Лекция№3

Тема: **Уравнение прямой на проективной плоскости. Принцип двойственности. Теорема Дезарга. Проективные отображения и проективные преобразования**

План лекции

1. Уравнение прямой на проективной плоскости.
2. Принцип двойственности на проективной плоскости и в пространстве.
3. Теорема Дезарга.
4. Проективные отображения и проективные преобразования.

Уравнение прямой на проективной плоскости

Пусть на проективной плоскости $P(V)$ задан проективный репер $R=\{A_0,A_1,A_2,E\}$ и две точки $M_i(x_i^\alpha),(i=0,1,\alpha=0,1,2)$. Пусть репер R порождается базисом $R=R(\vec{a}_\alpha),\alpha=0,1,2,$ тогда по определению проективных координат точки, точка M_i порождается вектором $\vec{m}_i=x_i^\alpha\vec{a}_\alpha$. Рассмотрим $\forall M(x^\alpha)\in(M_1M_2),\vec{m}=x^\alpha\vec{a}_\alpha,(\alpha=0,1,2)$.

Поскольку точки M,M_1,M_2 лежат на одной прямой, то $\vec{m},\vec{m}_1,\vec{m}_2$ компланарны. Тогда существуют такие коэффициенты λ_i, $(i=1,2)$, что $\vec{m}=\lambda_i m_i$ то есть $\vec{m}=\lambda_1\vec{m}_1+\lambda_2\vec{m}_2$. Из данного равенства следует, что $x^\alpha=\lambda_i x_i^\alpha$, $(i=1,2,\alpha=0,1,2)$ или:

$$\begin{cases}x^0=x_1^0\lambda_1+x_2^0\lambda_2\\x^1=x_1^1\lambda_1+x_2^1\lambda_2\\x^2=x_1^2\lambda_1+x_2^2\lambda_2\end{cases}$$ - параметрические уравнения прямой M_1M_2.

Уравнение прямой можно представить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}x^0&x^1&x^2\\x_1^0&x_1^1&x_1^2\\x_2^0&x_2^1&x_2^2\end{vmatrix}=0$$ - каноническое уравнение прямой M_1M_2.

Раскрыв определитель в левой части уравнения получим линейное однородное уравнение, задающее прямую M_1M_2, вида:

$c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2=0$ или $c_\alpha x^\alpha=0,(\alpha=0,1,2),c_0,c_1,c_2\in K$.

Теорема 3. Если на проективной плоскости задан репер, то всякая прямая на этой плоскости определяется линейным однородным уравнением, и, обратно, всякое линейное уравнение относительно проективных координат $x^\alpha,(\alpha=0,1,2)$ определяет прямую.

Упорядоченная тройка коэффициентов $c^\alpha,(\alpha=0,1,2)$ уравнения прямой называется проективными координатами этой прямой.

Координаты прямой относительно данного репера определяются не однозначно, а с точностью до множителя.

Следствие. Точка $M(x^0, x^1, x^2)$ лежит на прямой $d(a_0, a_1, a_2)$ тогда и только тогда, когда $a_\alpha x^\alpha = 0, (\alpha = 0,1,2)$.

Принцип двойственности на проективной плоскости и в пространстве

Пусть V - трехмерное векторное пространство над полем K и $P(V)$ - проективная плоскость.

Зададим на плоскости $P(V)$ репер R. Тогда всякая прямая $d \in P(V)$ определяется линейным однородным уравнением $c_\alpha x^\alpha = 0$, где $d(c_\alpha)$. Положение d определяется её координатами.

Обозначим через V^* множество линейных форм вида $c_\alpha x^\alpha$, где $d(c_\alpha)$. На множестве V^* определим закон сложения «$+$»: если a и b некоторые линейные формы из V^* с коэффициентами a_α и b_α соответственно, то $a + b = (a_\alpha + b_\beta) \in V^*$. Введем также на V^* линейную операцию умножения линейной формы на скаляр «$\cdot$»: для $\forall a \in V^*$, $\forall \lambda \in K$ положим, что $\lambda \alpha = (\lambda a_\alpha) \in V^*$. Нетрудно проверить, что $(V^*, +, \cdot)$ удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства. А значит, множество V^* является векторным пространством. Пространство V^* называется сопряженным векторному пространству V, а его элементы (линейные формы) называются ковариантными векторами (или ковекторами).

Проективная плоскость $P(V^*)$ называется плоскостью, двойственной к плоскости $P(V)$. Точка a этой плоскости представляет собой множество коллинеарных между собой ненулевых ковекторов.

Каждой точке плоскости $P(V)$ можно поставить в соответствие некоторую прямую этой плоскости с теми же координатами, и каждой прямой проективной плоскости можно поставить в соответствие точку плоскости с теми же координатами. Это соответствие является взаимнооднозначным. Отсюда следует принцип двойственности.

Малый принцип двойственности (принцип двойственности на проективной плоскости)

Если на проективной плоскости верно некоторое предложение $\mathcal{A}$, в котором речь идет о точках, прямых и отношении их принадлежности, то будет выполняться двойственное утверждение $\mathcal{A}^*$, полученное из данного утверждения $\mathcal{A}$ с помощью следующей подстановки:

$$\begin{pmatrix} \textit{точка} & \textit{прямая} & \textit{принадлежит} & \textit{проходит через} \\ \textit{прямая} & \textit{точка} & \textit{проходит через} & \textit{принадлежит} \end{pmatrix}$$

Большой принцип двойственности (принцип двойственности в трехмерном проективном пространстве).

Если в проективном пространстве верно некоторое предложение $\mathcal{A}$, в котором речь идет о точках, прямых, плоскостях и отношении их принадлежности, то будет верным двойственное утверждение $\mathcal{A}^*$, которое получается из утверждения $\mathcal{A}$ с помощью следующей подстановки:

$$\begin{pmatrix} \textit{точка} & \textit{прямая} & \textit{плоскость} & \textit{принадлежит} & \textit{проходит через} \\ \textit{плоскость} & \textit{прямая} & \textit{точка} & \textit{проходит через} & \textit{принадлежит} \end{pmatrix}$$

Принцип двойственности имеет место и в n - мерном проективном пространстве.

Теорема Дезарга

Пусть A, B, C - три точки не лежащие на одной прямой. Фигура, образованная этими тремя точками и тремя прямыми, попарно их соединяющих называется *трёхвершинником*.

Фигурой, двойственной к трёхвершиннику является трёхвершинник.

По принципу двойственности проективной плоскости трехвершинник ABC перейдет в некоторый трехвершинник MNL.

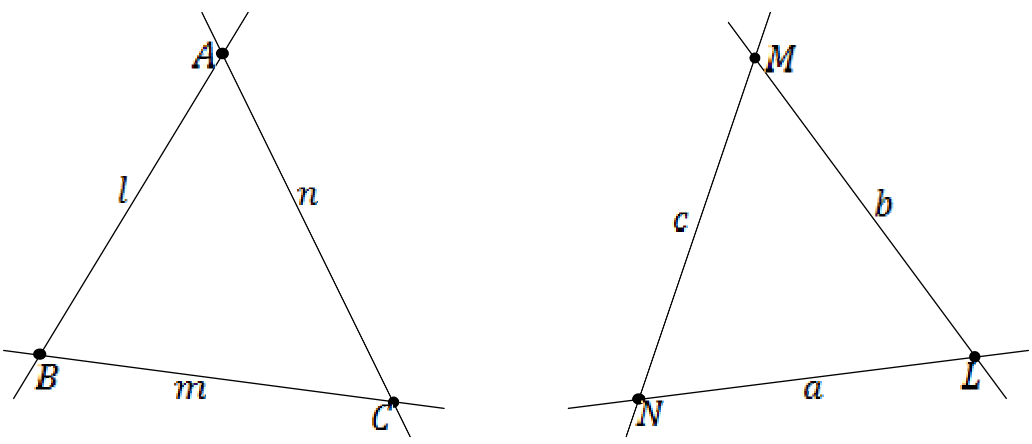

Рис. 9

Теорема Дезарга. Пусть даны два трёхвершинника ABC и $A'B'C'$ такие, что ни одна из вершин или сторон одного трёхвершинника не совпадает с соответствующим элементом другого. Тогда

$\mathcal{A}$. Если три прямые $(AA'), (BB'), (CC')$ проходят через одну точку, то три точки $a \cap a', b \cap b', c \cap c'$ лежат на одной прямой.

$\mathcal{A}^*$. Если точки $a \cap a'$, $b \cap b', c \cap c'$ лежат на одной прямой, то три прямые $(AA'), (BB'), (CC')$ проходят через одну точку.

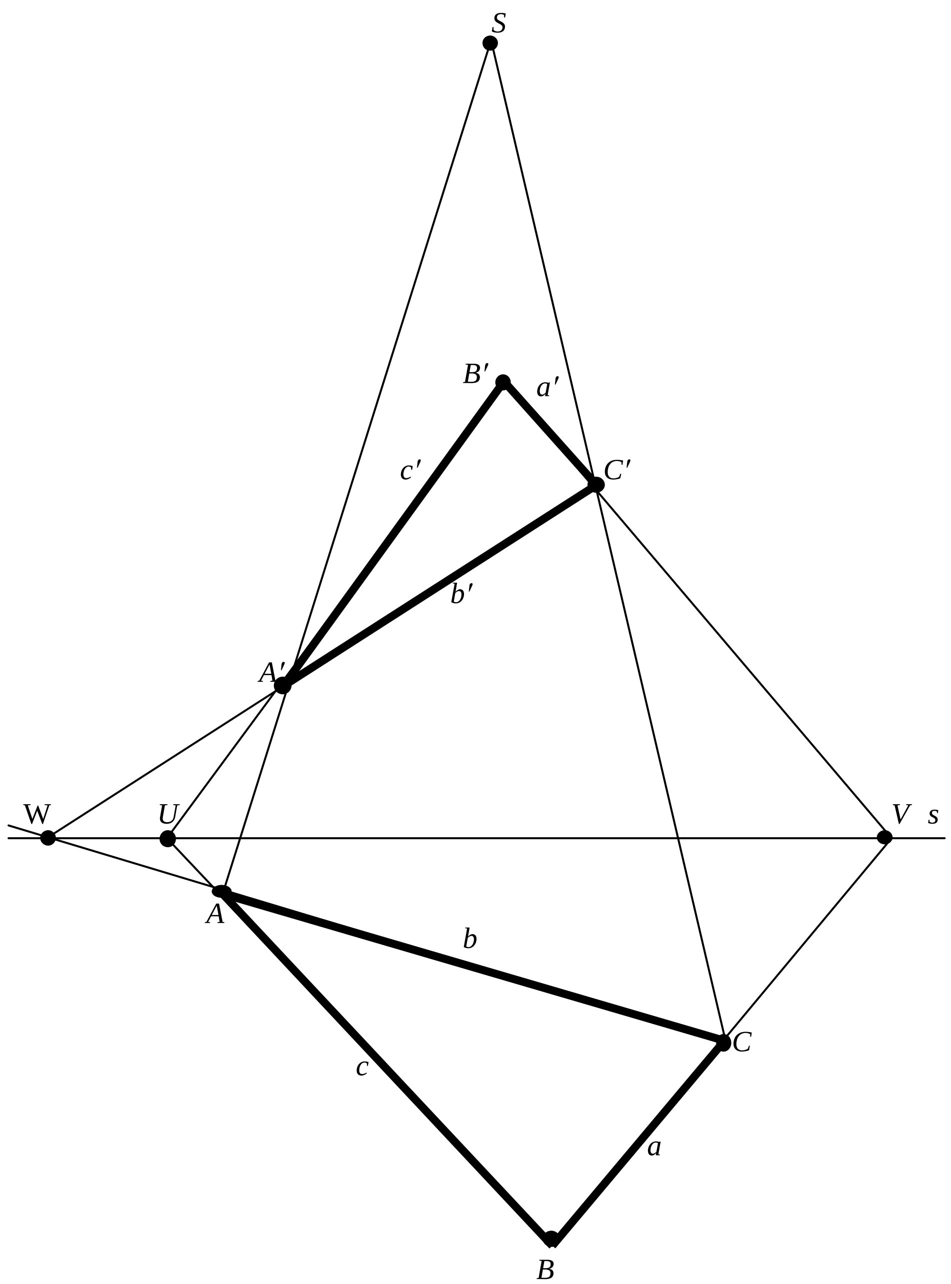

Рис. 10

Мы замечаем, что теорема $\mathcal{A}^*$ является обратной теоремой к теореме $\mathcal{A}$.

Точку S называют центром перспективы треугольников ABC и $A'B'C'$ или точкой Дезарга, а прямую s - осью перспективы или прямой Дезарга.

Поэтому теорему Дезарга можно сформулировать так:

Два треугольника имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы.

Проективные отображения и проективные преобразования

Пусть $P(V)$ и $P'(V')$ - два проективных пространства одной и той же размерности n, $(n = 1,2,3,\dots,N)$ причем V и V' - векторные пространства над одним и тем же полем K.

Возьмем какие-либо реперы $R \subset P(V)$ и $R' \subset P'(V')$. Каждой точке $M \in P(V)$, имеющей в репере R координаты (x^α), поставим в соответствие точку $M' \in P'(V')$ с теми же координатами x^α *в* репере R'. Этим определяется биекция $f: P(V) \longrightarrow P'(V')$, которая называется проективным отображением пространства $P(V)$ на пространство $P'(V')$.

При проективном отображении плоскости $P(V)$ $(n = 2)$ на плоскость $P'(V')$ всякая прямая $d \subset P(V)$переходит в некоторую прямую $d' \subset P'(V')$.

При проективном отображении пространства $P(V)$ $(n = 3)$ на пространство $P'(V')$ всякая плоскость $\pi \subset P(V)$ переходит в некоторую плоскость $\pi' \subset P'(V')$, следовательно, всякая прямая $d \subset P(V)$ (как пересечение двух плоскостей: $\pi \cap \Sigma$) переходит в прямую $d' \subset P'(V')$ (пересечение соответствующих плоскостей: $\pi' \cap \Sigma$).

Всякая биекция $f: P(V) \longrightarrow P'(V')$, которая переводит любую прямую d $P(V)$ в прямую d' пространства $P'(V')$, является проективным отображением.

Теорема 4. Проективное отображение $f: P(V) \longrightarrow P'(V')$ можно задать любой парой соответствующих реперов $R \subset P(V)$ и $R' \subset P'(V')$.

Доказательство. Пусть каждый из реперов R и R', с помощью которых определено проективное отображение $f: P(V) \longrightarrow P'(V')$, задан упорядоченной системой $n+2$ точек общего положения: $R = \{A_0, A_1, \dots, A_n, E\}, R' = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_n, E'\}$.

В силу определения проективного отображения f имеем:

$$f(A_\alpha) = A'_\alpha, f(E) = E' \, (\alpha = 0,1,2,\dots,n).$$

Поэтому можно сказать, что проективное отображение f переводит репер R в репер R'.

Если в проективных пространствах $P(V)$ и $P'(V)$ задать соответственно реперы R и R', то этим определяется проективное отображение $f: P(V) \longrightarrow P'(V')$, и при том единственное, которое переводит репер R в R'. В частности,

1) если на проективных прямых d и d' соответственно задать упорядоченные тройки различных точек: $\{A, B, C\}$ и $\{A', B', C'\}$, то существует единственное проективное отображение

$$f: d \longrightarrow d' (A \longmapsto A', B \longmapsto B', C \longmapsto C');$$

2) если на проективных плоскостях Π и Π' соответственно задать упорядоченные четверки точек общего положения: $f: \{A, B, C, D\}$ и $\{A', B', C', D'\}$, то существует единственное проективное отображение $f: \Pi \longrightarrow \Pi' (A \longmapsto A', B \longmapsto B', C \longmapsto C', D \longmapsto D')$.

Проективное отображение $f: P(V) \longrightarrow P(V)$ пространства $P(V)$ на себя называется проективным преобразованием этого пространства.

Проективное преобразование переводит точку в точку, прямую - в прямую, плоскость - в плоскость с сохранением отношения принадлежности.

Проективные преобразования при $\dim P(V) \geq 2$ часто называют коллинеациями, чтобы подчеркнуть, что они сохраняют коллинеарность точек.

Теорема 5. Пусть проективное преобразование f плоскости $P(V)$ переводит прямую d в прямую d'. Тогда сужение $f|_d$ есть проективное отображение d на d'.

Доказательство. Возьмем три точки $A, B \in d$ и $C \notin d$ (рис. 10), в преобразовании f они перейдут в точки $A', B' \in d'$ и $C' \notin d'$. Преобразование f однозначно определяется упорядоченной парой реперов $R = R(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ и $R' = R'(\vec{A'}, \vec{B'}, \vec{C'})$.

Пусть $f(M) = M'$. Тогда, если x^α - координаты точки M в репере R, эти же координаты имеет точка M' в репере R'.

Если $M \in d$, то $x^2 = 0$ и $\vec{M} = x^0\vec{A} + x^1\vec{B}$. Для точки M' также $x^2 = 0$ и $\vec{M'} = x^0\vec{A'} + x^1\vec{B'}$.

Следовательно, точка M в репере $R_1(\overrightarrow{A'}, \overrightarrow{B'})$ на прямой d имеет те же координаты, что и точка $M' = f(M)$ в репере $R'_1(\overrightarrow{A'}, \overrightarrow{B'})$ на прямой d. Это верно для $\forall M \in d$.

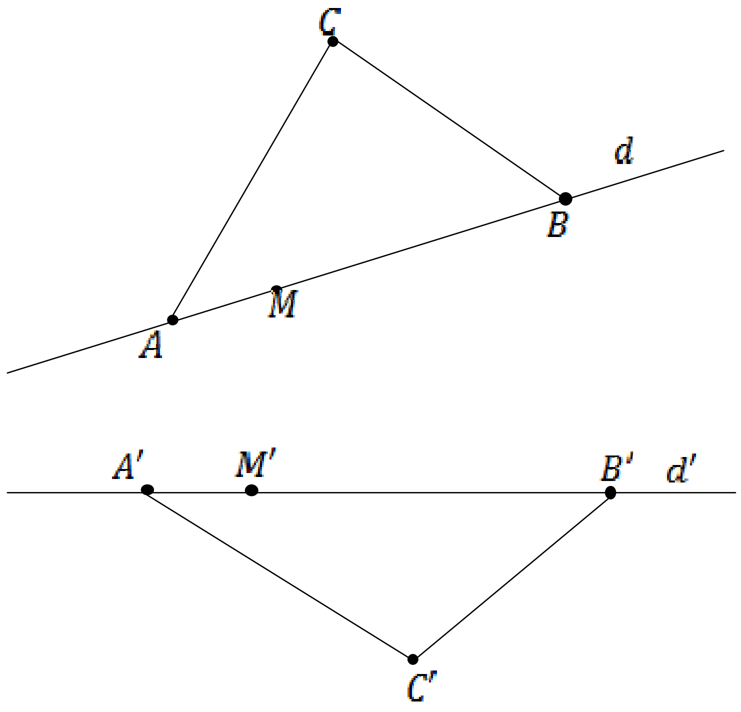

Рис. 11

Множество всех преобразований проективного пространства $P(V)$ образует группу $G_{P(V)}$ относительно операции «композиция».

В векторном пространстве V формулы $y^\alpha \vec{A}_\alpha = x^\beta c^\alpha_\beta \vec{A}_\alpha \Rightarrow y^\alpha = c^\alpha_\beta x^\beta$ определяют невырожденный оператор $V \longrightarrow V$, который переводит базис $\{\vec{A}_\alpha\}$ в базис $\{\overrightarrow{A'}_\alpha\}$ и который в базисе $\{\vec{A}_\alpha\}$ задается матрицей $C = \| c^\alpha_\beta \|, \det \| c^\alpha_\beta \| \neq 0$.

Как известно из алгебры, все невырожденные линейные операторы векторного пространства V образуют группу относительно умножения операторов, эту группу обозначают через $GL(V)$ и называют *линейной группой* векторного пространства.