеств H множества X, называется *дискретной топологией*. В дискретной топологии множество, состоящее их одной точки, является открытым.

Эти два простейших примера показывают, что, вводя в одном и том же множестве различные топологии, приходим к различным топологическим пространствам. Приведем еще два примера, вводя различные топологии в R^n.

Пример 3. Пусть в R^n введена обычная евклидова метрика. Через $U(x, r)$ обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r>0, т. е. множество точек, удаленных от x на расстояние, меньшее r. Считаем, что множество G открыто в R^n, если для каждой точки $x \in G$ существует такое r>0, что шар $U(x, r) \subset G$. Топология, состоящая из таких открытых множеств, называется *естественной*. Топологическое пространство R^n с естественной топологией будем обозначать, как и евклидово пространство через E^n. Выполнимость в E^n аксиом АТ.1, АТ.3, АТ.4 вытекает из определения естественной топологии. Проверим справедливость аксиомы АТ.2.

Пусть множества G_1 и G_2 открыты в E^n, а $G = G_1 \cap G_2$. Если точка $x \in G$, то $x \in G_1$ и $x \in G_2$. Поэтому существуют такие числа r_1>0 и r_2>0, что $U(x, r_1) \subset G_1$ и $U(x, r_2) \subset G_2$. Если $r=min(r_1,r_2)$, то $U(x, r) \subset G$, т. е. множество G открыто.

Пример 4. Пусть $X=R^n$. Открытыми в X множествами назовем теперь только шары $U(r)$ с центром в точке (?), а также все множество X и пустое множество. Очевидно, аксиомы АТ.3 и АТ.4 выполняются. Если $\{U(r_\alpha)\}$ - любая система открытых множеств, то их объединением будет множество $U(r)$, где $r = \sup\limits_\alpha r_\alpha$ (если $\sup\limits_\alpha r_\alpha = +\infty$, то $U(r)=X$). Итак, аксиома АТ.1 выполняется. Пересечением двух множеств $U(r_1)$ и $U(r_2)$ будет множество $U(r)$, где $r=min(r_1, r_2)$, т. е. выполняется АТ.2. Таким образом, выделенное семейство является топологией в R^n. Назовем ее *концентрической*.

Топология, индуцируемая метрикой

В каждом метрическом пространстве (X, ρ) топология естественным образом *индуцируется* метрикой ρ этого пространства. Действительно, назовем шаром $U(x, r)$ с центом в точке x и радиусом r>0 в метрическом пространстве (X, ρ) множество всех точек $y \in X$, таких, что $\rho(x, y) < r$. Открытым в (X, ρ) множеством назовем такое множество G, для любой точки которого существует некоторый шар положительного радиуса с центром в этой точке, содержащийся и множестве G. Эти множества порождают в (X, ρ) топологию. Топология в метрическом пространстве (X, ρ) называется *топологией, индуцированной в* (X, ρ) *метрикой.*

Замкнутые множества

Если X – произвольное множество и H – его подмножество, то множество $X\backslash H$ называется *дополнением* H до X и обозначается через C_xH. Очевидно, выполняются равенства

$$H \cap C_x H = \varnothing, \; H \cup C_x H = X \text{ и}$$

$$C_x(C_xH)=H.$$

Кроме того, легко проверить формулы двойственности

$$\bigcup_\alpha C_x H_\alpha = C_x(\bigcap_\alpha H_\alpha) \text{ и} \tag{1}$$

$$\bigcap_\alpha C_x H_\alpha = C_x(\bigcup_\alpha H_\alpha). \tag{2}$$

Множество F называется *замкнутым* в топологическом пространстве *(X, Φ)*, если оно является дополнением к открытому множеству, или, что то же самое, его дополнением до X является открытое множество.

Из аксиом топологического пространства и формул (1) и (2) непосредственно вытекают следующие *свойства замкнутых множеств:*

1. *Пересечение любой системы замкнутых множеств есть замкнутое множество.*
2. *Объединение двух замкнутых множеств есть замкнутое множество.*
3. *Все пространство замкнуто.*
4. *Пустое множество замкнуто.*

Докажем свойство 1. Возьмем любую систему $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств F_α. Тогда система $\{G_\alpha = C_x F_\alpha\}$ состоит из открытых множеств. Из равенства (2) вытекает, что множество

$$F = \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha C_x G_\alpha = C_x(\bigcup_\alpha G_\alpha)$$

будет дополнением к множеству $\bigcup_\alpha G_\alpha$, которое открыто по аксиоме АТ.1. Следовательно, F – замкнуто.

Утверждение аксиомы АТ.2, а также соответствующее ему свойство 2 замкнутых множеств методом математической индукции легко распространить с двух на любое конечное число множеств. А именно имеет место следующая теорема:

Теорема. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть множество открытое. Объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Замечание. Очевидно, пересечение бесконечного семейства открытых множеств не всегда является открытым.

Внутренние, внешние, граничные точки

Пусть *(X, Φ)* – топологическое пространство и точка $u \in X$. Любое открытое множество, содержащее точку u, называется *окрестностью этой точки.*

Возьмем в X некоторое множество H. Точка u называется *внутренней точкой множества* H, если существует такая окрестность Q точки u, что $Q \subset H$. Множество всех внутренних точек множества H обозначается через int$H$.

Точка b называется *внешней точкой множества* H, если существует такая окрестность V точки b, в которой нет точек множества H, т. е. $V \subset C_x H$. Множество всех внешних точек множества H обозначается через ext$H$.

Точка c называется *граничной точкой множества* H, если в любой окрестности точки c имеются как точки множества H, так и точки, не принадлежащие H. Множество всех граничных точек множества H обозначается через ∂H и называется *границей* H.

Из определения внутренних, внешних и граничных точек следует, что относительно каждого множества H все пространство X распадается на три множества int$H$, ext$H$ и ∂H , попарно не имеющие общих точек, т. е. имеют место соотношения

$$\operatorname{int} H \bigcup extH \bigcup \partial H = X \qquad (1)$$

и

$$\operatorname{int} H \bigcap extH = \operatorname{int} H \bigcap \partial H = extH \bigcap \partial H = \varnothing \qquad (2)$$

Кроме того, из этих определений непосредственно вытекают следующие *утверждения:*

1. *Внутренняя точка множества является внешней точкой его дополнения, и, наоборот, внешняя точка множества является внутренней точкой его дополнения.* Поэтому справедливы соотношения

$$\operatorname{int} H = extC_x H \text{ и } extH = \operatorname{int} C_x H \qquad (3)$$

2. *Каждая граничная точка множества является граничной точкой его дополнения, и, обратно, т. е. множество и его дополнение имеют одну и ту же границу:* $\partial H = \partial C_x H$.

3. *Внутренними точками множества могут быть лишь точки этого множества, т. е.*

$$\operatorname{int} H \subset H , \qquad (4)$$

а внешними точками множества могут быть лишь точки, не принадлежащие этому множеству, т. е. $extH \subset C_x H$.

Если в одном и том же множестве X вводить разные топологии, то у каждого его подмножества H множества *intH*, *extH* и ∂H могут сильно изменяться. Для тривиальной топологии (X, Φ_0) в случае, когда $H \neq X$ и $H \neq \varnothing$, множество H не имеет ни внутренних, ни внешних точек, и поэтому все его точки граничные, т. е. $\operatorname{int} H = \varnothing$, $extH = \varnothing$ и $\partial H = H$.

Если же в X ввести дискретную топологию, то любая точка множества H внутренняя, так как она сама является своей окрестностью, т. е. $H = \operatorname{int} H$, $extH = C_x H$ и $\partial H = \varnothing$.

Теорема 1. *Для любого множества H множество его внутренних точек intH открыто.*

<u>Доказательство</u>. Для каждой точки $a \in \operatorname{int} H$ выберем такую ее окрестность U_a, что $U_a \subset H$. Поскольку открытое множество является окрестностью любой своей точки, то все точки множества U_a являются внутренними для H, т. е. $U_a \subset \operatorname{int} H$. Так как множество

$$\operatorname{int} H = \bigcup_{a \in \operatorname{int} H} U_a ,$$

то из аксиомы АТ. 1 следует, что множество *intH* открыто.

Из этой теоремы и второго из равенств (3) вытекают еще две теоремы.

Теорема 2. *Для любого множества H множество extH открыто.*

Теорема 3. *Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с множеством своих внутренних точек.*

<u>Доказательство.</u> 1) *Необходимость.* Так как открытое множество является окрестностью любой своей точки, то $H \subset \operatorname{int} H$. Из этого включения и включения (4) получаем, что $H = \operatorname{int} H$.

2) *Достаточность.* Вытекает из теоремы 1.

Замыкание

Точка a называется *точкой прикосновения множества H,* если каждая окрестность точки a имеет с H хотя бы одну общую точку.

Из этого определения следует, что точками прикосновения множества являются его внутренние и граничные точки, а внешние толчки множества не являются его точками прикосновения.

Множество всех точек прикосновения множества H называется *замыванием множества* H и обозначается $\overline{H}$. Из этого определение и сказанного о точках прикосновения следует справедливость равенств

$$\overline{H} = \operatorname{int} H \bigcup \partial H = C_x(extH) \tag{5}$$

Так как каждая точка множества является его точкой прикосновения, то

$$H \subset \overline{H} \tag{6}$$

Поэтому переход от множества к его замыканию состоит в том, что множество пополняется теми своими граничными точками, которые не принадлежат данному множеству, т. е.

$$\overline{H} = H \bigcup \partial H \tag{7}$$

Поскольку множество $\overline{H}$ является дополнением к открытому множеству *extH*, то $\overline{H}$ замкнуто. Итак, имеет место

Теорема 4. *Замыкание любого множества замкнуто.*

Теорема 5. *Для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть H замкнуто. Покажем, что $H = \overline{H}$. Поскольку $C_x H$ открыто, то по теореме 3 $C_x H = \operatorname{int} C_x H$. Это равенство и второе из равенств (3) дает равенство $C_x H = extH$. Но тогда $H = C_x(extH)$, т. е., учитывая (5), получаем, что $H = \overline{H}$.

2) *Достаточность* вытекает из теоремы 4.

Нами было доказано, что множества *intH* и *extH* открыты. Этот результат дополняет следующая теорема:

Теорема 6. *Граница любого множества замкнута.*

Доказательство. Из равенств (1) и (2) следует, что ∂H будет дополнением к множеству $\operatorname{int} H \bigcup extH$, которое открыто как объединение открытых множеств. Поэтому ∂H замкнуто.

Базис топологии

Часто топологию в пространстве вводят, не задавая сразу все семейство открытых множеств, а определяя сначала лишь часть из этого семейства, которую называют базисом топологии, а затем из этих базисных множеств с помощью операции объединения получают уже все открытые множества. Так поступают, например, на евклидовой плоскости, где открытые множества получают из открытых кругов.

Пусть (*X*, Ф) — топологическое пространство и пусть $\mathrm{B} = X\{B_\beta\}$— некоторое семейство открытых множеств в этом пространстве. Если любое открытое множество в (*X*, Ф) представимо в виде объединения некоторых множеств семейства ***B***, то ***B*** называется *базисом* (или *базой)* топологического пространства (*X*, Ф).

Теорема 7. *Для того чтобы семейство* $\mathrm{B} = X\{B_\beta\}$ *было базисом топологического пространства (X, Ф), необходимо и достаточно, чтобы для любой точки* $a \in X$ *и любой окрестности U точки a существовало такое множество* $B_0 \in B$ *что* $a \in B_0$ *и* $B_0 \subset U$.

С помощью теоремы 7 можно убедиться, что в пространстве E^2 в качестве базиса можно выбрать семейство всех открытых прямоугольников с соответственно параллельными сторонами или семейство всех открытых кругов, добавляя в обоих случаях пустое множество. Аналогично из этой же теоремы вытекает, что в метрическом пространстве с топологией, индуцированной метрикой, базисом является семейство всех открытых шаров, к которому добавлено пустое множество, а в пространстве с дискретной топологией базисом является семейство, состоящее из пустого множества и всех одноточечных множеств.

Часто топологическую структуру в некотором множестве X вводят, указывая вначале семейство не всех открытых множеств, а лишь семейство тех множеств, которые станут базисом искомой топологии. Такой способ введения топологической структуры основан на следующей теореме:

Теорема 8. *Пусть семейство подмножеств* $\mathrm{B} = X\{B_\beta\}$ *множества* X *удовлетворяет следующим условиям:* 1) $X = \bigcup_\beta B_\beta$; 2) Ø ∈ $\boldsymbol{B}$; 3) *каковы бы ни были множества* B_1 *и* B_2 *из семейства* $\boldsymbol{B}$ *и точка* $a \in B_1 \cap B_2$, *существует множество* $B_3 \in \boldsymbol{B}$, *содержащее точку* a *и содержащееся в пересечении множеств* B_1 *и* B_2. *Тогда в* X *существует топология, для которой семейство* $\boldsymbol{B}$ *является базисом. Такая топология единственна.*

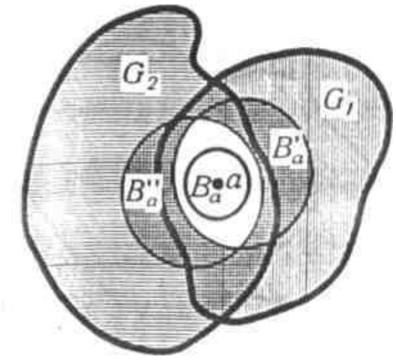

Рис. 1.

Доказательство. Рассмотрим семейство Φ множеств G_a, являющихся всевозможными объединениями множеств $B \in \boldsymbol{B}$. Легко видеть, что аксиомы АТ.1, АТ.3 и АТ.4 непосредственно следуют из построения множеств G_a и первых двух условий теоремы. Остается показать, что выполняется аксиома АТ.2, т. е. для любых двух G_1 и G_2 из Φ множество $G=G_1 \cap G_2$ также принадлежит Φ.

Пусть a — произвольная точка множества $G_1 \cap G_2$ (рис. 1).

Существуют такие множества $B_a^{'} \in \boldsymbol{B}$ и $B_a^{''} \in \boldsymbol{B}$, что $a \in B_a^{'} \subset G_1$ и $a \in B_a^{''} \subset G_2$. В силу условия 3 теоремы в $\boldsymbol{B}$ существует множество B_a, такое, что $a \in B_a$ и $B_a \subset B'_a \cap B_a^{''} \subset G_1 \cap G_2$. Множество $G_1 \cap G_2$ является объединением множеств $B_a \in \boldsymbol{B}$, а значит, принадлежит Φ.

Единственность построенной топологии очевидна.

Подпространство топологического пространства

Топологическое пространство обладает замечательным свойством: любое множество в таком пространстве само естественным образом становится топологическим пространством.

Пусть (X, Φ) — топологическое пространство и пусть Y — подмножество X. Тогда легко проверить, что на множестве Y порождается топология $\Psi = \{G_\alpha \cap Y, G_\alpha \in \Phi\}$. Эта топология называется *индуцированной на Y топологией* Φ, а топологическое пространство (Y, Ψ) — *подпространством топологического пространства* (X, Φ).

Из определения подпространства (Y, Φ) следует, что если $H \subset Y$ и открыто или замкнуто **в** (X, Φ), то H соответственно открыто или замкнуто в (Y, Ψ).

Строение замкнутых множеств подпространства описывает следующая теорема:

Теорема 9. *Множество F в подпространстве* (Y, Ψ) *будет замкнутым тогда и только тогда, когда оно является пересечением Y с замкнутым подмножеством из* (X,Φ).

Теорема 10. *Если семейство* $\mathrm{B} = X\{B_\beta\}$ *— базис в пространстве* (X, Φ), *то семейство* $B^{'} = \{Y \cap B_a\}$ *является базисом в подпространстве* (Y, Ψ).