

План лекции

1. Определение и свойства сложного отношения точек и прямых.
2. Гармонические четверки. Гармонические свойства полного четырехвершинника

Определение и свойства сложного отношения точек и прямых

Пусть точки A, B, C, D лежат на одной прямой и заданы своими координатами:

$A(a^0, a^1), B(b^0, b^1), C(c^0, c^1), D(d^0, d^1)$ в некотором репере R .

Сложным отношением упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется число равное

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} a^0 & a^1 \\ c^0 & c^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^0 & b^1 \\ d^0 & d^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^0 & a^1 \\ d^0 & d^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^0 & b^1 \\ c^0 & c^1 \end{vmatrix}}. \quad (1)$$

Коротко можно записать так $(AB, CD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}$, где $|XY|$ определитель

составленный из координат точек X и Y .

Сложное отношение точек не зависит от выбора проективного репера. Если A, B, C, D – собственные точки прямой, то выполняется равенство:

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}. \quad (2)$$

Пусть точки имеют координаты: $A(a^0, a^1), B(b^0, b^1), C(c^0, c^1), D(d^0, d^1)$.

Поскольку проективные координаты определяются с точностью до проективного множителя, то можно считать, что эти точки имеют координаты:

$$A(1, a)_R, B(1, b)_R, C(1, c)_R, D(1, d)_R. \quad (*)$$

Где $a = \frac{a^1}{a^0}, b = \frac{b^1}{b^0}, c = \frac{c^1}{c^0}, d = \frac{d^1}{d^0}$. Поскольку, сложное отношение точек не зависит

от выбора репера, то в качестве репера R можно выбрать репер $\tilde{R} = \{A_0, X_\infty, E\}$, тогда $A(a), B(b), C(c), D(d)$ будут являться аффинными координатами на данной прямой в системе $\{A_0, \overline{A_0 E}\}$.

Найдем простое отношение (используя определение простого отношения):

$$(AB, C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{c-a}{b-c}, (AB, D) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{d-a}{b-d}.$$

Найдем сложное отношение (AB, CD) по формуле (1), используя координаты (*):

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)} = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a} =$$

$$= -(AB, C) \cdot \left(-\frac{1}{(AB, D)} \right) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}.$$

Замечание 1. Несобственная точка C_∞ делит любой отрезок $[AB]$ прямой в отношении -1 , то есть $(AB, C_\infty) = -1$.

Замечание 2. Если выбрать в качестве репера $R = \{A, B, C\}$, то в этом репере точка A будет иметь координаты: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(d^0, d^1)$. Зная сложное отношение точек (AB, CD) , всегда можно найти расположение точки D на прямой. В этом случае

$$(AB, CD) = \frac{d^0}{d^1}.$$

Значит, если $(AB, CM) = (AB, CN)$, то $M \equiv N$.

Свойства сложного отношения четырех точек:

1. Сложное отношение точек не изменится, если поменять местами пару точек:
 $(AB, CD) = (CD, AB)$.

Доказательство. $(AB, CD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|}$, $(CD, AB) = \frac{|CA| \cdot |DB|}{|BD| \cdot |DA|}$. Учитывая, что

$(XY) = -(YX)$ получим, что $(AB, CD) = (CD, AB)$. Свойство доказано.

2. Сложное отношение точек меняет свое значение на обратное, при перестановке точек внутри одной пары: $(BA, CD) = (AB, DC) = \frac{1}{(AB, CD)}$.

Доказательство. $(BA, CD) = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|BD| \cdot |AC|} = (AB, CD)^{-1}$,

$(AB, DC) = \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC| \cdot |BD|} = (AB, CD)^{-1}$. Свойство доказано.

3. Если поменять местами точки внутри каждой пары, то сложное отношение не изменится: $(BA, DC) = (AB, CD)$.

Доказательство следует из свойства 2. $(BA, DC) = \frac{|BD| \cdot |AC|}{|BC| \cdot |AD|} = (AB, CD)$. Свойство

доказано.

$$4. (AB, CD) + (AC, BD) = 1.$$

Замечание. Пусть на прямой заданы точки A, B, C, D , где $D \neq A$, тогда

1) $(AB, CD) = 0$ тогда и только тогда, когда точки $B \equiv D$,

2) $(AB, CD) = 1$ тогда и только тогда, когда точки $D \equiv C$.

Теорема 8. При любом проективном преобразовании плоскости сложное отношение четырех точек прямой сохраняется.

Доказательство. Пусть f – проективное преобразование плоскости P , прямая $d \subset P$,

$d' = f(d)$; точки $A, B, C, D \in d$ переходят в отображении f в точки $A', B', C', D' \in d'$. Как мы знаем, сужение $f|_d$ есть проективное отображение $d \rightarrow d'$.

Это отображение вполне определяется упорядоченной парой реперов $\{R, R'\}$, где

$R = \{A, B, C\}$, $R' = \{A', B', C'\}$. Если (d^0, d^1) – координаты точки D в репере R ,

то эти же координаты имеет точка $D' = f(D)$ в репере R' . Но $(AB, CD) = \frac{d^0}{d^1}$,

$$(A'B', C'D') = \frac{d^0}{d^1} \Rightarrow (AB, CD) = (A'B', C'D'). \text{ Теорема доказана.}$$

Следствие. При любом проективном отображении одной прямой на другую сложное отношение четырех точек сохраняется.

Теорема 9. Если биекция $\varphi: d \rightarrow d'$ сохраняет сложное отношение любой четверки точек, то φ – проективное отображение.

Доказательство. Пусть A, B, C – различные точки прямой d и A', B', C' их образы в отображении φ . Существует единственное проективное отображение f , которое переводит точки A, B, C в точки A', B', C' соответственно.

Если $M \in d, M \neq A$ и $f(M) = M^*$, то по доказанному

$$(AB, CM) = (A'B', C'M^*). \quad (3)$$

$$\text{Если } \varphi(M) = M', \text{ то по условию } (AB, CM) = (A'B', C'M'), \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow (A'B', C'M^*) = (A'B', C'M')$$

и, значит, точки M^* и M' совпадают. Так как $f(A) = \varphi(A) = A'$, то такой вывод справедлив для любой точки $M \in d$. Следовательно, данное нам отображение φ совпадает с проективным отображением f . Теорема доказана.

Следствие. Биекция $\varphi: d \rightarrow d'$ является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любой четверки точек.

Теорема 10. Пусть a, b, c, d – четыре различные прямые пучка $\pi(O)$. Прямая q не проходит через точку O и A, B, C, D – точки пересечения этой прямой с прямыми a, b, c, d . Тогда сложное отношение (AB, CD) не зависит от выбора прямой q (оно называется сложным отношением (ab, cd) четырех названных прямых).

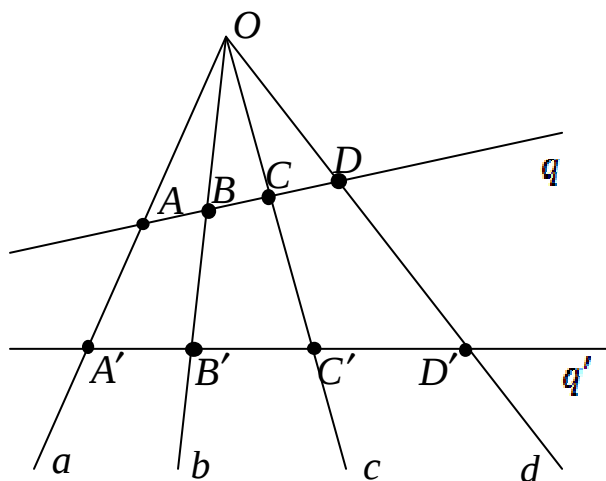


Рис. 16

Доказательство. Проведем еще какую-либо прямую $q': O \notin q'$ она пересекается с прямыми a, b, c, d в точках A', B', C', D' соответственно. Пучок $\pi(O)$ устанавливает перспективное отображение $f: q \rightarrow q'$. Так как это частный случай проективного отображения, то $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. Теорема доказана.

Следствие. Биекция $\varphi: \pi(O) \rightarrow \pi(O')$ одного пучка на другой является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любой упорядоченной четверки прямых.

Как найти сложное отношение четырех точек A, B, C, D прямой g , зная их координаты $A(a^0, a^1, a^2), B(b^0, b^1, b^2), C(c^0, c^1, c^2), D(d^0, d^1, d^2)$ относительно репера $R = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ на плоскости?

Прямая g не проходит по крайней мере через одну из точек A_0, A_1, A_2 . Для определенности будем считать, что $A_0 \notin g$.

Рассмотрим перспективное отображение $g \rightarrow (A_1 A_2)$ с помощью пучка прямых $\pi(A_0)$. Имеем:

$$(AB, CD) = (A'B', C'D').$$

В репере $R_0 = \{A_1, A_2, E_0\}$ на прямой $(A_1 A_2)$ имеем координаты точек:

$$A'(a^1, a^2), B'(b^1, b^2), C'(c^1, c^2), D'(d^1, d^2).$$

$$\text{Поэтому } (A'B', C'D') = \frac{(A'C')(B'C')}{(A'D')(B'C')} = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}} \text{ и, учитывая равенство}$$

$$(AB, CD) = (A'B', C'D'), (AB, CD) = \frac{(A'C')(B'C')}{(A'D')(B'C')}.$$

Аналогичные выражения получим, если прямая g не проходит через вершину A_1 или A_2 координатного треугольника, проектируя точки прямой g на $(A_0 A_2)$ из A_1 или на $(A_0 A_1)$ из A_2 .

Замечание. Прямая g проходит через точки A и B . Используя параметрические уравнения этой прямой, получим:

$$\vec{C} = p\vec{A} + q\vec{B},$$

$$\vec{B} = p^*\vec{A} + q^*\vec{C}.$$

Так как точки A и B различны по условию, то $\text{ранг} \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \end{pmatrix} = 2$, причем

$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} \neq 0$ (прямая g не проходит через точку A_0). Находим:

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa^1 + qb^1 & pa^2 + qb^2 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$$

и аналогично

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} = q^* \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} = p^* \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}.$$

Формула $(AB, CD) = \frac{(A'C')(B'C')}{(A'D')(B'C')}$ примет вид:

$$(AB, CD) = \frac{q}{p} \div \frac{q^*}{p^*}.$$

На проективной плоскости возьмем репер $R = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ и произвольную точку $M(x^0, x^1, x^2)$. Пусть E_2, M_2 - проекции точек E и M на прямую $(A_0 A_1)$ из центра A_2 . В репере $R_2 = \{A_0, A_1, E_2\}$ на прямой $(A_0 A_1)$ точка M_2 имеет координаты (x^0, x^1) и,

следовательно, по формуле $\begin{cases} (AB, CD) = 0 \Leftrightarrow D = B, \\ (AB, CD) = 0 \Leftrightarrow D = C \end{cases} A_0 A_1, E_2 M_2 = \frac{x^0}{x^1}$ при условии, что $x^1 \neq 0$, т. е. $M \notin (A_0 A_2)$.

Теорема 11. Если точка M имеет координаты (x^0, x^1, x^2) относительно репера $\{A_0, A_1, A_2, E\}$ проективной плоскости, то отношение $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = (A_\alpha A_\beta, E_\gamma M_\gamma)$ равно сложному отношению четырех точек: двух вершин A_α, A_β и проекций E_γ, M_γ на прямую $(A_\alpha A_\beta)$ точек E и M из третьей вершины A_γ координатного треугольника (при условии, что $x^\beta \neq 0$, т. е. $M \notin A_\alpha A_\gamma$)).

Гармонические четверки. Гармонические свойства полного четырехвершинника

Четверка точек A, B, C, D прямой называется *гармонической*, если $(AB, CD) = -1$. Говорят также, что точки C и D гармонически сопряжены относительно точек A и B или что пары A, B и C, D гармонически разделяют одна другую. Точку D называют при этом четвертой гармонической к упорядоченной тройке точек A, B, C .

Из свойств сложного отношения четырех точек, заключаем, что в случае гармонической четверки точек A, B, C, D их сложное отношение не меняется не только при перестановке пар точек, но и при перестановке точек одной пары:

$$(AB, CD) = -1 \Rightarrow \begin{cases} (CD, AB) = -1, \\ (BA, CD) = (AB, DC) = -1. \end{cases}$$

Аналогичными свойствами обладает и гармоническая четверка a, b, c, d прямых пучка (которая определяется условием: $(ab, cd) = -1$).

Пусть A, B, C, D – четыре точки общего положения на проективной плоскости. Если через каждые две из них провести прямую, то получим шесть прямых (рис. 17).

Фигура, образованная точками A, B, C, D и полученными шестью прямыми, называется полным четырехвершинником (или полным четырехугольником). Данные точки – его вершины, указанные прямые – его стороны.

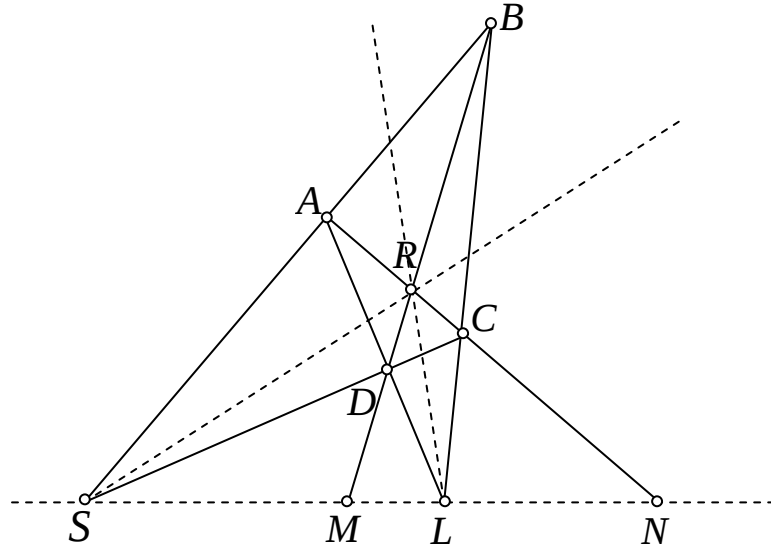


Рис. 17

Две стороны, не имеющие общей вершины, называются противоположными: AB и CD , AD и BC , BD и AC – пары противоположных сторон.

Точки R, S, L пересечения противоположных сторон называются *диагональными точками*, а прямые RS , SL , LR – *диагоналями* полного четырехвершинника.

Пусть M и N – точки пересечения диагонали SL с противоположными сторонами AC и BD , проходящими через третью диагональную точку R . Докажем, что

$$(SL, MN) = 1. \quad (7)$$

Проектируя точки S , L , M , N на прямую AC из центра D , получим: $(SL, MN) = (CA, RN)$. (8)

Проектируя точки C , A , R , N на прямую SL из центра B , получим:

$$(CA, RN) = (LS, MN), \quad (9)$$

$$(2), (3) \Rightarrow (SL, MN) = (LS, MN). \quad (10)$$

$$\text{Но по второму свойству } (LS, MN) = (SL, MN)^{-1} \quad (11)$$

$$(4), (5) \Rightarrow (LS, MN)^2 = 1 \Rightarrow (LS, MN) = \pm 1.$$

Но при $(SL, MN) = 1$ точки M и N совпадают, а следовательно, совпадают прямые RM и RN , и точки A , B , C , D оказываются на одной прямой, что противоречит условию. Поэтому

$$(SL, MN) = -1,$$

$$(1), (2), \Rightarrow (AC, RN) = -1, \quad (6)$$

$$(6) \Rightarrow ((SA), (SC); (SR), (SN)) = -1. \quad (7)$$

Заметим, что в полном четырехвершиннике все его вершины равноправны, как равноправны все его диагональные точки. Поэтому справедлива

Теорема 12. Полный четырехвершинник обладает следующими свойствами:

1. на каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат диагональные точки, а другой парой – точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку;
2. на каждой стороне имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат вершины, а другая пара образована диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки;
3. через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, в которой одной парой служат противоположные стороны, а другой диагонали.

Первый пункт этой теоремы дает способ построения четвертой гармонической точки N к упорядоченной тройке точек S, L, M . Через точку M проводим произвольную прямую MQ , а через точку S – две произвольные прямые SU и SV . Обозначим:

$$\begin{aligned} MQ \cap SV &= B, & MQ \cap SU &= D, \\ LD \cap SV &= A, & LB \cap SU &= C. \end{aligned}$$

Тогда $SL \cap AC = N$ искомая.