Лекция№2

Тема: **Понятие проективного репера и проективных координат точки. Построение точки по ее координатам на модели проективной прямой и плоскости. Преобразование проективных координат**

План лекции

1. Понятие проективного репера и проективных координат точки.
2. Построение точки по ее координатам на модели проективной прямой.
3. Построение точки по ее координатам на модели проективной плоскости.
4. Преобразование проективных координат

Понятие проективного репера и проективных координат точки

Пусть $V(n+1)$ - мерное векторное пространство над полем K и пусть $\{\vec{a}_\alpha\}, \{\vec{b}_\alpha\}, \alpha = 0,1,\dots,n$ – базисы в V.

Если $\exists\lambda \in K | \vec{b}_\alpha = \lambda\vec{a}_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n,$ то эти базисы называются *гомотетичными*. Отношение гомотетичности базисов будем обозначать Γ.

Отношение гомотетичности является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{B}$ всех базисов векторного пространства V. Элементы фактор-множества $\mathcal{B}|_\Gamma$ (Γ – множество базисов пространства V) называется *проективными реперами* пространства $P(V)$. Значит проективный репер – это множество всех гомотетичных между собой базисов векторного пространства V.

Проективный репер служит системой координат в проективном пространстве. Каждый базис $\{\vec{a}_\alpha\}$ принадлежит только одному проективному реперу R. $R = R(\vec{a}_\alpha)$ - репер, полученный из базиса $\{\vec{a}_\alpha\}$.

В векторном пространстве $V\{\vec{0}\}$ выберем базис $\{\vec{a}_\alpha\}, \alpha = 0,1,\dots,n$, тогда каждый вектор $\vec{m} \in V\backslash\{\vec{0}\}$ представим в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{m} = x^\alpha\vec{a}_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n,$ коэффициенты которой служат аффинными координатами вектора $\vec{m}(x^\alpha)$ в базисе $\{\vec{a}_\alpha\}$ $(n+1)$ –мерного векторного пространства $V\backslash\{\vec{0}\}$, где $x^\alpha \in K$.

Если точка $M = \pi(m)$ то числа x^α называются проективными координатами точки M в репере $R = R(\vec{a}_\alpha), \alpha = 0,1,\dots,n$ проективного пространства $P(V)$. Пишут: $M(x^0, x^1, \dots, x^n)$

Рассмотрим базис $\{\vec{b}_\alpha\}$ гомотетичный базису $\{\vec{a}_\alpha\}$, то есть

$\exists\lambda \in K|\overrightarrow{b_\alpha} = \lambda\vec{a}_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n.$ Так как (*) $\vec{m} = y^\alpha\vec{b}_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n,$ отсюда $\vec{m} = \lambda y^\alpha\vec{a}_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n.$ С другой стороны $\vec{m} = x^\alpha\vec{a}_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n.$ Следовательно, $(**)\ x^\alpha = \lambda y^\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n.$

Таким образом, проективные координаты точки $M \in P(V)$ относительно данного репера R определяются не однозначно, а с точностью до общего множителя $\lambda \neq 0$.

В аффинном пространстве A_{n+1} возьмем связку прямых с центром в точке O. Прямые этой связки изображают точки n - мерного проективного пространств $P(V)$. Если задан базис $\{\vec{a}_\alpha\}$ векторного пространства V, то этим базисом будет определяться проективный репер R, а также определена упорядоченная система из $(n+1)$ точек $A_\alpha = \pi(\vec{a}_\alpha), \alpha = 0,1,\dots,n$. Система $A_0, A_1, \dots, A_n$ не определяет репера R однозначно, так как эти точки можно задать и при помощи других векторов $\vec{b}_\alpha$, таких что базис $\{\vec{b}_\alpha\}$ не обязательно будет гомотетичен базису $\{\vec{a}_\alpha\}$.

Рассмотрим $\vec{e} = \sum_{\alpha=0}^{n}\vec{a}_\alpha$. $E = \pi(\vec{e})$ – единичная точка. Система $A_0, A_1, \dots, A_n, E$ уже определяет проективный репер R однозначным образом.

Система из $(n+2)$ точек называется системой точек общего положения, если никакие $(n+1)$ из них не принадлежат проективному пространству, размерностью меньше чем $\dim P(V)$.

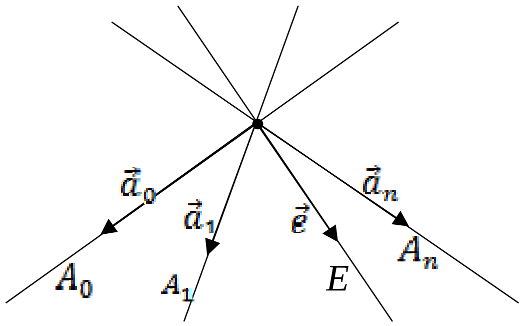

Рис. 3

Теорема 1. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n, E$ - упорядоченная система точек общего положения в n - мерном проективном пространстве $P(V)$, тогда существует и притом единственный проективный репер $R = R(\vec{a}_\alpha), \alpha = 0,1,\dots,n,$ такой что $\pi(\vec{a}_\alpha) = A_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n, \pi(\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n) = E.$

Доказательство. Пусть точке $A_\alpha E$, где $\alpha = 0,1,\dots,n$ соответствуют векторы $\vec{a}_\alpha$, $(\alpha = 0,1,\dots,n)$, $\vec{e}$, такие что $\pi(\vec{a}_\alpha) = A_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n,$ $E = \pi(\vec{e})$. Возможны два случая:

1 случай:

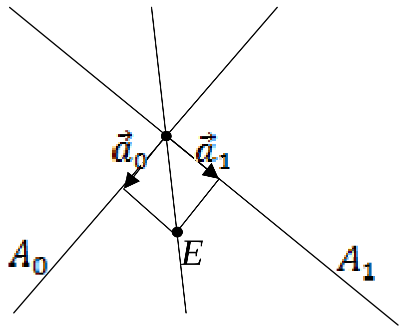

Рис. 4

$\vec{e} = \sum_{\alpha=0}^{n} \vec{a}_\alpha$, тогда проективный репер $R = R(\vec{a}_\alpha), \alpha = 0,1,\dots,n$ искомый. Такую систему называют *согласованной*.

2 случай:

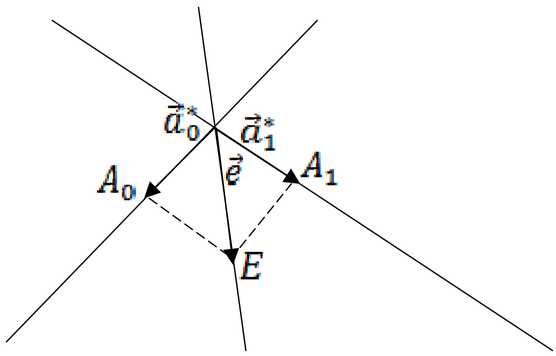

Рис. 5

$\vec{e} \neq \sum_{\alpha=0}^{n} \vec{a}_\alpha$. Определим базис $\{\vec{a}_\alpha^*\}, \alpha = 0,1,\dots,n,$ такой что вектор $\vec{e} = \sum_{\alpha=0}^{n} \vec{a}_\alpha^*$. $\mathcal{T}(\vec{a}_\alpha^*), \alpha = 0,1,\dots,n$. Существуют числа

$$\exists \rho_\alpha \in K: \vec{a}_\alpha^* = \rho_\alpha, \alpha = 0,1,\dots,n,$$

тогда система $\vec{a}_\alpha (\alpha = 0,1,\dots,n)$, $\vec{e}$ – согласованная система и проективный репер $R = R(\vec{a}_\alpha^*), \alpha = 0,1,\dots,n$ – искомый проективный репер.

Числа ρ_α называются *нормирующими множителями*, а сама операция перехода от несогласованной системы к согласованной называется *нормированием*.

Замечание 1. На проективной прямой репер определяется упорядоченной тройкой различных точек.

Замечание 2. На проективной плоскости репер определяется упорядоченной четверкой точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Замечание 3. Репер в трехмерном проективном пространстве определяется пятью точкам, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости.

Построение точки по ее координатам на модели проективной прямой

Пусть дана модель проективной прямой - расширенная прямая $\overline{d}$ и на ней задан репер $R = \{A_0, A_1, E\}$. Построим точку M по ее координатам (x^0, x^1) в этом репере. Возьмем точку $O \notin \overline{d}$ и пучок прямых

$$\pi(O) = \{(OA_0), (OA_1), (OE) \dots\}$$

на аффинной плоскости. Этот пучок будет также моделью проективной прямой P_1.

На прямой (OE) возьмем произвольную точку $\mathcal{E}$, отличную от точки O, и вектор $\overrightarrow{O\mathcal{E}}$ разложим по направлениям прямых $(OA_0), (OA_1)$ (рис. 5). Получим векторы $\vec{e}_0, \vec{e}_1$ порождающие точки A_0, A_1 соответственно, причем векторы $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\overrightarrow{O\mathcal{E}}$ согласованы, то есть $\overrightarrow{O\mathcal{E}} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1$. Следовательно, данный проективный репер R можно задать векторным базисом $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1\}$ векторного пространства $\mathbb{R}^2$. Построим вектор $\overrightarrow{OM'} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1$. Этот вектор порождает искомую точку M. $M = (\overrightarrow{OM'}) \cap \overline{d}$ (рис. 6).

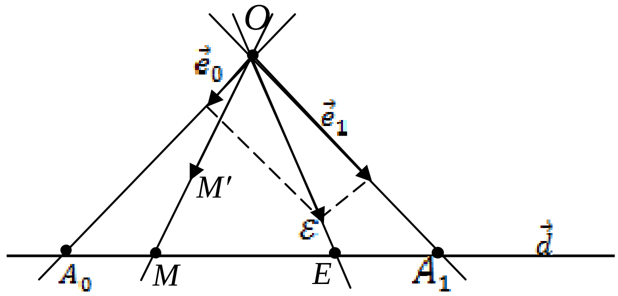

Рис. 6

Рассмотрим на прямой $\overline{d}$ частный случай проективного репера:

$\tilde{R} = \{A_0, X_\infty, E\}$ (рис. 6). Каждая точка $M \in d$ имеет проективные координаты (x^0, x^1) относительно репера $\tilde{R}$; эти координаты определяются из условия:

$$\overrightarrow{OM'} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1, \qquad (*)$$

где $\overrightarrow{OM'}$ - какой-либо направляющий вектор прямой (OM).

Несобственная точка получится, когда прямая (OM') займет положение особой прямой d_0, направляющий вектор которой коллинеарен вектору $\vec{e}_1$. Значит, в репере $\tilde{R}$ собственная точка X_∞ прямой имеет координату x^0, равную нулю: $x^0 = 0$.

Для всех остальных (собственных) точек прямой $\overline{d}$, т. е. точек обычной прямой d, будет $x^0 \neq 0$. Рассмотрим, такие точки.

Выберем базис $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1\}$ так, чтобы $\vec{e}_0 = \overrightarrow{OA_0}, \vec{e}_1 = \overrightarrow{A_0E}$. При этом проективный репер $\tilde{R}$ останется прежним. По формуле (*) имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_1E}, \text{или } \overrightarrow{OM} = \vec{e}_0 + x\vec{e}_1, \qquad (**)$$

где x- абсцисса точки M в аффинной системе координат $\{A_0, \vec{e}_1\}$ на прямой d.

Векторы $\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}$ коллинеарны, поэтому

$$(*), (**) \Longrightarrow x = \frac{x^1}{x^0}.$$

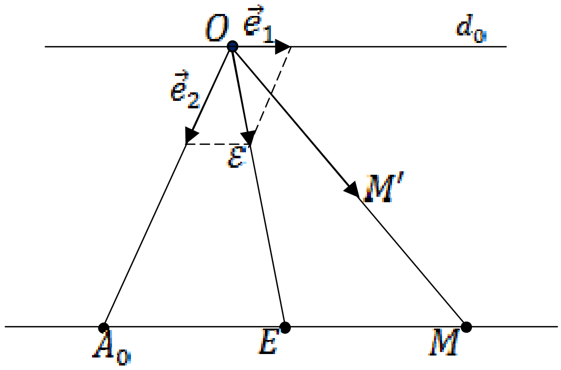

Рис. 7

Относительно репера $\tilde{R} = \{A_0, X_\infty, E\}$:

1. Несобственная точка $M_\infty \in \overline{d}$ имеет координаты $(0, x^1)$ то есть $x^0 = 0$, а x^1 - любое вещественное число, не равное нулю;

2. Для любой несобственной точки M координата $x^0 \neq 0$, а отношение $x = \frac{x^1}{x^0}$ есть аффинная координата точки M в системе координат $\{A_0, \overrightarrow{A_0E}\}$ на прямой d.

Проективные координаты точек прямой d относительно репера $\tilde{R} = \{A_0, X_\infty, E\}$ называют *однородными координатами* этих точек.

Построение точки по ее координатам на модели проективной плоскости

Пусть дана модель проективной плоскости – расширенная плоскость $\overline{\Pi}$ и на ней задан репер $\tilde{R} = \{A_0, A_1, A_1, E\}$. Построим точку M по ее координатам (x^0, x^1, x^2) в этом репере.

Возьмем точку $O \in \overline{\Pi}$ и связку прямых $C(O) = \{(AO_0), (AO_1), (OE), \dots\}$ аффинной плоскости. Эта связка будет также моделью проективной плоскости P_2.

На прямой (OE) возьмем произвольную точку $\mathcal{E}$, отличную от точки O, и вектор $\overrightarrow{O\mathcal{E}}$ разложим по направлениям прямых $(OA_\alpha), \alpha = 0,1,2$.

Получим векторы $\vec{a}_\alpha, \alpha = 0,1,2$ порождающие точки $A_\alpha, \alpha = 0,1,2$ причем векторы $\vec{a}_\alpha$, $\overrightarrow{O\mathcal{E}}$ согласованы, то есть $\overrightarrow{O\mathcal{E}} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ (рис. 3).

Следовательно, данный проективный репер R можно задать векторным базисом $\{\vec{a}_\alpha\}: R = R(\vec{a}_\alpha), \alpha = 0,1,\dots,n$ векторного пространства $\mathbb{R}^3$. Искомую точку M порождает вектор $\overrightarrow{OM'} = x^0\vec{a}_0 + x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2$. Поэтому
$M = (OM') \cap \overline{\Pi}$ (рис.8).

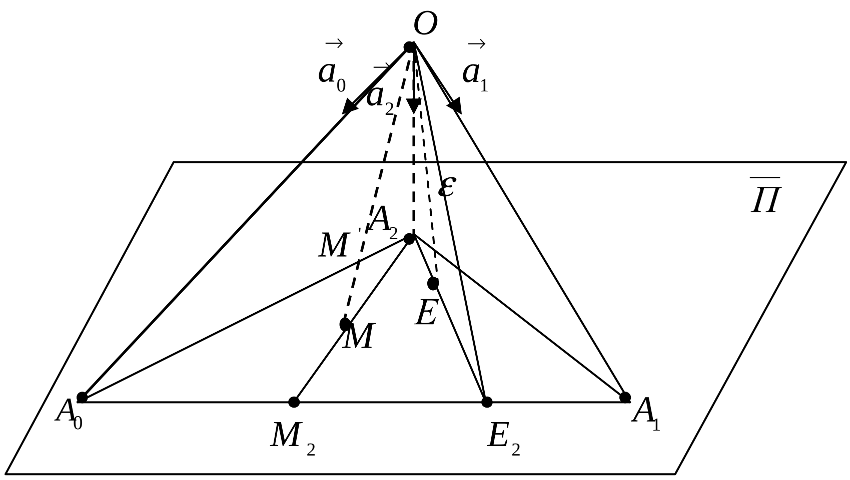

Рис. 8

Теорема 2. Пусть $R = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ - проективный репер на плоскости и E_2, M_2 - проекции точек E и M из центра проектирования A_2 на прямую (A_0, A_1). Тогда, если (x^0, x^1, x^2) - координаты точки M в репере
$R = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ на плоскости, то (x^0, x^1) - координаты точки M_2 в репере $R_2 = \{A_0, A_1 E_2\}$ на прямой (A_0, A_1).

Точно так же (x^1, x^2) координаты точки M_2 в репере $R = \{A_1, A_2, E_0\}$ на прямой (A_1, A_2), (x^0, x^2) - координаты точки M_1 в репере $R_1 = \{A_0, A_2, E_1\}$ на прямой $(A_0 A_2)$.

На основании теоремы строим точки $M_\alpha, (\alpha = 0,1,2)$ в реперах
$R_\alpha, \alpha = 0,1,2$ на соответствующих прямых.

Затем точка M строится так: $M = (A_0 M_0) \cap (A_1 M_1) \cap (A_2 M_2)$.

Рассмотрим на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ частный случай проективного репера $\tilde{R} = \{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$, где точки A_0, E - собственные, а точки X_∞, Y_∞ - несобственные.

Возьмем точку $O \notin \overline{\Pi}$ и рассмотрим перспективное отображение $\varphi: \overline{\Pi} \longrightarrow \mathcal{C}(O)$. Точкам $A_0, X_\infty, Y_\infty, E$ плоскости $\overline{\Pi}$ соответствуют в связке $\mathcal{C}(O)$ прямые $(OA_0), d_0, d'_0, (OE)$, причем прямые d_0, d'_0 особые.

В плоскости $\mathcal{I}$ проведем прямые $(A_0x) \parallel d_0, (A_0y) \parallel d'_0$. Тогда на расширенной плоскости $\vec{\Pi}$ точки X_∞, Y_∞ дополняют прямые $(A_0x), (A_0y)$ соответственно до расширенных прямых. Вектор $\overrightarrow{O\mathcal{E}'} = \overrightarrow{A_0E}$ можно разложить по направлениям d_0 и d'_0: $\overrightarrow{O\mathcal{E}'} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Обозначив $\overrightarrow{OA}_0 = \vec{e}_0$, получим: $\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE}$. Следовательно, репер $\tilde{R}$ определяется векторным базисом $(\vec{e}_\alpha), \alpha = 0,1,2.$ Возьмем векторы $\overrightarrow{A_0E_1} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{A_0E_2} = \vec{e}_2$ (очевидно, $E_1 = (A_0X_\infty) \cap (Y_\infty E)$ и $E_2 = (A_0Y_\infty) \cap (X_\infty E)$)
.

Пусть M_∞- какая-либо несобственная точка плоскости $\overline{\Pi}$. В связке $\mathcal{C}(O)$ ей соответствует некоторая особая прямая d'. Если точка $M' \in d', M' \notin O$, то $\overrightarrow{OM}' = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ и точка M_∞ имеет координаты $(0, x^1, x^2)$ в репере $\tilde{R}$.

Проведем на плоскости $\mathcal{I}$ какую-либо прямую $d \parallel d'$. Вектор $\vec{l} = \overrightarrow{OM}' = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ - направляющий вектор прямой d.

Пусть теперь точка M - собственная точка плоскости $\overline{\Pi}$, тогда ее координата x^0 отлична от нуля. Если $\overrightarrow{OM}'_1$- направляющий вектор прямой (OM) и

$$\overrightarrow{OM}'_1 = x^\alpha \vec{e}_\alpha, \qquad (1)$$

то x^α - проективные координаты точки M в репере $\tilde{R}$. Далее,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{e}_0 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \qquad (2)$$

где $\overrightarrow{A_0M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ и, значит, x, y - аффинные координаты точки M в системе координат $\{A_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на плоскости $\mathcal{I}$.

Векторы $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, поэтому (1), (2)$\Longrightarrow x^0 = \lambda, x^1 = \lambda x, x^2 = \lambda y \Longrightarrow \frac{x^0}{1} = \frac{x^1}{x} = \frac{x^2}{y}$.

Таким образом в проективном репере $R = \{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$ плоскости $\overline{\Pi}$:

1. Всякая несобственная точка M_∞ имеет координату $x^0 = 0$, а две другие координаты x^1, x^2 являются координатами направляющего вектора

$\vec{l} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ какой-либо собственной прямой d, расширение которой $\overline{d}$, содержит точку M_∞;

2. Каждая собственная точка M имеет координаты x^0, x^1, x^2, такие что $x^0 \neq 0$, а отношения $\frac{x^1}{x^0} = x, \frac{x^2}{x^0} = y$ представляют собой аффинные координаты точки M в системе координат

$$\{A_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \text{где } \vec{e}_1 = \overrightarrow{A_0E_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{A_0E_2}$$

Проективные координаты точек плоскости $\overline{\Pi}$ относительно репера $\tilde{R} = \{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$ называют *однородными координатами* этих точек.

Преобразование проективных координат

Пусть на проективной плоскости $P(V)$ заданы два проективных репера: $R = \{A_0, A_1, \dots, A_n, E\}$ – старый и $R' = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_n, E'\}$ – новый. Известно положение нового репера относительно старого. Пусть точка $M(x^\alpha)_R$ и та же точка $M(y^\beta)_{R'}$, $(\alpha, \beta = 0,1,2)$, а точки A'_β, E', определяющие репер R', имеют в репере R координаты $A'_\beta(c^\alpha_\beta), E'(\varepsilon^\alpha), (\alpha, \beta = 0,1,2)$. В развернутой форме: $M(x^0, x^1, x^2)_R, M(y^0, y^1, y^2)_R, A'_0(c^0_0, c^1_0, c^2_0), A'_1(c^0_1, c^1_1, c^2_1), A'_2(c^0_2, c^1_2, c^1_2)$, $E'(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$.

Пусть точки A'_β порождаются векторами $\vec{a'}_\beta, (\beta = 0,1,2)$, а E' вектором $\vec{e'}$, $R' = R'(\vec{a'}_\beta), \beta = 0,1,2$. Пусть $R = R(\vec{a}_\alpha), \alpha = 0,1,2$. Возможны два случая:

1 случай: $\vec{a'}_\beta, \vec{e'}$ согласованны.

Пусть векторный базис $\{\vec{a}_\alpha\}$ определяет репер R. Для базиса $\{\vec{a}'_\alpha\}$, где $\vec{a}'_\alpha = c^\beta_\alpha \vec{a}_\beta = \vec{A'}_\alpha$, имеет место равенство $\vec{A'}_0 + \vec{A'}_1 + \vec{A'}_2 = \vec{E'}$, и, значит, этот базис определяет именно репер R'.

Если x^α - проективные координаты точки M в репере R, то это значит, что вектор $\vec{M'} = x^\alpha \vec{a}_\alpha$ порождает точку M.

Точно так же вектор $\vec{M}'' = y^{\alpha\beta}\vec{a}'_{\alpha\beta}$ порождает точку M.

Так как $\vec{M}'$ и $\vec{M}''$ порождают одну и ту же точку M, то $\lambda\vec{M}' = \vec{M}''$, или

$\lambda x^\alpha \vec{a}_\alpha = y^\beta \vec{a}'_\beta \Longrightarrow \lambda x^\alpha \vec{a}_\alpha = y^\beta c^\alpha_\beta \vec{a}_\alpha,$

и так как векторы $\vec{a}_\alpha$ линейно независимы, то $\lambda x^\alpha = c_\beta^\alpha y^\beta$.

2 случай: $\overrightarrow{a'}_\beta, \overrightarrow{e'}$ несогласованны.

Найдем векторы $\vec{A}_\alpha = \rho_\alpha \overrightarrow{A'}_\alpha$, такие, чтобы для них имело место условие: $\rho_0 \overrightarrow{A'}_0 + \rho_1 \overrightarrow{A'}_1 + \rho_2 \vec{A}_2 = \overrightarrow{E'}$. Тогда $\rho_0 c_0^\alpha \vec{a}_\alpha + \rho_1 c_1^\alpha \vec{a}_\alpha + \rho_2 c_2^\alpha \vec{a}_\alpha = \varepsilon^\alpha \vec{a}_\alpha$, отсюда

$$\sum_{\beta=0}^{2} c_\beta^\alpha \rho_\beta = \varepsilon^\alpha.$$

Так как $\det \| c_\beta^\alpha \| \neq 0$, то система $\sum_{\beta=0}^{2} c_\beta^\alpha \rho_\beta = \varepsilon^\alpha$ имеет единственное решение.

Тогда формулы преобразования проективных координат при переходе от репера R к реперу R' имеют вид:

1) $\lambda x^\alpha = c_\beta^\alpha y^\beta$, или $\begin{cases} \lambda x^0 = c_0^0 y^0 + c_1^0 y^1 + c_2^0 y^2 \\ \lambda x^1 = c_0^1 y^0 + c_1^1 y^1 + c_2^1 y^2 \\ \lambda x^2 = c_0^2 y^0 + c_1^2 y^1 + c_2^2 y^2 \end{cases}$ - для согласованных систем;

2) $\lambda x^\alpha = \rho_\beta c_\beta^\alpha y^\beta$, или $\begin{cases} \lambda x^0 = \rho_0 c_0^0 y^0 + \rho_1 c_1^0 y^1 + \rho_2 c_2^0 y^2 \\ \lambda x^1 = \rho_0 c_0^1 y^0 + \rho_1 c_1^1 y^1 + \rho_2 c_2^1 y^2 \\ \lambda x^2 = \rho_0 c_0^2 y^0 + \rho_1 c_1^2 y^1 + \rho_2 c_2^2 y^2 \end{cases}$ - для несогласованных систем, где ρ_β - нормирующие множители, которые определяются из условия: $\sum_{\beta=0}^{2} \rho_\beta c_\beta^\alpha = \varepsilon^\alpha$, или $\begin{cases} \rho_0 c_0^0 + \rho_1 c_1^0 + \rho_2 c_2^0 = \varepsilon^0 \\ \rho_0 c_0^1 + \rho_1 c_1^1 + \rho_2 c_2^1 = \varepsilon^1 \\ \rho_0 c_0^2 + \rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2 = \varepsilon^2 \end{cases}$.