

План

1. Определение и каноническое уравнение параболы.
2. Геометрические свойства параболы. Взаимное расположение параболы и прямой, проходящей через ее центр.

Основные факты

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки F , называемой *фокусом*, и фиксированной прямой d , называемой *директрисой*.

Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через p . Очевидно, $p=FD$, где D – проекция точки F на прямую d .

Если M – точка данной параболы, то отрезок FM называется *фокальным радиусом* точки M .

По определению, для любой точки M параболы $FM=\rho(M,d)$.

В прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$, где O – середина отрезка DF , а $\vec{i} \uparrow \overrightarrow{OF}$, парабола имеет уравнение:

$$(11) \quad y^2=2px.$$

Уравнение (11) называется *каноническим уравнением параболы*.

$$(12) \quad x=-\frac{p}{2} \text{ – уравнение директрисы параболы.}$$

Фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2},0)$.

Геометрические свойства параболы:

1. Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x \geq 0$.
2. Прямая OF является осью симметрии параболы и называется *осью* параболы. Центров симметрии парабола не имеет. Точка O пересечения оси с параболой называется *вершиной* параболы.
3. Оси выбранной системы координат имеют только одну общую точку с параболой – ее вершину. Любая другая прямая l , проходящая через точку O , пересекает параболу в двух точках.

Чем больше фокальный параметр параболы, тем больше парабола «вытянута» вдоль оси Oy .

Точки параболы обладают свойством, аналогичным свойству точек эллипса (гиперболы): отношение расстояний от каждой точки параболы до фокуса к расстоянию от нее до директрисы постоянно; для параболы это отношение равно 1, поэтому *число «единица» называется эксцентриситетом любой параболы*.

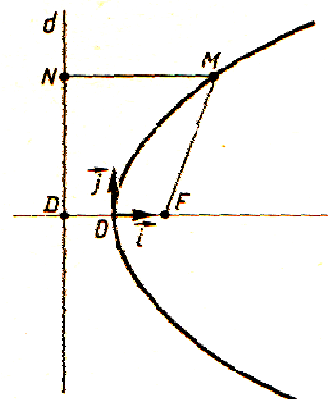


Рис. 5.

Примеры решения типовых задач

Задача 1

На параболе $y^2=8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 20.

Решение

По определению параболы для любой ее точки M : $MF=\rho(M,d)$; расстояние до директрисы

можно найти формуле $\rho(M,d)=x+\frac{p}{2}$, где x – абсцисса точки M .

Так как из условия задачи следует, что $p=4$, а $\rho(M,d)=20$, то имеем равенство: $x+2=20$, откуда $x=18$. Тогда $y^2=8 \cdot 18=144$, $y=\pm 12$.

Итак, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_{1,2}(18,\pm 12)$.

Задача 2

Составить уравнение параболы, зная, что ее вершина M_0 имеет координаты $(4,1)$, параметр равен 3 и направление оси совпадает с отрицательным направлением оси Ox .

Решение

Переносим начало координат в точку M_0 и меняем направление оси Ox , получим уравнение: $(y-1)^2=-2 \cdot 3 \cdot (x-4)$.

Выполнив преобразования, имеем: $x=-\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{3}y+\frac{23}{6}$ – искомое уравнение параболы.

Задача 3

Составить уравнение параболы, если $F(4,3)$ – фокус, а уравнение директрисы $d: y+1=0$.

Решение

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы.

По определению параболы $MF=\rho(M,d)$.

По формуле расстояния между точками $MF=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$.

По формуле расстояния от точки до прямой $\rho(M,d)=|y+1|$.

Имеем уравнение $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=|y+1|$, решая которое получим:

$$x^2-8x+24=8y, \text{ или } y=\frac{1}{8}x^2-x+3.$$

Задача 4

Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24м, а высота 6м.

Решение

В плоскости параболы введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке.

Учитывая, что ветви параболы сонаправлены с отрицательным направлением оси Oy , можно составить уравнение этой параболы: $(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)$, где (x_0,y_0) – координаты вершины.

Если парабола отсекает на осях отрезки a и b , то $B(0,b)$, $A_1(\pm a,0)$, где B – вершина параболы.

Подставляя эти данные в последнее равенство, имеем: $a^2=-2p(-b)$.

$$\text{Отсюда, } p=\frac{a^2}{b}.$$

В соответствии с условиям задачи, $a=12$, $b=6$, тогда $p=144/12=12$.

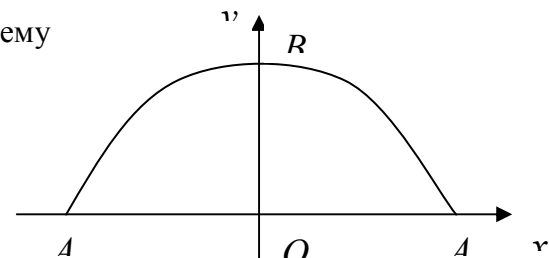


Рис. 6.

Задачи для самостоятельного решения

201. Написать уравнение параболы в репере $(O, \vec{i}, \vec{j})$, если в этом репере заданы координаты фокуса $F(4, 2)$ и уравнение директрисы: $x + 3y - 6 = 0$. Определить параметр параболы.

202. Даны отрезки $[OA]$ и $[AB]$, причем $(OA) \perp (AB)$. Каждый из них разделен соответственно точками $A_1, A_2, \dots$ и точками $B_1, B_2, \dots$ на n равных частей. Проведены лучи $[OB_i)$ и прямые l_i проходящие через точки A_i соответственно и параллельные (AB) . Доказать, что точки $M_i = [OB_i) \cap l_i$ принадлежат параболе.

203. На прямой, уравнение которой в репере $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $8x - 3y + 6 = 0$, найти точку, которая одинаково удалена от прямой $a: x - 5 = 0$ и точки $A(-3, 2)$.

204. Найти фигуру F , если ее точки служат центрами окружностей, касающихся окружности S и прямой l , причем прямая l касается окружности S .

205. Доказать, что если хорда параболы проходит через ее фокус, то расстояние от середины этой хорды до директрисы параболы равно половине длины хорды.

206. В репере $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ даны уравнения двух парабол $\gamma: ax^2 - y - b^2 = 0$ и $\gamma': ay^2 - x - c^2 = 0$ ($a > 0$). Доказать, что точки их пересечения лежат на одной окружности.

207. Найти фигуру Φ , состоящую из точек плоскости, симметричных фокусу параболы u относительно всех ее касательных.

208. Доказать, что параболы, имеющие общий фокус, лежащий между их вершинами, пересекаются под прямым углом.

209. Доказать, что директриса параболы, касающейся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, проходит через ортоцентр этого треугольника (теорема Штейнера).

210. Пусть x_1, x_2 — абсциссы точек пересечения прямой p с параболой $y = ax^2$, x_3 — абсцисса точки $N = p \cap (Ox)$. Доказать, что $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

211. Даны парабола γ , касательная t к ней в вершине. Пусть d — другая касательная к этой же параболе и $M = t \cap d$, $(MN) \perp d$. Доказать, что прямая (MN) проходит через фокус параболы γ .

212. Найти образ прямой $Ax + By + C = 0$ в сжатии плоскости к параболе $y = ax^2$ в направлении оси ординат с коэффициентом сжатия μ (см. задачу 595).

213. Высота параболической арки равна h , а ширина ее основания равна $2l$. Найти параметр параболы.

214. Найти направление тех хорд параболы $y^2 = 8x$, которые диаметром $y = 4$ делятся пополам.

215. Дана парабола $y^2 = 10x$. Найти диаметр, делящий пополам хорды с угловым коэффициентом $k = 5$.

216. Дано уравнение параболы $y^2 = 2px$. Написать уравнение парабол, имеющих с данной параболой общий фокус и общую ось.

217. Составить уравнение параболы, зная, что:

- 1) расстояние фокуса от вершины равно 3;
- 2) фокус имеет координаты $(+5; 0)$, а ось ординат служит директрисой;
- 3) парабола симметрична относительно оси x . проходит через начало координат и через точку $M(+1; -4)$;
- 4) парабола симметрична относительно оси y , фокус помещается в точке $(0; +2)$ и вершина совпадает с началом координат;
- 5) парабола симметрична относительно оси y , проходит через начало координат и через точку $M(+6; -2)$.

218. На параболе $y^2 = 4,5x$ взята точка $M(x, y)$, находящаяся от директрисы на расстоянии $d = 9,125$. Вычислить расстояние этой точки от вершины параболы.

219. Построить параболу, пользуясь ее определением.

220. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b , Оба катета разделены на одинаковое число частей; через точки деления катета a (рис. 51) проведены прямые, параллельные катету b , а точки деления катета b соединены прямыми линиями с вершиной противоположащего угла. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проведенных из тех точек деления катетов, которые имеют одинаковые номера, если нумерация на катете a начинается от вершины острого угла, а на b — от вершины прямого угла.

221. Каким треугольником можно воспользоваться, чтобы, согласно предыдущей задаче, построить параболу $y^2 = 5x$, и как дополнить это построение, чтобы получить точки параболы вне треугольника?

222. Найти признак, по которому можно было бы судить о расположении точек, данных своими координатами, относительно параболы $y^2 = 2px$.

223. Вычислить длину сторон правильного треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 2px$.

224. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 18x$ со следующими прямыми:

1) $6x + y - 6 = 0$; 2) $9x - 2y + 2 = 0$; 3) $4x - y + 5 = 0$; 4) $y - 3 = 0$.

225. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 12x$: с эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

226. Составить уравнение общей хорды параболы $y^2 = 18x$ и круга $(x+6)+y^2=100$.

227. Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

228*. Составить уравнения сторон треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 8x$, зная, что одна из его вершин совпадает с вершиной параболы, а точка пересечения высот совпадает с фокусом параболы.

229. Через точку $A (+2; +1)$ провести такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая делилась бы в данной точке пополам.

230. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox , и ее параметр $p=3$;

2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox , и ее параметр $p=0,5$;

3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Oy , и ее параметр $p=1/4$;

4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy , и ее параметр $p=3$.

231. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

232. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $A (9;6)$;

2) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B (-1;3)$;

3) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C (1;1)$;

4) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $D (4;-8)$.

233. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20 м. Величина его прогиба на расстоянии

2 м от точки крепления, считая по горизонтали, равна 14,4 см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы.

234. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $E(0; -3)$ и проходит через начало координат, зная, что ее осью служит ось Oy .

235. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = +2\sqrt{x}$, 2) $y = +\sqrt{-x}$, 3) $y = -3\sqrt{-2x}$, 4) $y = -2\sqrt{x}$, 5) $x = +\sqrt{5y}$,

6) $x = -5\sqrt{-y}$, 7) $x = -\sqrt{3y}$, 8) $x = +4\sqrt{-y}$

236. Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

237. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

238. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.

239. На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус равен 13.

240. Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7; 0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$.

241. Составить уравнение параболы. Зная, что ее вершина совпадает с точкой $(\alpha; \beta)$ параметр равен p , ось параллельна оси Ox и парабола простирается в бесконечность: 1) в положительном направлении оси Ox ;

2) в отрицательном направлении оси Ox .

242. Составить уравнение параболы. Зная, что ее вершина совпадает с точкой $(\alpha; \beta)$ параметр равен p , ось параллельна оси Oy и парабола простирается в бесконечность:

а) в положительном направлении оси Oy (т.е. парабола является восходящей);

б) в отрицательном направлении оси Oy (т.е. парабола является нисходящей).

243. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A , величину параметра p и уравнение директрисы: 1) $y^2 = 4 - 6x$; 2) $x^2 = 6y + 2$; 3) $y^2 = 4x - 8$; 4) $x^2 = 2 - y$.

244. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p : 1) $y = 1/4x^2 + x + 2$; 2) $y = 4x^2 - 8x + 7$; 3) $y = -1/6x^2 + 2x - 7$.

245. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p :

1) $x = y^2 - 12y + 14$; 2) $x = -1/4y^2 + y$; 3) $x = -y^2 + 2y - 1$.

246. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$, 2) $x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$, 3) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$, 4) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$.

247. Составить уравнение параболы, если дан ее фокус $F(7; 2)$ и директриса $x - 5 = 0$.

248. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(4; 3)$ и директриса $y + 1 = 0$.

249. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

250. Даны вершина параболы $A(6; -3)$ и уравнение ее директрисы $3x - 5y + 1 = 0$. Найти фокус F этой параболы.

251. Даны вершина параболы $A(-2; -1)$ и уравнение ее директрисы $x + 2y - 1 = 0$. Составить уравнение этой параболы.

252. Определить точки пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ и параболы $x^2 = 4y$.

253. Определить точки пересечения прямой $3x + 4y - 12 = 0$ и параболы $y^2 = -9x$.

254. Определить точки пересечения прямой $3x - 2y + 6 = 0$ и параболы $y^2 = 6x$.

255. Определить координаты фокуса F и составить уравнение директрисы для каждой из следующих парабол:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = -4y$; в) $y^2 = -2x$;

г) $x^2 = 3y$; д) $2x^2 - 3y = 0$; е) $3y^2 + 16x = 0$.

256. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:
а) расстояние от фокуса, лежащего на оси Ox , до вершины равно 4; б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $M(1, 2)$; в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $M(5, 1)$.

257. Составить каноническое уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

- а) фокус имеет координаты $(3, 0)$;
б) фокус имеет координаты $(0, 5)$;
в) директриса имеет уравнение $x + 15 = 0$;
г) директриса имеет уравнение $y + 12 = 0$.

258. Вычислить фокальный радиус FM точки M параболы $y^2 = 8x$, если ее абсцисса равна 8. Здесь F — фокус параболы.

259. Под острым углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, упал на расстоянии 24 м от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 6 м.

260. Определить площадь неориентированного треугольника, у которого одна вершина принадлежит директрисе параболы $y^2 = 2px$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси Ox .

261. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC , вписанного в параболу с параметром p , в предположении, что точка A совпадает с вершиной параболы.

262. Найти длины сторон треугольника, вписанного в параболу с параметром p , если одна вершина совпадает с вершиной параболы, а ортоцентр — с фокусом.

263. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(3, 1)$, на которой парабола $y^2 = 4x$ отсекает хорду, серединой которой служит точка P .

264. Найти множество середин всех хорд параболы $y^2 = 2px$, имеющих угловой коэффициент $k \neq 0$.

265. Точка M называется внутренней точкой параболы, если любая прямая, проходящая через точку M , не параллельная оси параболы, пересекает параболу в двух точках. Доказать, что точка $M(x, y)$ является внутренней точкой параболы $y^2 = 2px$ тогда и только тогда, когда $y^2 - 2px < 0$.

266. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

$$a) \begin{cases} y^2 - 10x < 0, \\ 5x - 3y - 15 < 0, \\ y - 2 < 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 + 8y < 0, \\ 2x + 3y + 6 < 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$$

267. Найти кратчайшее расстояние от точек параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.