Практическое занятие №7

Тема: **Позиционные задачи. Построение сечений многогранников**

План

1. Построение сечений многогранников методом следов.
2. Построение сечений многогранников методом внутреннего проецирования.
3. Построение сечений многогранников комбинированным методом.

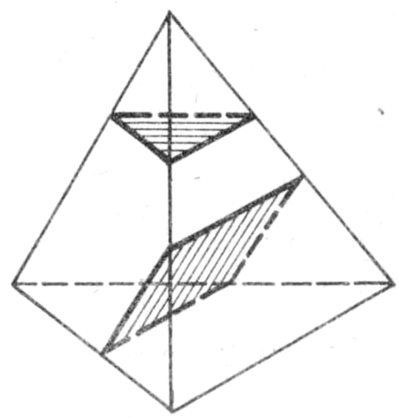
Актуализация базовых знаний.

В школьном курсе геометрии важное место занимают *задачи на сечения,* т.е. задачи, в которых требуется построить изображения точек пересечения двух заданных фигур. Задачи на сечения являются частным случаем позиционных задач.

Теорема. На полных изображениях можно построить сечения призм, пирамид, цилиндров и конусов плоскостью.

Плоскость называется *секущей плоскостью* многогранника, если по обе стороны от этой плоскости имеются точки данного многогранника.

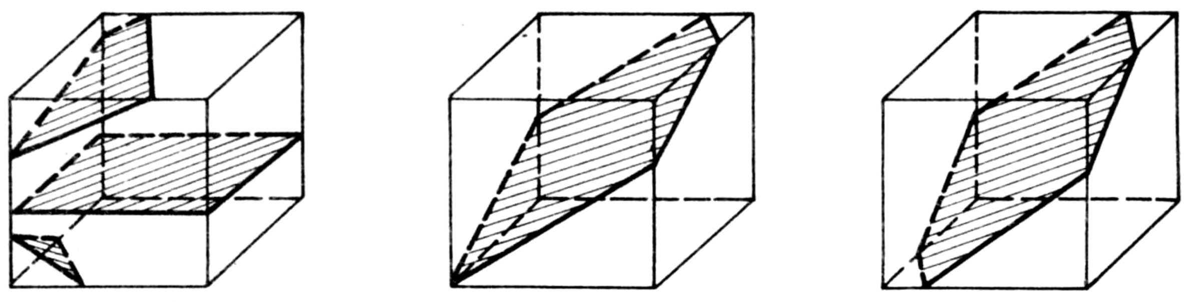
Рис. 62.



Многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника, называется *сечением* многогранника. Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 62).

Параллелепипед имеет шесть граней, поэтому его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис. 63).

Рис. 63.



Итак, задача состоит в построении пересечения двух фигур: многогранника и плоскости. Это могут быть: пустая фигура (а), точка (б), отрезок (в), многоугольник (г). Если пересечение многогранника и плоскости есть многоугольник, то этот многоугольник называется сечением многогранника плоскостью.

а***) Метод следов*** заключается в построении следов секущей плоскости на плоскость каждой грани многогранника. Построение сечения многогранника методом следов обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника *(выводится на экран).*

б) ***Метод вспомогательных сечений*** построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются “скученными”. Тем не менее, в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.

Метод следов и метод вспомогательных сечений являются разновидностями аксиоматического метода построения сечений многогранников плоскостью.

в) Суть ***комбинированного метода*** построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Для достижения полноты изображения точки M' применяют так называемый *метод внутреннего проектирования*. Он состоит в следующем. Точку M' оригинала проектируют из какой-нибудь точки (при центральном проектировании) или параллельно какой-нибудь прямой (при параллельном проектировании) на некоторую вспомогательную плоскость. Эту плоскость называют *основной*, или *плоскостью оснований*, а само проектирование *внутренним*. Затем применяют метод аксонометрического проектирования и строят аксонометрическую (M) и вторичную (M_0) проекции точки M'. Тогда изображение точки M' становится полным.

Примеры применения данного метода внутреннего проектирования к точкам пирамиды и призмы приведены на рисунках 64, 65 соответственно.

Рис. 64.

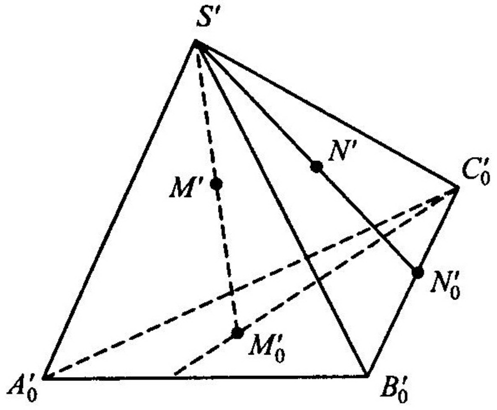
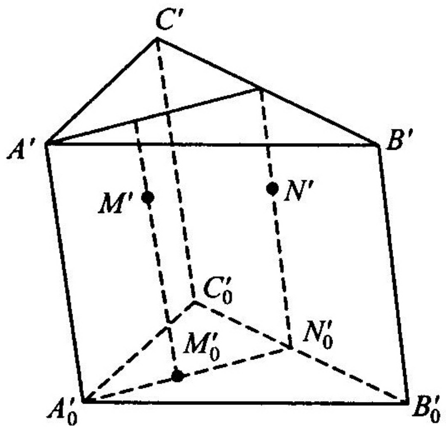


Рис. 65.



Решение задач.

Вся группа студентов делится на 4-5 подгрупп. Каждой группе дается раздаточный материал (заранее подготовленные шаблоны пространственных фигур).

Они выполняют задание № 1– решение базовых задач на построение сечений фигур, следуя правилам:

1. Если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проведенная через эти точки, является линией пересечения этих плоскостей.
2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны
3. Общая точка трех плоскостей (вершина трехгранного угла) является общей точкой линий их парного пересечения (ребер трехгранного угла).
4. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает ее, то линия пересечения параллельна данной прямой.
5. Если прямая лежит в плоскости сечения, то точка ее пересечения с плоскостью грани многогранника является вершиной трехгранного угла, образованного сечением, гранью и вспомогательной плоскостью, содержащей данную прямую.*(все эти правила находятся на столе у каждой группы)*

Студенты решают в течение 10 минут затем выясняем трудности, которые возникли в ходе решения поставленной задачи. Студенты сверят свои решения между собой и находят наиболее верный из ответов всей группы. В то же время, по одному человеку от группы иллюстрируют пример решения своей задачи. А преподаватель при помощи мультимедиапроектора иллюстрирует верное решение. Сравнивают.

Алгоритм построения сечения методом следов

(выводится на экран и лежит у каждой группы на столе)

1. Выяснить имеются ли в одной грани две точки сечения (если да, то через них можно провести сторону сечения).
2. Построить след сечения на плоскости основания многогранника.
3. Найти дополнительную точку сечения на ребре многогранника (продолжить сторону основания той грани, в которой есть точка сечения, до пересечения со следом).
4. Через полученную дополнительную точку на следе и точку сечения в выбранной грани провести прямую, отметить точки пересечения её с рёбрами грани.
5. Выполнить п.1.

Выполняют задание №2. Получают набор листов с заданиями и рисунками
Теперь, решив свое задание, студенты одной подгруппы дают его на проверку другой подгруппе. По часовой стрелке.

Алгоритм построения сечения методом внутреннего проецирования.

1. Построить вспомогательные сечения и найти линию их пересечения.
2. Построить след сечения на ребре многогранника.
3. Если точек сечения не хватает для построения самого сечения повторить пп.1-2.

Построение сечения методом внутреннего проецирования.

Этот метод является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются «скученными». Тем не менее, в некоторых случаях метод внутреннего проектирования оказывается наиболее рациональным.

Комбинированный метод

Суть метода состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом. Применяется для построения сечения многогранника с условием параллельности.

Построение сечения многогранника плоскостью α, проходящей через заданную прямую p параллельно другой заданной прямой q.

1. Через вторую прямую q и какую-нибудь точку W первой прямой p провести плоскость β.
2. В плоскости β через точку W провести прямую q‘ параллельную q.
3. Пересекающимися прямыми p и q‘ определяется плоскость α.
4. Непосредственное построение сечения многогранника плоскостью α.

Задача 1.

Даны треугольная призма $ABCA^1B^1C^1$ и точки M, N, P, расположенные соответственно на ребрах AA^1, A^1B^1 и грани BB^1C^1C. Построить сечение призмы плоскостью MNP.

Решение.

Пусть $ABCA^1B^1C^1$ – изображение данной призмы (рис. 66), а M, N и P – данных точек. Присоединим к данному изображению репер $\{A,B,C,A^1\}$. Тогда A – вторичная проекция точки M на плоскость ABC. Построим изображение прямой пересечения секущей плоскости с плоскостью основания ABC. Для этого построим вторичные проекции N_3 и P_3 точек N и P и найдем точки R и S пересечения прямых MN и NP с плоскостью ABC как точки пересечения прямых MN и AN_3, PN и P_3N_3.

Прямая RS представляет собой прямую пересечения плоскостей MNP и ABC. Прямая RS пересекает ребра AC и CB в точках K и T. Прямая TP пересекает ребро C^1B^1 в точке L. Пятиугольник $KMNLT$ является искомым сечением.

Рис. 66.

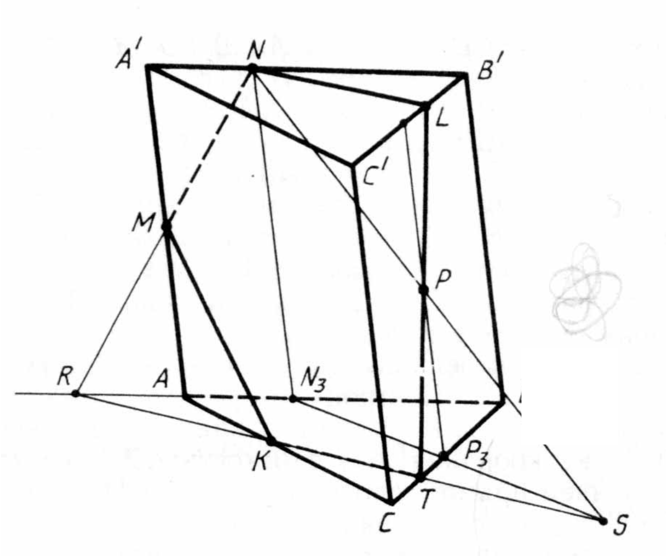
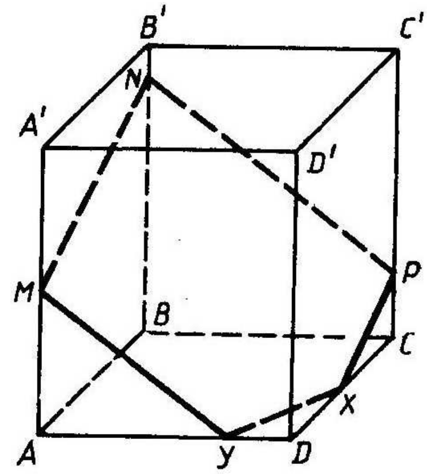


Рис. 67.



адача 2.

ано изображение параллелепипеда $ABCDA^1B^1C^1D^1$ и точек M, N, P, лежащих соответственно на ребрах AA^1, BB^1, CC^1 (рис.67). Построить сечение параллелепипеда плоскостью MNP.

Решение.

Отрезки MN и NP, очевидно, являются двумя сторонами искомого сечения. Найдем остальные стороны. Так как грани ABB^1A^1, DCC^1D^1 параллелепипеда параллельны, то прямая, проходящая через точку P параллельно прямой MN, лежит в плоскости грани DCC^1D^1, поэтому легко построить точку X пересечения плоскости MNP с ребром CD: $X=CD\cap PX$, где $PX||MN$. Аналогично строим точку $Y=AD\cap MY$, где $MY||NP$. Искомым сечением является пятиугольник $MNPXY$ (рис. 67).

Задача 3.

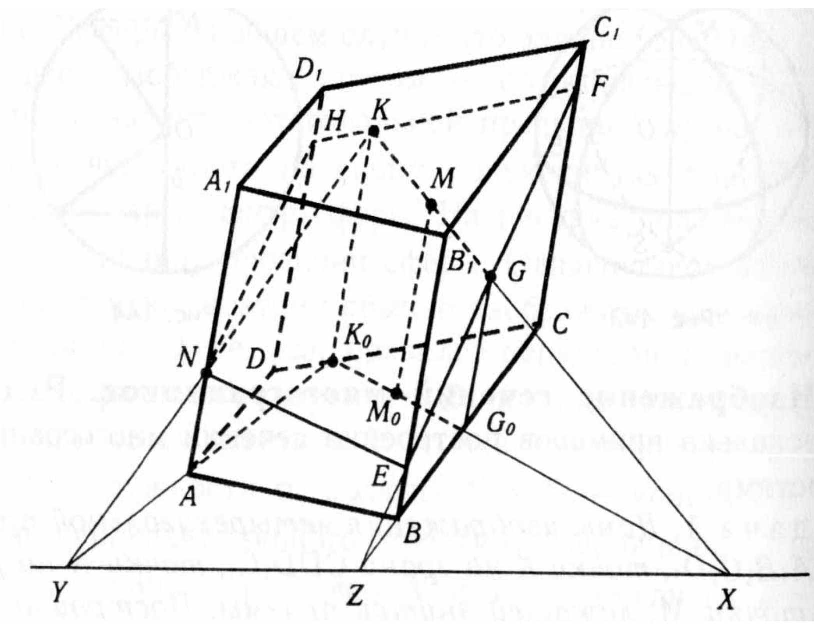
Дано изображение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки K на грани CDD_1C_1, точки N на ребре AA_1 и точки M, лежащей внутри призмы (рис.68,69). Построить сечение этой призмы плоскостью MNK.

Решение.

I способ (метод следов).

Проведем прямую KK_0, параллельную боковым ребрам призмы (рис. 68). K_0 – точка пересечения этой прямой с ребром CD. Прямые KM и K_0M_0 лежат в одной плоскости, и поэтому точка X, в которой пересекаются их изображения, изображает точку пересечения. Точно также построим точку Y – пересечение прямых KN и K_0A. Прямые KN и KM лежат на плоскости KMN, следовательно, точки X и Y лежат на этой плоскости и прямая XY есть искомый след. На гранях призмы даны точки K и N. Кроме того, можно най-

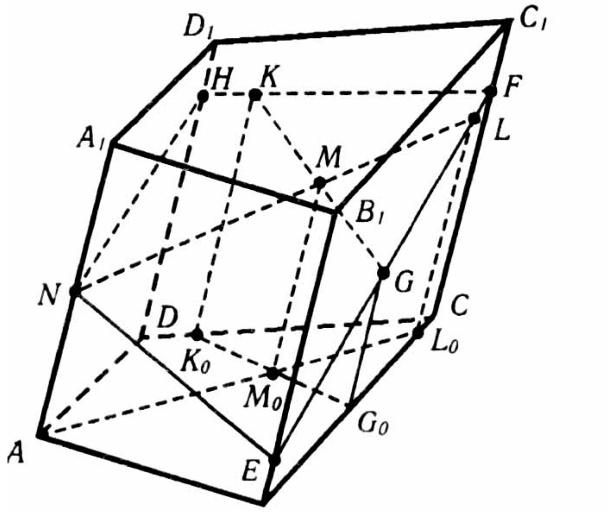
Рис. 68.



ти пересечение прямой KM с плоскостью грани BCC_1B_1. Действительно, обозначим через G_0 пересечение прямых K_0M_0 и BC. Через точку G_0 проведем прямую, параллельную боковым ребрам призмы (эта прямая лежит на плоскости BCC_1B_1). Ее пересечение G с прямой KM есть искомая точка. Обозначим через Z точку пересечения прямых BC и XY. Прямая ZG есть пересечение плоскостей KMN и BCC_1B_1. Точки E и F – точки пересечения плоскости KMN с боковыми ребрами BB_1 и CC_1, так как они представляют собой точки пересечения прямой ZG с этими ребрами. Проведем прямую FK, получим точку H на ребре DD_1.

Четырехугольник $EFHN$ – искомое сечение.

Рис. 69.



II способ (метод внутреннего проецирования).

Обозначим пересечение прямой K_0M_0 с ребром BC через G_0 (рис. 69). Через эту точку проведем прямую, параллельную боковым ребрам, и точку ее пересечения с прямой KM обозначим G. Точно так же при помощи прямых AM_0 и NM построим точку L. Точки G и L лежат на пересечении плоскостей KMN и BCC_1B_1. Прямая GL пересекает ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках E и F. Проводя прямые EN и FK, получим четырехугольник $EFHN$ – искомое сечение.

Задача 4.

Дано изображение треугольной пирамиды $ABCD$ и точек M, N, P, принадлежащих граням ACD и CBD и основанию ABC. Построить сечение пирамиды плоскостью MNP.

Решение.

Присоединим к данному изображению репер $\{A,B,C,D\}$ (рис. 70). Построим вторичные проекции M_3, N_3, P_3 данных точек M, N, P. Точка P совпадает со своей вторичной проекцией P_3 на координатную плоскость ABC. Точка M_3 является пересечением прямой, проходящей через M параллельно AD, с ребром AC. Для построения N_3 следует воспользоваться вспомогательной задачей. Затем определяем точку F пересечения прямой MN и плоскости ABC, которая является точкой пересечения прямых M_3N_3 и MN. Так как точки P и F принадлежат секущей плоскости, то прямая PF представляет собой линию пересечения секущей плоскости и основания ABC. Q и T – точки пересечения PF с ребрами AC и BC. Соединим их с точками M и N, найдем точки R и S пересечения QM и TN с ребрами AD и BD. Четырехугольник $QRST$ искомый.

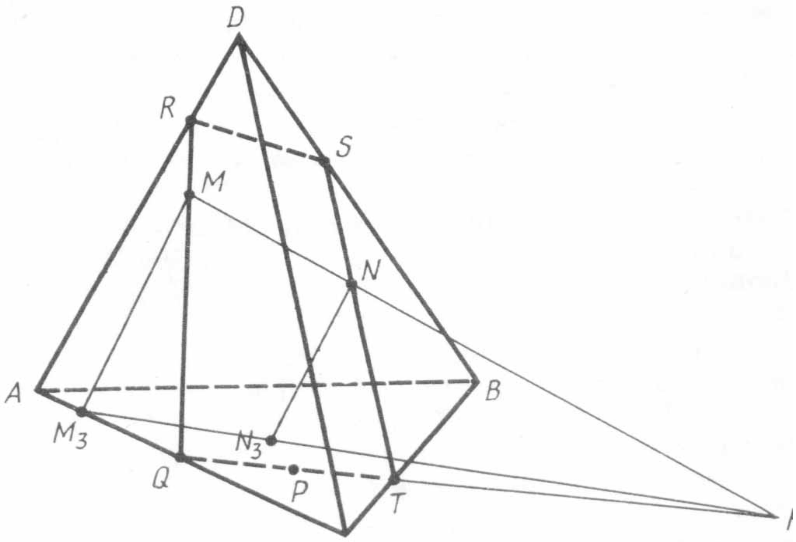


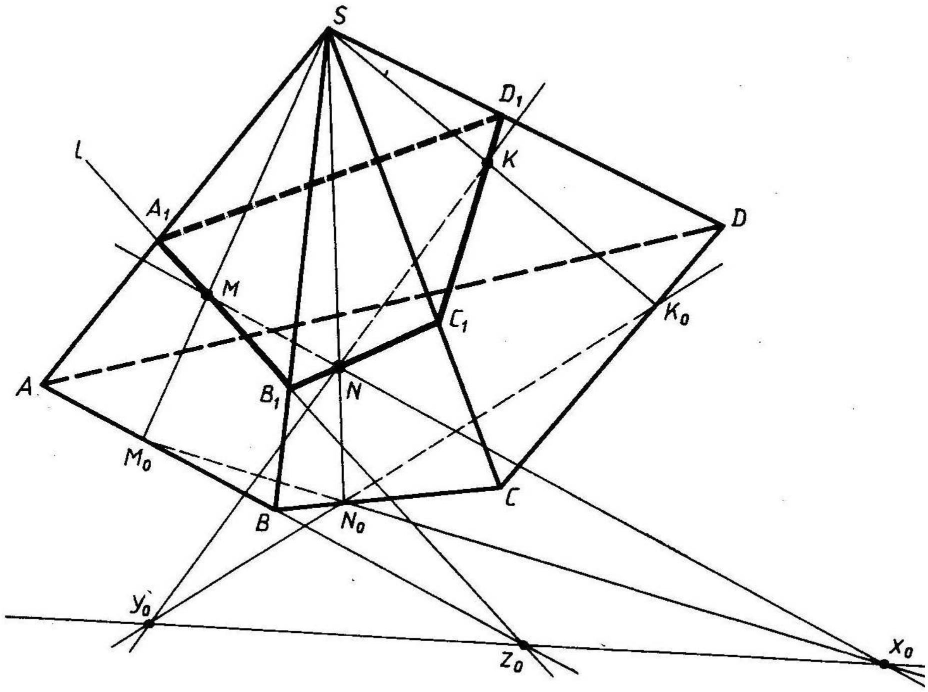
Рис. 70.

Задача 5.

Дано изображение четырехугольной пирамиды $SABCD$ и точек M, N, K, лежащих соответственно на гранях ABS, BCS и CDS (рис. 71). Построить сечение этой пирамиды плоскостью MNK.

Решение Рис. 71.

Построим сначала след плоскости MNK на плоскости основания пирамиды, не пользуясь вторичными проекциями этих прямых. Для этого предварительно построим следы прямых MN и NK. На рисунке 71 X_0 – след прямой MN, а Y_0 – след прямой NK. Таким образом, прямая X_0Y_0 – след плоскости MNK.



Пусть l – прямая по которой пересекаются плоскости MNK и ABS. Ее вторичной проекцией является, очевидно, прямая AB. Поэтому следом этой прямой является точка $Z_0=AB\cap X_0Y_0$. Отсюда следует, что прямая l проходит через точки Z_0 и M, т.е. совпадает с прямой MZ_0. Она пересекает ребра SA и SB соответственно в точках A_1 и B_1. Таким образом, плоскость MNK пересекает грань ABS по отрезку A_1B_1. Затем, используя точки N и K, строим последовательно отрезки B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1. Искомое сечение – четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$.

Замечание. При решении этой задачи для построения сечения пирамиды мы воспользовались следом секущей плоскости на плоскости основания пирамиды. Этот метод часто применяется при построении сечений многогранников.

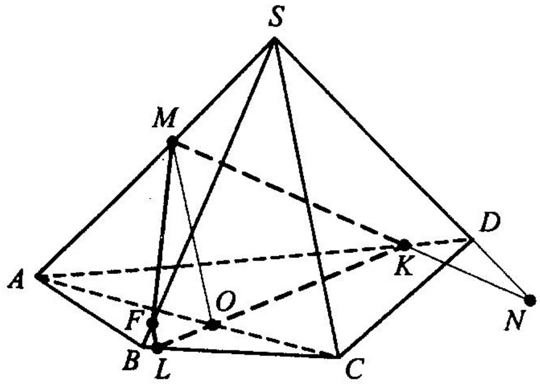
Задача 6.

Построить сечение четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельной прямой SC, если точка M принадлежит ребру AS, точка N – продолжению ребра SD. Рис. 72.

Решение.

Построение:

1) $MN\cap AD=K$;
2) $MO\|SC$, $O\in AC$;
3) $OK\cap CB=L$;
4) $LF\|SC$, $F\in SB$;
5) $MKLF$ – искомое сечение (рис. 72).



Задача 7.

Построить сечение пятиугольной пирамиды $ABCDES$ плоскостью, проходящей через диагональ BE основания параллельно боковому ребру SC.

Решение.

Анализ.

Пусть α - секущая плоскость. Любая плоскость, проходящая через *SC* и пересекающая α, пересекает ее по прямой, параллельной *SC*. Рассмотрим в качестве вспомогательной плоскости *ASC*. Обозначим прямую пересечения плоскостей *ASC* и α через *l*. Тогда *l* параллельна *SC*. Плоскость *ASC* пересекает прямую *BE* в точке *O*, а поэтому *O* принадлежит *l*. Таким образом, плоскость α определена двумя пересекающимися в точке *O* прямыми: *BE* и *l*, параллельной *SC* (рис. 73).

Построение очевидно.

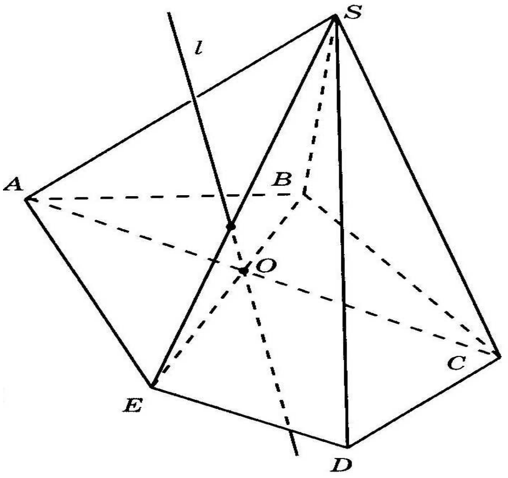


Рис. 73.

<u>Постановка домашнего задания.</u>

1) Дано изображение четырехугольной пирамиды *ABCDS*. Построить сечение плоскостью, заданной тремя точками, изображения которых принадлежат:

- ребру *AS* и граням *BCS* и *ASB*;
- ребру *AS* и граням *BSC* и *CSD*;
- основанию *ABCD* и граням *BSC* и *ASB*.

2) Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построить сечение призмы плоскостью, определяемой точками, принадлежащими:

- ребрам AA_1, BB_1 и CC_1;
- основанию *ABCD*, ребру AA_1 и грани AA_1B_1B.

<u>Подведение итогов занятия.</u>

Подгруппы оценивают друг друга. Идет обсуждение ошибок. Студенты записывают тему следующего практического занятия.