Практическое занятие №8.

Тема: **Метрические задачи аксонометрии**

План.

1. Метрическая определенность изображения.
2. Решение плоских метрических задач аксонометрии.
3. Решение пространственных метрических задач аксонометрии.

Актуализация базовых знаний.

Метрические задачи состоят в определении истинных размеров фигур и их частей (расстояний между точками, величин углов, расстояний от точки до прямой или плоскости, площадей, объемов и др.) по их изображениям.

Изображение F некоторой фигуры $F^{/}$ на плоскости Σ называется *метрически определенным*, если к нему можно присоединить изображение декартова репера (т.е. в изображении фигуры F выделить изображение декартова репера) так, что все точки, прямые и плоскости, определяющие фигуру $F^{/}$, являются заданными.

Теорема. Метрически определенное изображение F определяет оригинал $\mathrm{F}^{/}$ с точностью до движения.

Полнота изображения является необходимым (но не достаточным!) условием его метрической определенности.

Параметрическим числом изображения называется число p независимых параметров, значения которых надо задать, чтобы изображение стало метрически определенным.

Решение задач.

Задача 1.

Установить, являются ли изображения следующих фигур метрически определенными:

а) прямоугольного треугольника;

б) равнобедренного треугольника с основанием, равным 2;

б) прямоугольного параллелепипеда.

Решение.

а) Изображение прямоугольного треугольника ABC ($\angle A$ прямой) не является метрически определенным. Свяжем с его изображением репер $\{A, B, C\}$. Пусть $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Нам известен только угол между $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Для того, чтобы изображение было метрически определенным, необходимо задать еще два параметра AB и AC.

б) Изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AB=1, является метрически определенным, так как можно присоединить к изображению декартов репер так, что все точки, определяющие фигуру заданы. Таким репером может служить, например, репер $\{O, B, H\}$, где OH=1, H принадлежит высоте CO треугольника ABC.

в) Свяжем с изображением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA^1B^1C^1D^1$ репер $\{A,B,D,A^1\}$. Нам известны углы между векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{AD},\ \vec{e}_3 = \overrightarrow{AA^1}$, определяемыми репером. Изображение будет метрически определенным, если ввести три параметра, например длины отрезков AB, AD, AA^1.

Замечание. Многие метрические задачи удобно решать, используя перспективно-аффинное преобразование (родство).

Задача 2.

Дано изображение равнобедренного треугольника, угол при основании которого равен 30°. Построить изображение точки пересечения его высот.

Решение.

Пусть ABC – изображение равнобедренного треугольника с основанием AC (рис.74). M – середина отрезка AC. Тогда BM – изображение высоты, опущенной на основание. На прямой BM следует найти такую точку F, которая делит отрезок MB в том же отношении, что и точка пересечения высот делит высоту, проведенную к основанию. Для построения точки F воспользуемся свойствами перспективно-аффинного преобразования (родства). Построим равнобедренный треугольник AB^1C с основанием AC и углом 30° при основании. Пусть F^1 – точка пересечения его высот. Рассмотрим родство с осью AC, переводящее точку B^1 в точку B. Тогда прямая, содержащая высоту MB^1, перейдет в прямую MB, а точка F^1 – в искомую точку F. Для построения F через F^1 проведем прямую, параллельную BB^1, и найдем точку ее пересечения с прямой MB.

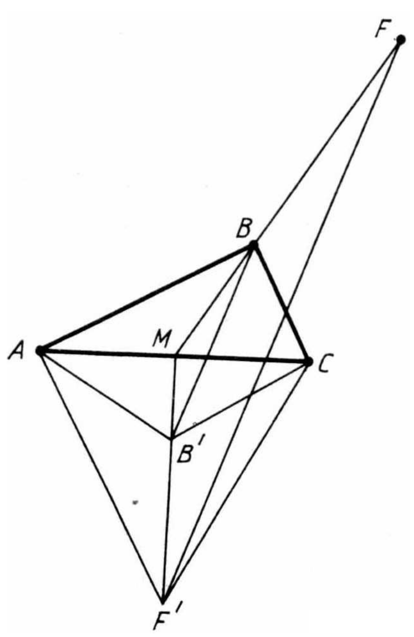


Рис. 74.

Задача 3.

Даны изображения правильного треугольника и угла. Построить изображение биссектрисы данного угла.

Решение.

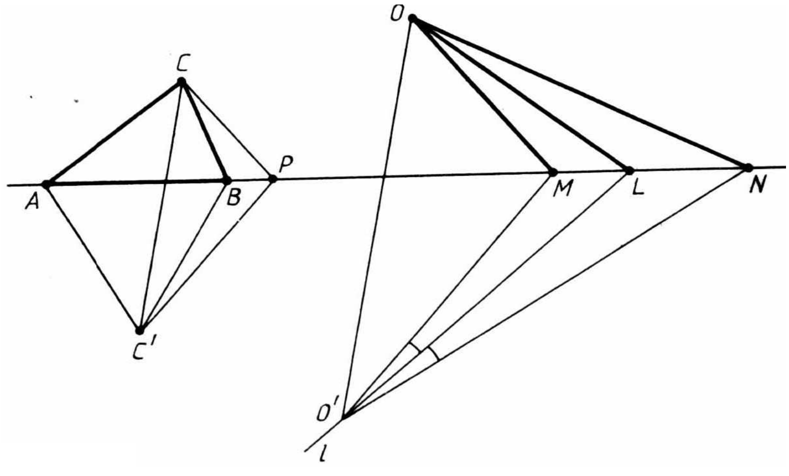


Рис. 75.

Пусть ABC – изображение данного треугольника, а MON – данного угла (рис. 75).

Построим равносторонний треугольник ABC^1 и рассмотрим родство, переводящее треугольник ABC в треугольник ABC^1. При этом преобразовании любая фигура, лежащая на плоскости изображений, преобразуется в фигуру, аффинно-эквивалентную ей. Таким образом, для решения следует найти образ угла при этом преобразовании, построить его биссектрису. Затем найти прообраз этой биссектрисы.

Опишем построение. Прямая AB – ось родства, состоящая из его неподвижных точек. Точки C и C^1 соответствуют друг другу в этом родстве. Поэтому прямые, соединяющие соответствующие точки, параллельны CC^1. Найдем образ прямой OM. CP параллельна OM. C^1P – образ прямой CP при указанном преобразовании. Отсюда следует, что образом прямой является прямая l, проходящая через M и параллельная PC^1. Образом O^1 точки O является точка пересечения l с прямой, проходящей через О параллельно CC^1. Отсюда следует, что $\angle MO^1N$ – образ $\angle MON$ при рассматриваемом родстве. Строим биссектрису O^1L угла MO^1N. Тогда OL – искомая биссектриса.

Задача 4.

Дано изображение ABC прямоугольного треугольника с острым углом 30° (при вершине A). Построить изображение высоты, опущенной на гипотенузу.

Решение.

I способ.

Строим треугольник ABC^1 так, чтобы $\angle BAC^1=30°$, $\angle AC^1B=90°$ (рис. 76), и проводим высоту C^1H этого треугольника. Отрезок CH искомый.

II способ.

Рассмотрим фигуру, подобную оригиналу F' на рисунке 77. Так как $\angle A'=30°$, $\angle C'=90°$, то $A'H':H'B'=A'C'^2:C'B'^2=(\sqrt{3})^2:1=3$. Поэтому $AH:HB=3$.

Таким образом, задача сводится к построению точки H на отрезке AB, удовлетворяющей условию $AH=3HB$. На рисунке 78 выполнено построение.

Рис. 76.

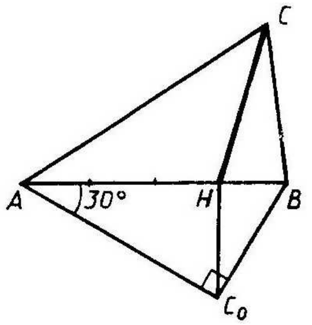


Рис. 77.

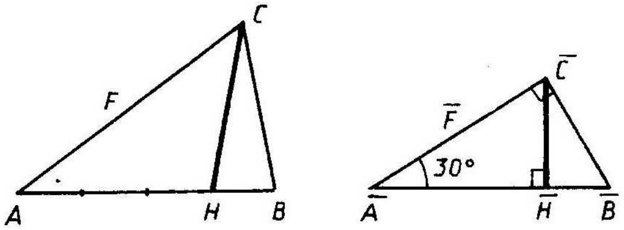
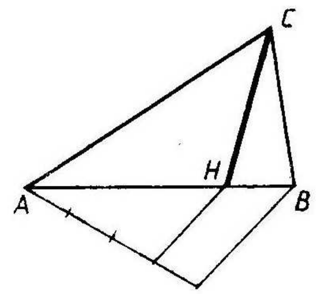


Рис. 78.



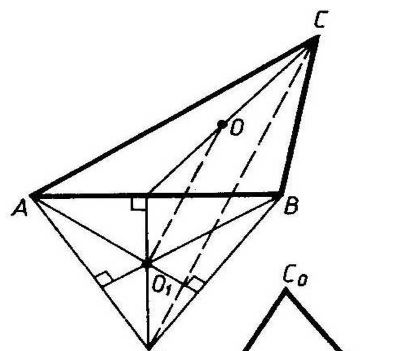
Задача 5.

Треугольник ABC является изображением треугольника $A'B'C'$, подобного данному треугольнику $A_0B_0C_0$. Построить изображение ортоцентра O' треугольника $A'B'C'$.

Решение.

Построим треугольник ABC^1, подобный треугольнику $A_0B_0C_0$, так, чтобы точки C и C^1 лежали по разные стороны от прямой AB (рис. 79). Затем строим ортоцентр O^1 треугольника ABC^1. Рассмотрим родство с осью AB, в котором точка C^1 переходит в точку C. Образ O точки O^1 в этом родстве является искомой точкой (рис. 79).

Рис. 79.



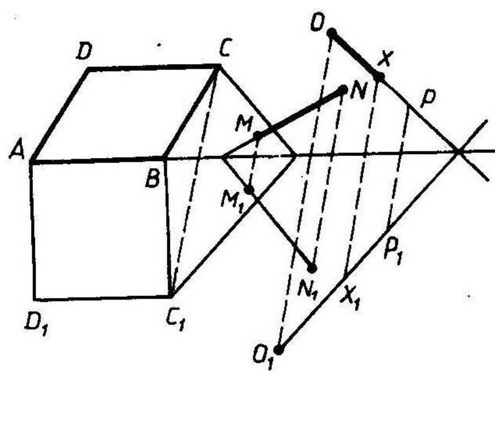
Задача 6.

На плоскости изображений даны параллелограмм $ABCD$, отрезок MN и луч OP, которые являются изображениями квадрата, отрезка и луча, лежащих в одной плоскости. Построить изображение отрезка, равного данном отрезку и отложенного на данном луче от его начала.

Решение.

Построим квадрат ABC^1D^1 так, как показано на рисунке 66, и рассмотрим родство с осью AB и соответствующими точками C и C^1. Построим образ O^1P^1 луча OP и образ M^1N^1 отрезка MN в этом родстве (рис. 80). Отложим на луче O^1P^1 отрезок O^1X^1, равный отрезку M^1N^1, и найдем отрезок OX, соответствующий отрезку O^1X^1 в этом родстве. Отрезок OX искомый.

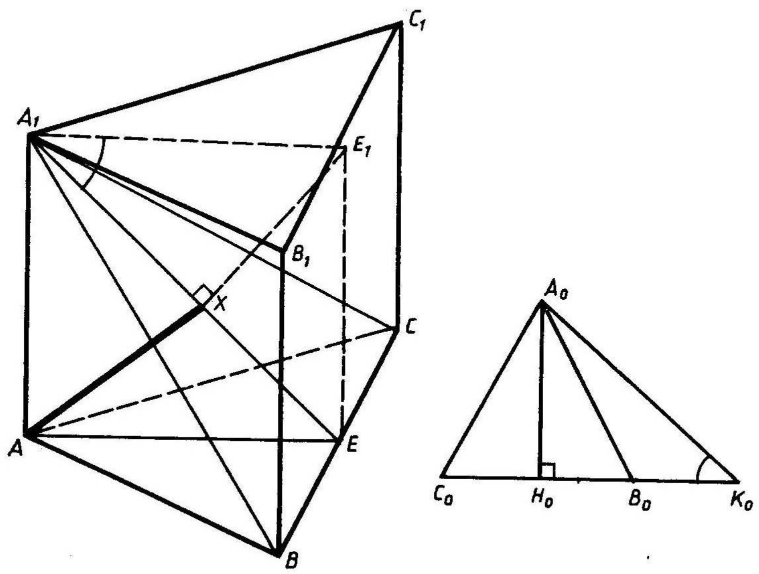
Рис. 80.



Задача 7.

Дано изображение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой равно стороне основания. Построить изображение перпендикуляра, проведенного из вершины A к плоскости A_1BC.

Решение. Рис. 81.



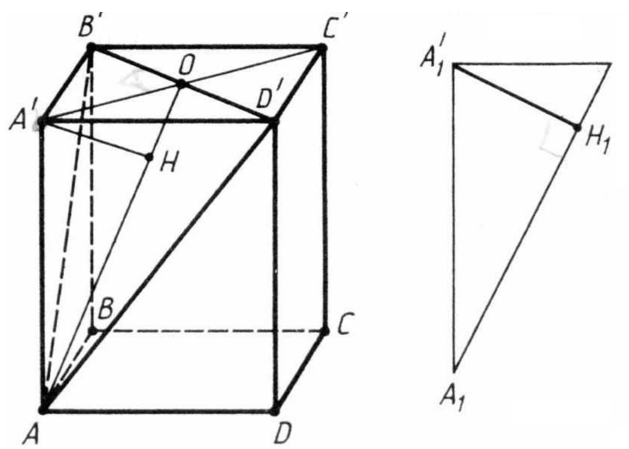
Обозначим через E середину ребра BC. Так как $BC \perp AE$ и $BC \perp A_1E$, то прямая BC перпендикулярна к плоскости AA_1E. Отсюда следует, что плоскость A_1BC перпендикулярна плоскости A_1AE. Таким образом, искомый перпендикуляр AX к плоскости A_1BC лежит в плоскости AA_1E и перпендикулярен к прямой A_1E, т.е. является высотой треугольника AA_1E.

Построим какой-нибудь равносторонний треугольник $A_0B_0C_0$ и проведем его высоту A_0H_0. Затем построим прямоугольный треугольник $A_0H_0K_0$ с прямым углом H_0 так, чтобы $H_0K_0=A_0B_0$ (рис. 81). Строим треугольник A_1EE_1 так, чтобы $\angle EA_1E_1=\angle A_0K_0H_0$, угол E_1 был прямым, и проводим высоту E_1X этого треугольника. Отрезок AX искомый.

Задача 8.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA^1B^1C^1D^1$, в основании которого лежит квадрат со стороной a, высота параллелепипеда $2a$. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A^1 на плоскость AB^1D^1.

Решение. Рис. 82.



Найдем плоскость, проходящую через A^1, которая перпендикулярна плоскости сечения AB^1D^1 (Рис. 82). Искомый перпендикуляр будет лежать в этой плоскости. В качестве такой плоскости удобнее всего выбрать плоскость AA^1C^1C. Таким образом, основание искомого перпендикуляра будет лежать на прямой AO пересечения этих плоскостей. Задача свелась к построению высоты A^1H прямоугольного треугольника AA^1O. Так как высота параллелепипеда равна $2a$, сторона AB основания-квадрата равна a, то из прямоугольного треугольника AA^1O получим: $A^1O=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $AA^1=2a$, $AO=\frac{3}{\sqrt{2}}a$. Таким образом, следует построить прямоугольный треугольник $A^1A^1{}_1O^1$ с катетами $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ и $2a$ (рис. 82), построить высоту $A^1{}_1H_1$ его прямого угла, затем разделить отрезок AO в отношении $A^1H^1{:}H^1O^1$, A^1H – изображение искомого перпендикуляра.

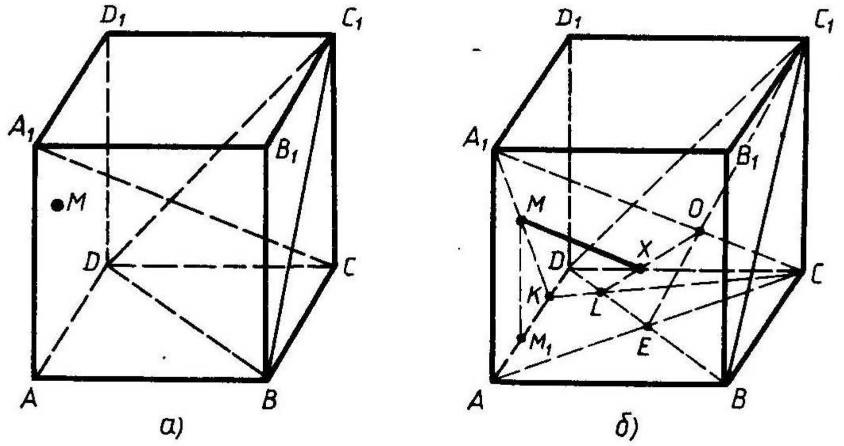
Задача 9.

Дан куб $ABCDA^1B^1C^1D^1$. Построить перпендикуляр, проведенный из точки M, лежащей на грани AA^1D^1, к плоскости BC^1D (рис. 83а).

Решение.

Пусть MX – искомый перпендикуляр. Заметим, что диагональ A^1C данного куба перпендикулярна к прямым BD, BC^1 и C^1D, поэтому прямая A^1C перпендикулярна к плоскости BC^1D (рис. 83а). Отсюда следует, что $MX \| A^1C$. Итак, для решения задачи достаточно провести через точку M прямую, параллельную прямой A^1C, и найти точку пересечения этой прямой с плоскостью BC^1D.

Рис. 83.



На рисунке 70б выполнено построение. Плоскость, проходящая через прямую A^1C и точку M, пересекает грани куба по отрезкам A^1K и KC (рис. 83б). Найдем линию пересечения плоскостей A^1KC и BC^1D. Для этого заметим, что точки $L=BD\cap KC$ и $O=A^1C\cap C^1E$, где $E=AC\cap BD$, лежат на этой прямой. Таким образом, X есть точка пересечения прямой OL с прямой, проведенной через точку M параллельно прямой A^1C.

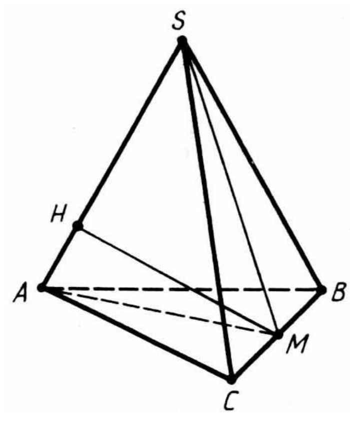
Задача 10.

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, боковое ребро которой в два раза больше ребра основания. Построить общий перпендикуляр ребер AS и BC.

Решение.

Ребра AS и BC перпендикулярны между собой. Поэтому существует плоскость, проходящая через первую прямую и перпендикулярная второй. Если M – середина отрезка BC, то такой плоскостью является плоскость AMS. Поэтому искомым перпендикуляром служит высота MH треугольника AMS. Изображение этой высоты и является искомым (рис. 84).

Рис. 84.



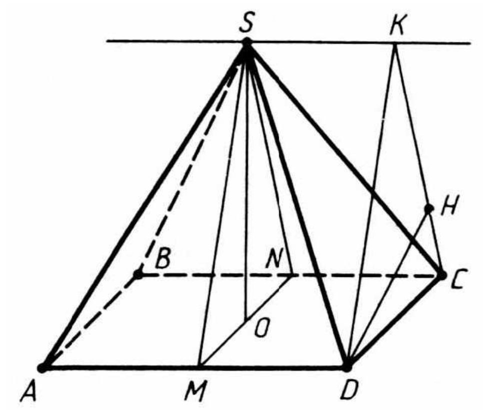
Задача 11.

Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, у которой ребро основания равно боковому ребру. Найти основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на грань BSC.

Решение.

Найдем плоскость, проходящую через точку D, перпендикулярную грани BSC (рис. 85). Тогда искомый перпендикуляр будет лежать в этой плоскости. Решение сводится к построению перпендикуляра, опущенного из точки D на линию пересечения грани BSC, и найденной перпендикулярной плоскости. Пусть M и N – середины ребер AD и BC, поэтому MN и BC перпендикулярны между собой. Плоскость MSN содержит высоту SO пирамиды. Прямая BC перпендикулярна плоскости MSN, следовательно, боковая грань BCS и плоскость MSN перпендикулярны между собой. Так как DC параллельна MN, то в качестве плоскости, проходящей через точку D и перпендикулярной грани BSC, можно взять плоскость, параллельную MSN. Для построения линии пересечения этих плоскостей проведем прямую SK, параллельную AD, DK, параллельную MS, и CK, параллельную NS. Тогда CK – искомая линия пересечения плоскостей. Задача свелась к построению высоты DH треугольника DKC. Треугольники DKC и MNS равны между собой. Если обозначить сторону основания a, то из условия следует, что $SD=a$. Из прямоугольного треугольника MSD получим $SM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Таким образом,

Рис. 85.



треугольник KCD равнобедренный, $DC=a$, $KD=KC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Построив треугольник, подобный оригиналу, проведем в нем высоту и определим, в каком отношении точка H делит сторону KC. Используя это отношение, построим точку H.

Задача 12.

Дано изображение куба. Изобразить общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей двух граней.

Решение.

Рассмотрим диагонали A_1B и B_1D_1 смежных граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (для параллельных граней решение тривиально). Очевидно, что плоскость CB_1D_1 параллельна прямой A_1B и содержит прямую B_1D_1. Для построения общего перпендикуляра данных прямых построим проекцию прямой A_1B на плоскость CB_1D_1, заметив, что прямая AC_1 перпендикулярна этой плоскости.

Задача 13.

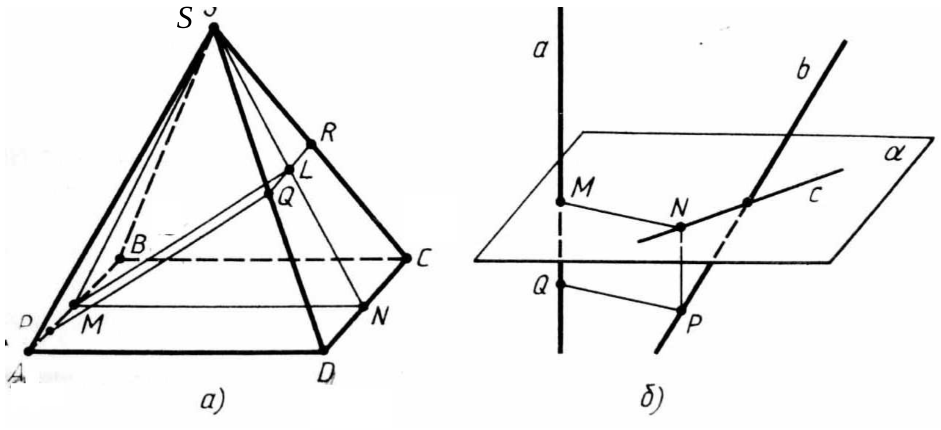
Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, у которой ребро основания равно апофеме боковой грани. Построить общий перпендикуляр ребра основания и скрещивающегося с ним бокового ребра.

Решение.

Боковое ребро AB не перпендикулярно ребру SD (рис. 86а). Поэтому для построения их общего перпендикуляра воспользуемся следующим способом. Пусть a и b – скрещивающиеся прямые (рис. 86б). Через точку M прямой a проведем плоскость α, перпендикулярную a. Прямая c – проекция b на плоскость α. Опустим перпендикуляр MN из точки M на прямую c. Прямая MN перпендикулярна a, так как лежит в плоскости α. По теореме о трех перпендикулярах MN образует прямой угол с b. Искомый общий перпендикуляр PQ параллелен MN. Для нахождения точки P проведем NP, параллельную a, $P\in b$. Для нахождения точки Q проведем прямую PQ, параллельную MN, $Q\in a$. PQ – искомый общий перпендикуляр.

Рассмотрим скрещивающиеся ребра AB и SD пирамиды (рис. 86а). Пусть M и N – середины сторон AB и DC. Тогда плоскость SMN перпендикулярна ребру AB. Так как DC перпендикулярно апофеме SN, то SN – проекция SD на плоскость SMN. Построим перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую SN. Так как по условию треугольник MSN равносторонний, то перпендикуляром является медиана ML этого треугольника. Через середину L апофемы SN проведем среднюю линию QR треугольника CSD. Прямая QR параллельна AB и пересекает SD в точке Q. Через точку Q проведем отрезок PQ, параллельный ML. Отрезок PQ – искомый общий перпендикуляр прямых AB и SD. Заметим, что точка P – середина отрезка AM. Аналогично можно построить общий перпендикуляр прямых AB и SC.

Рис. 86.

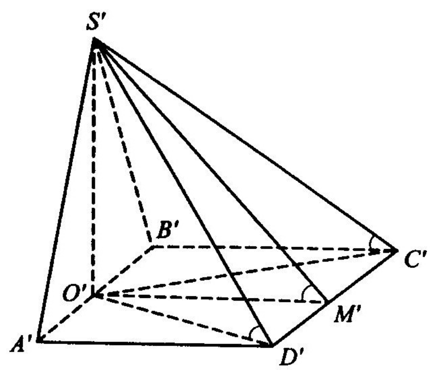


Задача 14.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, боковая грань SAB перпендикулярна плоскости основания и является равнобедренным треугольником, а боковые ребра SC и SD образуют каждое с плоскостью основания угол 45°. Построить линейный угол двугранного угла при ребре D.

Решение.

Рис. 87.



Пусть $S'A'B'C'D'$ - оригинал (рис. 87). Так как $S'A'B'\perp A'B'C'$, то высота пирамиды $S'O'\subset S'A'B'$, $S'O'$ - медиана равнобедренного треугольника $S'A'B'$, $O'D'$ -проекция $S'D'$ на плоскость основания, $O'C'$ - проекция $S'C'$, поэтому $\angle O'C'S'=\angle O'D'S'=45°$, тогда $S'C'=S'D'$, $O'C'=O'D'$, поэтому если M' - середина $C'D'$, то $O'M'\perp C'D'$, $S'M'\perp C'D'$, т.е. $\angle O'M'S'$ - искомый линейный угол.

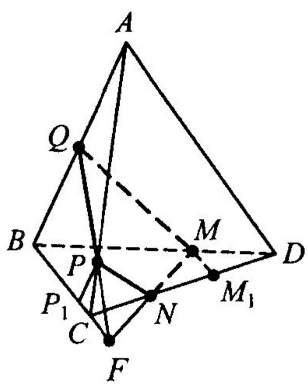
Построим O – середину AB, M – середину CD; угол $\angle OMS$ – искомый.

Задача 15.

Длина каждого ребра тетраэдра $ABCD$ равна a. На ребрах DA, DC и BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $DM=CN=a/3$, $CP=a/5$. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP и найти длину отрезка BQ, где $Q=AB\cap(MNP)$.

Решение.

Рис. 88.



Построение сечения пирамиды плоскостью MNP проводим следующим образом. Строим точку F, $F=AC\cap MN$; точку Q, $Q=AB\cap FP$. $MNPQ$ – сечение данного тетраэдра плоскостью MNP (рис. 88).

Так как $\Delta MM_1N=\Delta FCN$, где $MM_1\|AC$, то $CF=MM_1=DM=a/3$.

Далее, $\Delta FP_1P\sim\Delta FAQ$, где $PP_1\|AB$. Отсюда следует: $\dfrac{AQ}{\frac{1}{5}a}=\dfrac{\frac{4}{3}a}{\frac{a}{5}+\frac{a}{3}}$,

$AQ=\dfrac{a}{2}$. Тогда $BQ=\dfrac{a}{2}$.

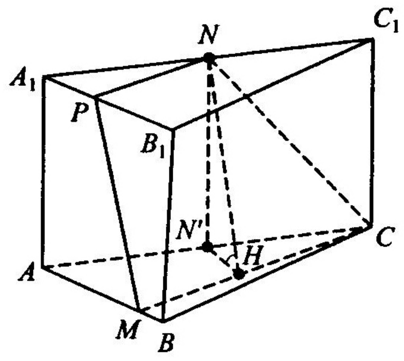
Ответ: $a/2$.

Задача 16.

Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 1 см. Точка M выбрана на ребре AB так, что $AM=2MB$. N – середина ребра A_1C_1. Через точки C, M и N проведена секущая плоскость. Найти угол между секущей плоскостью и плоскостью основания.

Решение.

Рис. 89.



Точка N лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, параллельной плоскости ABC, поэтому в этой плоскости проведем через точку N прямую, параллельную MC (рис. 89). Получим точку P такую, что $A_1P:PB_1=1:2$ (теорема Фалеса). Чтобы построить линейный угол двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью основания, достаточно провести $N^1H\perp MC$, где N^1 – проекция точки N. По теореме о трех перпендикулярах $\angle NHN^1$ искомый.

$tg\angle NHN^1=\dfrac{NN^1}{N^1H}$. Найдем $N^1H=h$. Очевидно, что

$2\cdot S_{\Delta AMC}=2h\cdot MC=AC\cdot AM\cdot sin60°=1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов

$MC^2=MA^2+AC^2\text{-}2MA\cdot AC\cdot cos60°=\dfrac{4}{9}+1\text{-}2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{9}$; $MC=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

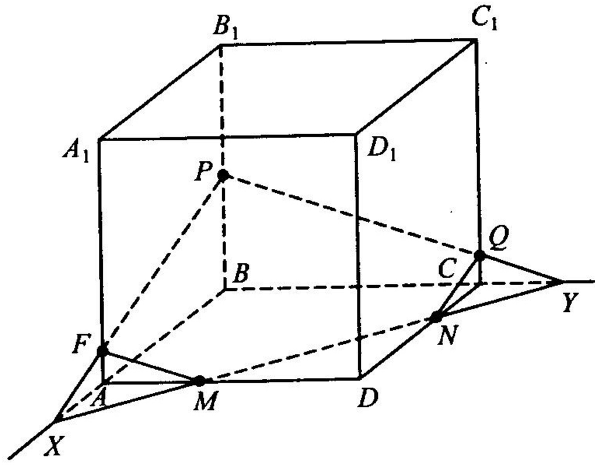
Тогда $h=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3}{2\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$; $tg\angle NHN^1=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Задача 17.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину P ребра BB_1 и точки M и N, лежащие соответственно на ребрах AD и DC, причем $AM:MD=CN:ND=1:2$, проведена секущая плоскость. В каком отношении она разделит объем куба?

Решение.

Рис. 90.



Построение сечения проведем методом следов (рис. 90). Заметим, что $\Delta XAM=\Delta YCN$, $AX=CY=\dfrac{1}{3}a$, где a – длина ребра куба.

$AF=CQ=\dfrac{1}{8}a$.

Пусть V_1 – объем фигуры, расположенной под секущей плоскостью.

$V_1= V_{PBXY}– V_{FXAM} – V_{QCNY}=$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(PB\cdot BX\cdot BY – 2AF\cdot AX\cdot AM)=$

$=\dfrac{1}{6}\cdot(\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{4}{3}a\cdot\dfrac{4}{3}a - 2\cdot\dfrac{1}{8}a\cdot\dfrac{1}{3}a\cdot\dfrac{1}{3}a)=\dfrac{1}{6}a^3\cdot\dfrac{31}{36}=\dfrac{31}{216}a^3$.

Тогда объем фигуры, расположенной над секущей плоскостью, равен $a^3 - \dfrac{31}{216}a^3=\dfrac{185}{216}a^3$. Отношение объемов равно 31:185.

Постановка домашнего задания.

1) Построить в плоскости XOY квадрат, стороны которого равны двум единицам длины, и одна из них по направлению совпадает с данной прямой PQ.

2) Дана правильная четырехугольная пирамида, у которой ребро основания равно апофеме боковой грани. Построить общий перпендикуляр ребра основания и скрещивающегося с ним бокового ребра.

3) Даны изображения правильного тетраэдра $ABCD$ и точки P на его грани ABD. Изобразить перпендикуляр, опущенный из точки P на грань BCD.

4) Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, сторона основания которой равна боковому ребру. Пусть M и N – середины ребер DC и AS. Построить общий перпендикуляр прямых:

а) SM и BD;

б) SM и DN.

5) Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середину диагонали перпендикулярно этой диагонали.

Подведение итогов занятия.

Подготовиться к контрольной работе.