<u>МОДУЛЬ 3.</u> *МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

<u>Практическое занятие №5</u>

Тема: **Параллельное проецирование**

План

1. Построение плоских фигур в параллельной проекции.
2. Построение пространственных фигур в параллельной проекции.

<u>Актуализация базовых знаний.</u>

Если центр проектирования S – собственная точка пространства, то проектирование π называется *центральным*, а если центр проектирования несобственный, то проектирование называется *параллельным* (все проектирующие прямые (SM') будут принадлежать связке параллельных прямых). Несобственная точка $S\in \overline{E}^3$ в этом случае определяет в пространстве E^3 направление. Это направление определяется заданием какой-нибудь собственной прямой и называется *направлением проектирования*.

<u>Свойства</u> параллельного проектирования плоскости на плоскость выражены в следующих теоремах.

Теорема 1. При параллельном проектировании плоскости проекцией прямой является прямая, проекцией отрезка – отрезок, проекцией луча – луч; параллельные прямые проектируются в параллельные прямые.

*Теорема 2***.** При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой (а значит, и простое отношение точек прямой) или на параллельных прямых.

Теорема 3. Параллельное проектирование является перспективно-аффинным преобразованием (а значит, обладает и всеми его свойствами).

Изображение в параллельной проекции некоторых геометрических фигур.

1. <u>Треугольник.</u> Изображением данного треугольника может служить любой треугольник плоскости.

2. <u>Четырехугольник.</u> Изображением четырехугольника $A'B'C'D'$ служит такой четырехугольник $ABCD$, что: $(AC,E)=(A'C',E')$, $(BD,E)=(B'D',E')$, (1)
где E' - точка пересечения диагоналей четырехугольника-оригинала.

В частности:

а) <u>Трапеция-</u>оригинал изображается трапецией, причем для точек пересечения диагоналей оригинала и изображения выполняется соотношение (1).

б) <u>Параллелограмм</u> (включая ромб, прямоугольник, квадрат) изображается в виде некоторого параллелограмма.

3. <u>n-угольник.</u> При изображении данного в пространстве n-угольника достаточно знать изображения каких-либо трех его вершин. Изображения остальных вершин можно найти, согласно теореме 4, построением с учетом свойств параллельного проектирования.

4. <u>Окружность.</u> Изображением окружности является эллипс, причем перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами этого эллипса.

5. <u>Призма.</u> Изображение призмы представляет собой фигуру, состоящую из нескольких параллелограммов (столько, сколько боковых граней имеет призма) и двух конгруэнтных многоугольников (один получается из другого параллельным переносом). Основания призмы изображаются с учетом сказанного выше о проекциях плоских многоугольников (рис. 28).

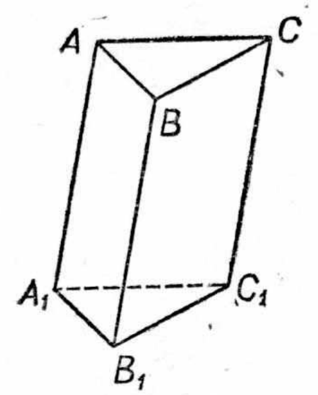
6. <u>Пирамида.</u> Изображением пирамиды является фигура, состоящая из многоугольника, изображающего основание пирамиды-оригинала, и нескольких треугольников с об-

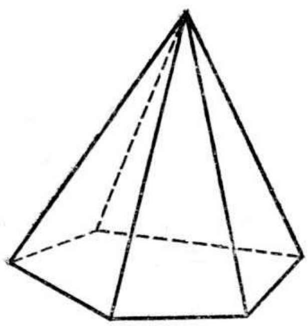
щей вершиной, изображающих боковые грани пирамиды. Изображение основания строится с учетом сказанного выше о проекциях плоских многоугольников (рис. 29).

7. Цилиндр. При построении изображения цилиндра направление проектирования следует выбирать не параллельным ни плоскости основания, ни образующим, иначе проекция будет либо прямоугольником, либо кругом и изображение не будет наглядным. Основания цилиндра изображаются эллипсами, а образующие, ограничивающие изображение цилиндра, изображаются параллельными отрезками, которые лежат на касательных к эллипсам-изображениям оснований и имеют концы на этих эллипсах (рис. 30).

8. Конус. При построении изображения конуса направление проектирования следует выбирать не параллельным ни плоскости основания, ни высоте, иначе проекция будет либо треугольником, либо кругом и изображение не будет наглядным. Основание конуса изображается эллипсом, а образующие, ограничивающие изображение конуса, изображаются отрезками, которые лежат на касательных к эллипсу-изображению основания, выходящих из вершины, и имеют другие концы на этом эллипсе (рис. 31).

Рис. 28. Рис. 29 Рис. 30 Рис. 31





9. Шар. Для обеспечения наглядности сферу следует изображать в ортогональной проекции. Изображение сферы (рис. 6)состоит из следующих элементов:

- окружности, служащей *очертанием*;
- эллипса, касающегося изнутри окружности-очертания в концах своей большой оси, который изображает *экватор* (окружность большого диаметра сферы);
- точек, лежащих на прямой, перпендикулярной большой оси эллипса-изображения экватора, и симметричных относительно центра окружности, которые изображают *полюсы* (точки пересечения сферы и диаметра, перпендикулярного к плоскости экватора).

Решение задач.

Пример 1.

Построить изображение квадрата, если даны изображения описанной вокруг него окружности, ее центра O и одной из его вершин.

Решение.

Изображением окружности является эллипс, вписанного в нее квадрата – параллелограмм, взаимно перпендикулярных диаметров окружности – сопряженные диаметры эллипса (рис. 32). Точка A является изображением вершины A'. Противоположная ей вершина C' изображается точкой C, симметричной А относительно центра O. Для того, чтобы найти изображение двух других вершин квадрата, следует построить диаметр эллипса, сопряженный AC. Сопряженный диаметр является множеством середин всех хорд, параллельных AC. Построим такую хорду MN, найдем ее середину K, проведем искомый сопряженный диаметр OK. Его точки пересечения B и D с эллипсом являются изображениями остальных вершин квадрата.

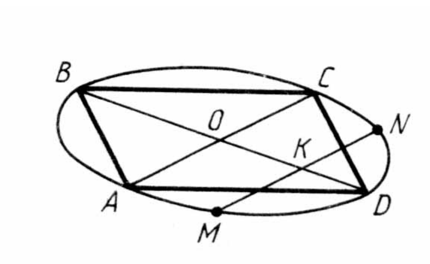


Рис.32.

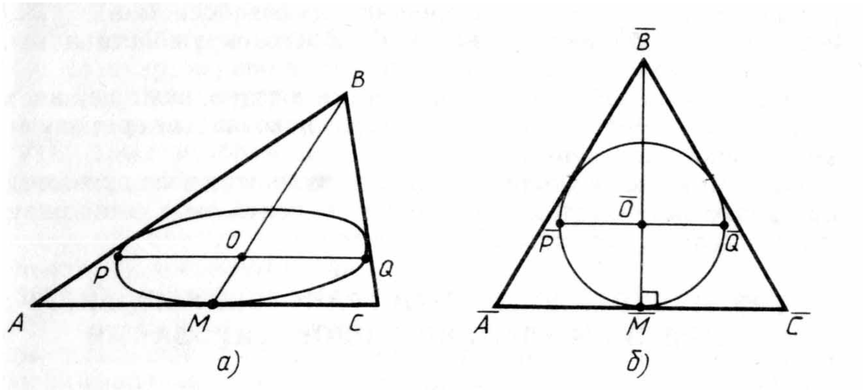


Рис. 33.

Пример 2.

Дано изображение окружности вместе с выбранной на ней точкой. Построить изображение равностороннего треугольника, описанного вокруг окружности, если эта точка является точкой касания окружности и стороны треугольника.

Решение.

Изображение окружности представляет собой эллипс, а равностороннего треугольника – произвольный треугольник. Так как фигура и ее изображение аффинно-эквивалентны, то центр эллипса O делит медиану BM (рис. 33а) в том же отношении, что и центр O' окружности, вписанной в оригинал (Рис. 33б), высоту $B'M'$, т.е. в отношении 1:2. Таким образом, для построения изображения B вершины B' следует на прямой MO отложить от точки O удвоенный отрезок OM. Затем построим диаметр PQ, сопряженный MO, определим точки P и Q – изображения концов P' и Q' диаметра окружности, параллельного основанию AC треугольника. В аффинно-эквивалентных фигурах отношения параллельных отрезков равны между собой. Поэтому если C- изображение вершины C', то $MC{:}OQ= M'C'{:}O'Q'=\sqrt{3}$. Используя эти соотношения, построим отрезок MC, затем точки A и C.

Треугольник ABC искомый.

Пример 3.

Дано изображение равнобедренного треугольника, высота которого равна основанию. Изобразите высоты этого треугольника и центр описанного круга.

Решение.

Пусть ABC – изображение равнобедренного треугольника $A'B'C'$, в котором $A'C'$ - основание, $B'H'$ - высота, проведенная к этому основанию, равная $A'C'$ (рис.34а). Рассмотрим треугольник $A'B'C'$ (рис. 34б) и построим его высоту $A'K'$, а также центр описанной окружности – точку O', проведя серединный перпендикуляр $O'P'$ отрезка $B'C'$. Ясно, что прямые $A'K'$ и $P'O'$ параллельны, поэтому для изображения $O'P'$ (и точки O) достаточно изобразить прямую $A'K'$.

Параллельное проектирование сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой, поэтому для построения точки K – изображения точки K' - достаточно разделить отрезок BC в том же отношении, в котором точка K' делит отрезок $B'C'$ (например, используя теорему Фалеса, рис. 34в).

Изображение серединного перпендикуляра к отрезку $B'C'$ параллельно AK.

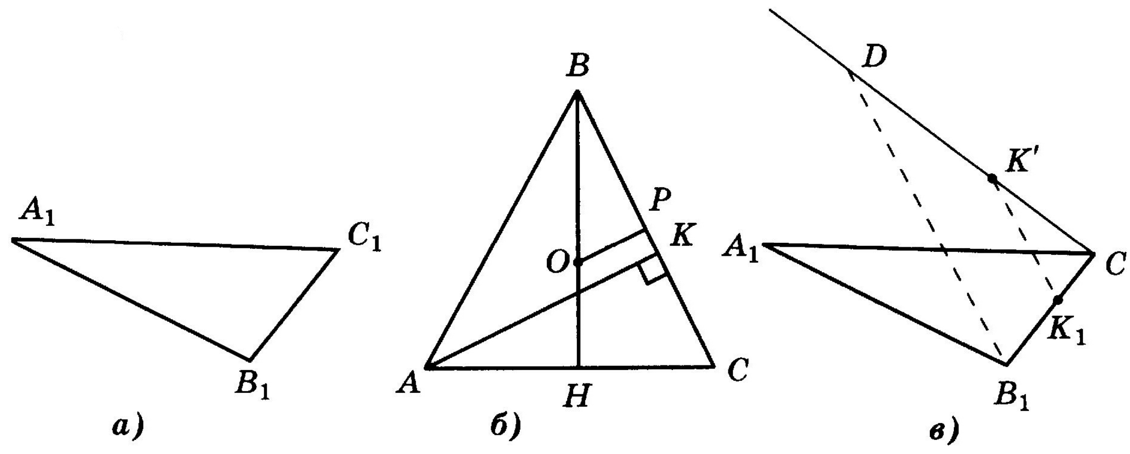


Рис. 34.

Пример 4.

Даны изображения вершин A, B, C и A' параллелепипеда $\overline{ABCDA'B'C'D'}$. Построить изображения остальных вершин.

Решение.

Основания и боковые грани параллелепипеда изображаются параллелограммами. Поэтому для построения изображения вершины D следует найти точку пересечения прямых, проходящих через точки A и C и соответственно параллельных BC и AB. Аналогично строятся изображения остальных вершин (самостоятельно).

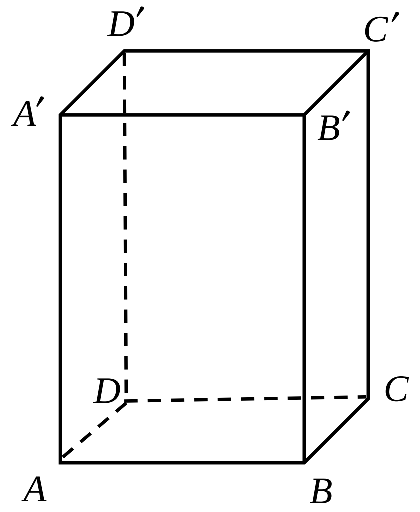


Рис. 35.

Пример 5.

Дано изображение очертания Q шара, его экватора $Q_1{}'$ и полюсов N' и S'. Построить изображение меридиана $Q_2{}'$, если даны изображения M и L его точек пересечения с экватором.

Решение.

Из условия задачи следует, что плоскость меридиана $Q_2{}'$ пересекает плоскость экватора $Q_1{}'$ по прямой $M'L'$, $M',L' \in Q_1{}'$ (рис. 36). Тогда отрезки ML и NS изображают перпендикулярные диаметры окружности круга $Q_2{}'$ и, следовательно, являются сопряженными диаметрами эллипса Q_2, изображающего меридиан. Эллипс Q_2 можно построить, зная его сопряженные диаметры ML и NS. Обычно его вычерчивают от руки, учитывая, что он проходит через точки M, L, N, S и через свои вершины, которые легко найти. Для этого проведем диаметр HG эллипса Q_1, сопряженный диаметру ML (рис. 36). В оригинале диаметр $H'G'$ шара F' перпендикулярен плоскости меридиана $Q_2{}'$ и, значит, точки H и G изображают полюсы большого круга $Q_2{}'$. Зная изображения полюсов большого круга $Q_2{}'$, известным способом можно найти оси XY и UV эллипса Q_2 (рис. 36). Теперь нам известны восемь точек эллипса Q_2, причем этот эллипс симметричен относительно прямых XY и UV

и в точках X и Y касается окружности Q. Это позволяет с достаточной для школьной практики точностью вычертить эллипс Q_2 от руки.

Рис. 36

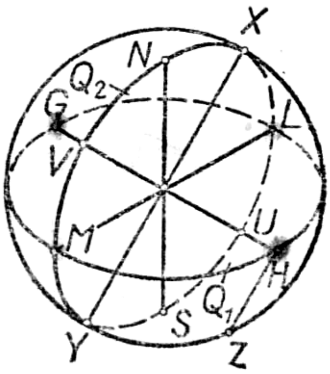


Рис. 37

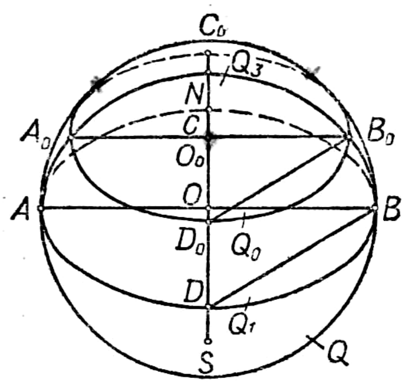
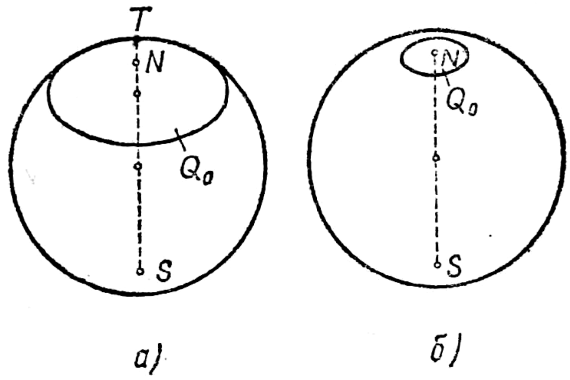


Рис. 38



Пример 6.

Дано изображение очертания Q шара, его экватора Q_1' и полюсов N' и S'.Построить изображение параллели Q_0', если дано изображение O_0 точки O_0' пересечения плоскости $П_0'$ параллели Q_0' с диаметром $N'S'$.

Решение.

Плоскость $П_0'$ параллели Q_0' перпендикулярна диаметру $N'S'$ шара F' и поэтому вполне определяется заданием точки $O_0'= П_0' \cap N'S'$.

Рассмотрим меридиан Q_3', осями которого служат отрезки $A'B'$ и $N'S'$. Его изображение Q_3 мы можем построить.

Внешнее ортогональное проектирование плоскости $П'$ экватора Q_1' и плоскости $П_0'$ параллели Q_0' устанавливает на плоскости изображений гомотетию f, переводящую изображения точек плоскости $П'$ в изображения их оснований на плоскости $П_0'$. Гомотетия f переведет эллипс Q_1 в эллипс Q_0, большую ось AB эллипса Q_1 в большую ось A_0B_0 эллипса Q_0, причем $O_0 \in A_0B_0$, $A_0B_0 \| AB$, $\{A_0, B_0\} = (A_0B_0) \cap Q_3$.

Для построения малой оси C_0D_0 эллипса Q_0 проведем прямую $B_0D_0 \| BD$ и найдем точку $D_0 = (B_0D_0) \cap (NS)$; точка C_0 симметрична D_0 относительно O_0. Зная оси A_0B_0 и C_0D_0, мы можем построить эллипс Q_0. (Эллипс Q_0 может касаться очертания Q шара в двух различных точках (рис. 37), в одной точке T (т.е. в двух совпавших точках) (рис. 38а) или лежать внутри очертания (рис. 38б).)

Пример 7.

Дано изображение сферы с экватором Q_1 и полюсами N и S. Построить изображение прямой призмы, описанной около сферы, если ее основанием является равнобедренный прямоугольный треугольник.

Решение.

Плоскости оснований призмы параллельны плоскости экватора. Полюсы сферы – точки касания сферы и оснований призмы. Боковые ребра призмы параллельны оси сферы. Их длины равны расстоянию между полюсами. Сечение плоскостью экватора – равнобедренный прямоугольный треугольник, описанный около окружности-экватора. Его катеты параллельны двум сопряженным диаметрам, точка касания гипотенузы принадлежит прямой, проходящей через центр сферы и вершину прямого угла.

Построим $A_2B_2C_2$ – изображение равнобедренного прямоугольного треугольника, описанного около экватора: d_1, d_2 – сопряженные диаметры экватора, $K_1 \in d_1$, $K_2 \in d_2$, $K_1, K_2 \in Q_1$; $A_2B_2 \| d_2$, $K_1 \in A_2B_2$; $A_2C_2 \| d_1$, $K_2 \in A_2C_2$.

Проведем прямые a, b, c следующим образом: $a \| NS$, $A_2 \in a$; $b \| NS$, $B_2 \in b$; $c \| NS$, $C_2 \in c$.

Строим точки A, A_1, B, B_1, C, C_1 так, что: $A_1A_2 = AA_2 = B_1B_2 = BB_2 = C_1C_2 = CC_2 = NO$, где O – изображение центра сферы. $ABCA_1B_1C_1$ – искомое изображение призмы (рис. 15).

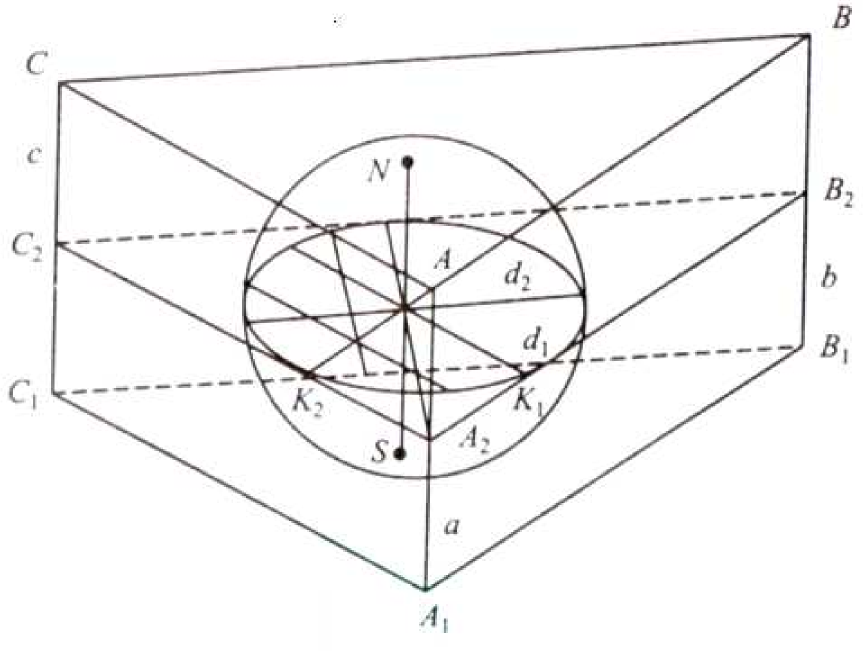


Рис. 39.

Постановка домашнего задания.

1) Построить изображение прямой призмы, описанной около сферы, если ее основанием является равнобедренный прямоугольный треугольник.

2) Дано изображение окружности вместе с выбранной на ней точкой. Построить изображение равностороннего треугольника, описанного вокруг окружности, если эта точка является точкой касания окружности и стороны треугольника.

Подведение итогов занятия.

Студенты получают баллы за работу на занятии. Задают вопросы по теме и записывают тему следующего занятия. И по желанию могут получить творческое (выполнение презентаций к занятию или выполнить модель пространственной фигуры).