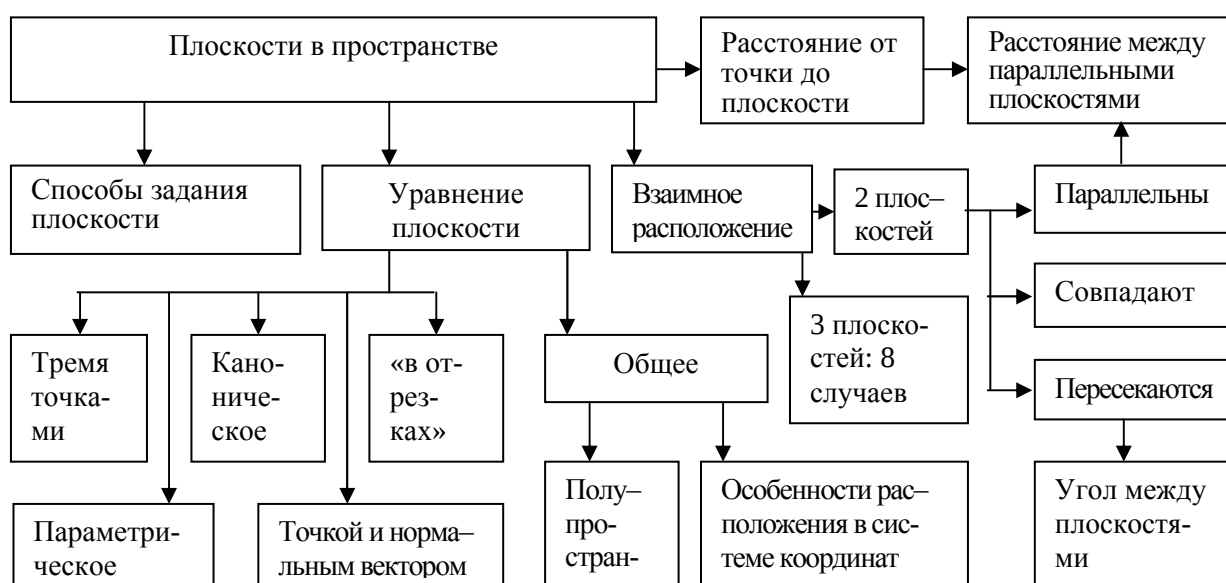


Тема: **Плоскости**

План

1. Способы задания и уравнения плоскости.
2. Общее уравнение плоскости.
3. Лемма о параллельности вектора и плоскости. Особенности расположения плоскости в АСК.
4. Аналитическое задание полупространств.
5. Взаимное расположение двух и трех плоскостей.
6. Расстояние от точки до плоскости.
7. Угол между двумя плоскостями.

Структурно-логическая схема



Ключевые термины и понятия

Направляющее подпространство плоскости, нормальный вектор плоскости, каноническое уравнение плоскости, параметрические уравнения плоскости, уравнение плоскости «в отрезках», общее уравнение плоскости, полупространство, взаимное расположение плоскостей, совпадающие, параллельные, пересекающиеся плоскости, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между параллельными плоскостями.

Уравнение плоскости. Особенности расположения плоскости в системе координат. Полупространства

Основные факты

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость σ . Множество L всех векторов, параллельных плоскости σ назовем *направляющим подпространством* плоскости σ . Направляющее подпространство $L=L(\vec{a}, \vec{b})$ плоскости σ можно считать известным, если даны какие-либо два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, параллельных этой плоскости.

Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и в этой системе известны координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и двух неколлинеарных векторов:

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда можно составить уравнение плоскости σ , проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее подпространство $L(\vec{a}, \vec{b})$:

$$(21) \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* плоскости.

$$(22) \quad \begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases} \quad - \text{параметрические уравнения плоскости с параметрами } u$$

и v .

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и в этой системе известны координаты трех неколлинеарных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ данной плоскости.

$$(23) \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \text{уравнение плоскости, заданной тремя точками.}$$

Вектор $\vec{n}$ называют *перпендикулярным* плоскости σ или *нормальным* вектором этой плоскости, если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору из направляющего подпространства плоскости σ .

Уравнение плоскости σ , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$ имеет вид:

$$(24) \quad A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

Если в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ задана плоскость σ , которая отсекает на оси Ox отрезок a , на оси Oy – отрезок b , а на оси Oz – отрезок c , то можно составить уравнение плоскости «в отрезках»:

$$(25) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Плоскость является *алгебраической поверхностью первого порядка* и любая алгебраическая поверхность первого порядка есть плоскость.

Теорема. *Поверхность в пространстве, заданная в аффинной системе координат уравнением первой степени*

$$(26) \quad Ax + By + Cz + D = 0, \text{ есть плоскость. При этом векторы } \vec{a}(0, -C, B), \vec{b}(-C, 0, A) \text{ и } \vec{c}(-B, A, 0) \text{ принадлежат направляющему подпространству этой плоскости и какие-либо два из них образуют базис этого подпространства.}$$

Уравнение (26) называется *общим уравнением плоскости*, а x , y и z называются *текущими координатами* точки плоскости.

Если система координат прямоугольная, то вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярен плоскости (26).

Лемма. *Пусть в аффинной системе координат задана плоскость σ уравнением*

(26) и вектор $\vec{r}(p_1, p_2, p_3)$. Для того чтобы вектор $\vec{r}$ был параллелен плоскости σ , необходимо и достаточно, чтобы

$$(27) \quad Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0.$$

Пусть в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ дана плоскость общим уравнением (26). Если некоторые из чисел A, B, C и D равны нулю, то плоскость обладает следующими особенностями расположения относительно системы координат:

- 1) плоскость *проходит через начало координат* $\Leftrightarrow D=0$;
- 2) плоскость *параллельна оси Ox* $\Leftrightarrow A=0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$;
плоскость *содержит ось Ox* $\Leftrightarrow A=0, B \neq 0, C \neq 0, D=0$;
- 3) плоскость *параллельна оси Oy* $\Leftrightarrow B=0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$;
плоскость *содержит ось Oy* $\Leftrightarrow B=0, A \neq 0, C \neq 0, D=0$;
- 4) плоскость *параллельна оси Oz* $\Leftrightarrow C=0, A \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$;
плоскость *содержит ось Oz* $\Leftrightarrow C=0, A \neq 0, B \neq 0, D=0$;
- 5) плоскость *параллельна плоскости Oyz* $\Leftrightarrow A \neq 0, B=0, C=0, D \neq 0$;
плоскость *совпадает с плоскостью Oyz* $\Leftrightarrow A \neq 0, B=0, C=0, D=0$;
- 6) плоскость *параллельна плоскости Oxz* $\Leftrightarrow B \neq 0, A=0, C=0, D \neq 0$;
плоскость *совпадает с плоскостью Oxz* $\Leftrightarrow B \neq 0, A=0, C=0, D=0$;
- 7) плоскость *параллельна плоскости Oxy* $\Leftrightarrow C \neq 0, A=0, B=0, D \neq 0$;
плоскость *совпадает с плоскостью Oxy* $\Leftrightarrow C \neq 0, A=0, B=0, D=0$.

Плоскость σ разделяет множество точек пространства, не принадлежащих ей, на два непересекающихся подмножества. Эти подмножества называют *полупространствами с общей границей σ* .

Теорема. Если в аффинной системе координат прямая d задана уравнением (26), то полупространства с границей σ определяются аналитически неравенствами:

$$(28) \quad Ax + By + Cz + D > 0,$$

$$(29) \quad Ax + By + Cz + D < 0.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 1

В прямоугольной системе координат даны прямая d уравнением $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$, плоскость σ уравнением $2x + 3y - z + 1 = 0$ и точка $M_0(1, 2, 3)$. Написать уравнение плоскости π , проходящей через точку M_0 , перпендикулярной плоскости σ и параллельной прямой d .

Решение

1 способ.

Т.к. искомая плоскость π параллельна прямой d , то направляющий вектор этой прямой $\vec{d}(1, 2, 2)$ принадлежит направляющему подпространству плоскости π .

Т.к. плоскость σ перпендикулярна плоскости π , то нормальный вектор $\vec{n}(2, 3, -1)$ плоскости σ принадлежит направляющему подпространству плоскости π .

Составим уравнение плоскости π по формуле (21):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad -2x+2+4y-8+3z-9-6x+6+y-2-4z+12=0, \quad 8x-5y+z-1=0.$$

2 способ.

Уравнение плоскости π будем искать по формуле (24) в виде:

$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0$, где $\vec{n}(A,B,C)$ – нормальный вектор искомой плоскости.

Коэффициенты A, B, C найдем из следующих условий:

1) т.к. $\vec{n} \parallel \sigma$, то по лемме о параллельности вектора и плоскости (27) имеем:

$$2A+3B-C=0;$$

2) т.к. $\vec{n}$ перпендикулярен направляющему вектору прямой d , то по условию перпендикулярности векторов: $A+2B+2C=0$.

Решая совместно эти уравнения, получим: $A=8, B=-5, C=1$ – одно из решений этой системы.

Следовательно, искомая плоскость задается уравнением:

$$8(x-1)-5(y-2)+(z-3)=0, \text{ или } 8x-5y+z-1=0.$$

Задача 2

В аффинной системе координат даны прямая d уравнением $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ и

точка $M_0(1,2,3)$. Написать уравнение плоскости π , проходящей через точку M_0 и прямую d .

Решение

Найдем координаты каких-нибудь двух точек M_1 и M_2 , принадлежащих прямой d .

В качестве таких точек можно взять, например, $M_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M_2(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

Искомая плоскость однозначно определяется тремя точками M_0, M_1 и M_2 . Тогда по формуле (23), запишем ее уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & 2 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 3

Даны точки $M_1(5,0,0)$, $M_2(-1,2,-3)$, $M_3(2,1,1)$ и плоскость $x-2y+4z-1=0$. Среди указанных точек выбрать те, каждая из которых с началом координат $O(0,0,0)$ лежит по разные стороны от данной плоскости.

Решение

Полупространство, которому принадлежит начало координат, определяется неравенством $x-2y+4z-1 < 0$, так как координаты точки $O(0,0,0)$ удовлетворяют этому неравенству. Координаты точки M_2 удовлетворяют этому же неравенству, а координаты точек M_1 и M_3 – неравенству $x-2y+4z-1 > 0$:

$$5-2 \cdot 0+4 \cdot 0-1 > 0 \text{ и } 2-2 \cdot 1+4 \cdot 1-1 > 0.$$

Таким образом, точки O и M_1 , а также O и M_3 лежат по разные стороны от данной плоскости. Следовательно, искомыми точками являются M_1 и M_3 .

Задачи для самостоятельного решения

62. Напишите уравнение плоскости, проходящей

а) через точку $(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z = 1$;

б) через начало координат перпендикулярно плоскостям

$$2x - y + 5z = 2 \text{ и } x + 3y - z = z;$$

в) через точку $(0, 0, 1)$ и $(3, 0, 0)$ и образующей угол 60° с плоскостью xy .

63. На оси Oz найдите точку, равноудаленную от плоскостей $x + 4y - 3z - 2 = 0$ и $5x + z + 8 = 0$.

64. Через линию пересечения плоскостей $x + 28y - 2z + 17 = 0$ и $5x + 8y - z + 1 = 0$ проведите плоскость, касающуюся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

65. Через линию пересечения плоскостей $x + 5y + z = 0$ и $x - z + 4 = 0$ проведите плоскость, образующую угол $\pi/4$ с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

66. Укажите особенности в расположении относительно системы координат плоскости:

а) $2x - y + 5z = 0$;

б) $y + 7z - 3 = 0$;

в) $4x - 5z - 1 = 0$;

г) $14z - 9 = 0$;

д) $11y + 3z = 0$;

е) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{-4} = 1$.

67. Напишите уравнение плоскости, проходящей через:

а) точку $M(2, 1, -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}(1, 2, 2)$;

б) точку $M(-3, 2, -5)$ параллельно плоскости xOy ;

в) точки $M(1, 2, 3)$ и $P(2, 3, 1)$ параллельно оси аппликат;

г) точку $M(4, 5, -5)$ и ось абсцисс;

д) точку $M(1, -1, 1)$ параллельно векторам $\vec{j}$ и $\vec{k}$;

е) начало координат параллельно векторам $\vec{a}(1, 1, 1)$ и $\vec{b}(-2, 1, 3)$;

ж) точку $M(3, -1, -5)$ параллельно векторам $\vec{a}(3, -2, 2)$ и $\vec{b}(5, -4, 3)$;

з) три точки $M(1, 1, 1)$, $K(2, 0, -1)$, $P(3, 4, 5)$.

68. Напишите уравнения в отрезках плоскостей $2x + 3y - z - 2 = 0$ и $12x + 6y - z + 3 = 0$.

69. Определить координаты нескольких точек, лежащих в плоскости $3x - 2y + z - 12 = 0$.

70. Определить координаты точки, имеющей абсциссу, равную единице, и расположенной в плоскостях Oxz и $2x - y + z - 6 = 0$.

71. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $A(2, 0, 3)$ и параллельной векторам $\vec{p}_1(1, 0, 1)$ и $\vec{p}_2(2, 1, 3)$;

б) проходящей через точку $A(0, 0, 1)$ и параллельной векторам $\vec{p}_1(2, 1, 5)$ и $\vec{p}_2(1, 0, 1)$.

72. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, -1, 3)$ и параллельной вектору $\vec{p}(1, 2, 2)$;

б) проходящей через точки $M_1(-1, 0, 0)$, $M_2(0, 0, 1)$ и параллельной вектору $\vec{p}(2, 1, 2)$;

в) проходящей через ось Ox и точку $A(1, 1, 1)$.

73. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 1, 3)$ и $M_3(0, -1, 2)$;

б) проходящей через точки $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 2, 3)$ и $M_3(0, 3, 6)$.

74. Дан тетраэдр $ABCD$. Приняв точку A за начало координат и полагая $\vec{e}_1 = \vec{AB}$, $\vec{e}_2 = \vec{AC}$ и $\vec{e}_3 = \vec{AD}$, написать уравнения всех граней тетраэдра и плоскости ECD , где E – середина ребра AB .

75. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четверки точек:

а) $(3, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(-1, 0, -5)$, $(4, 1, 5)$;

б) $(2, 1, -1)$, $(1, -1, 2)$, $(0, 4, -2)$, $(3, 1, -2)$;

в) $(0,0,-1)$, $(1,3,4)$, $(5,0,-3)$, $(4, 4, 1)$; г) $(0,0,2)$, $(0,0,5)$, $(1,1,0)$, $(4,1,2)$.

76. Даны вершины тетраэдра $A(4, 0, 2)$, $B(0,5,1)$, $C(4,-1,3)$ и $D(3,-1,5)$. Написать:

- а) уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной ребру CD ;
- б) уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD .

77. Написать уравнения плоскостей:

- а) проходящих через точку $M_0(1, 2, -1)$ и параллельных каждой из координатных плоскостей;
- б) проходящих через две точки $M_1(1, 2, -4)$, $M_2(2, 0, -3)$ и параллельных каждой из координатных осей;
- в) проходящих через точку $M(2,1,-5)$ и через каждую из координатных осей.

78. Составить уравнения плоскостей, каждая из которых проходит через одну из осей координат и параллельна вектору $\vec{p}(1,-2,3)$.

79. Написать «в отрезках» уравнения следующих плоскостей:

- а) $2x - y + 3z + 2 = 0$; б) $1/2x - 3y + z + 1 = 0$;
- в) плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(3, 1, 5)$ и $M_3(1, 2, 3)$.

80. Плоскость проходит через точку $M(1, -2, 5)$ и отсекает на оси абсцисс направленный отрезок с длиной $a=|-3|$, а на оси аппликат отрезок $c=1$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

81. Написать уравнение плоскости:

- а) параллельной оси Oz и отсекающей на оси Ox направленный отрезок длиной $a=3$, а на оси Oy направленный отрезок длиной $b=|-4|$;
- б) параллельной оси Ox и отсекающей на осях Oy и Oz равные отрезки длиной $a=b=4$.

82. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3, 2, 4)$ и отсекает на осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

83. Выяснить, какие из векторов $\vec{p}_1(1,-3,4)$, $\vec{p}_2(0,6,4)$, $\vec{p}_3(-1,0,0)$, $\vec{p}_4(3,0,1)$ параллельны плоскости $x+2y-3z+1=0$.

84. В общей декартовой системе координат дана плоскость $2x-y+3z+5=0$. Определить:

- а) координаты нескольких векторов, параллельных данной плоскости;
- б) координаты нескольких векторов, параллельных одновременно данной плоскости и одной из координатных плоскостей.

85. Написать уравнение плоскости:

- а) проходящей через точку $M_0(2,3,-1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(1,2,-4)$;
- б) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n}(0,-3,4)$.

86. Дан тетраэдр: $A(-1,2,5)$, $B(0,-4,5)$, $C(-3,2,1)$ и $D(1,2,4)$. Написать уравнения трех плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных соответственно сторонам AB , BC и CA .

87. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

- 1) $3x-5z+1=0$; 2) $9y-2=0$; 3) $x+y-5=0$;
- 4) $2x+3y-7z=0$; 5) $8y-3z=0$

относительно осей координат.

88. Написать уравнение плоскости:

- 1) параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $(2,-5,3)$;
- 2) проходящей через ось Oz и через точку $(-3,1, -2)$;
- 3) параллельной оси Ox и проходящей через две точки $(4,0,-2)$ и $(5,1,7)$.

89. Вычислить отрезки, отсекаемые на осях координат следующими плоскостями

- 1) $2x-3y-z+12=0$; 2) $5x+y-3z-15=0$; 3) $x-y+z-1=0$;
- 2) $x-4z+6=0$; 2) $5x-2y+z=0$; 3) $x-7=0$.

90. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}(1,-2,3)$.

91. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет

нормальный вектор $\vec{n}(5,0,-3)$.

92. Точка $P(2,-1,-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

93. Даны две точки $M_1(3,-1,2)$ и $M_2(4,-2,-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

94. Составить уравнение плоскости, проходящей через $M_1(3,4,-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}(3,1,-1)$ и $\vec{b}(1,-2,1)$.

95. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2,-1,3)$ и $M_2(3,1,2)$ параллельно вектору $\vec{a}(3,-1,4)$.

96. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$ и $M_3(2,0,2)$.

97. Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей:

- 1) $2x-y-2z+5=0$; 2) $x+5y-z=0$; 3) $3x-2y-7=0$;
4) $5y-3z=0$; 5) $x+2=0$; 6) $y-3=0$.

98. Составить уравнение плоскости, которая:

- а) проходит через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$;
б) проходит через точку $M_1(3,-2,-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

99. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$;

100. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2,-1,1)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-z+1=0$, $y=0$.

101. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно к плоскостям $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, может быть представлено

в следующем виде:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

102. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1,-1,-2)$ и $M_2(3,1,1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y-3z-5=0$.

103. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярно к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, может быть представлено в

следующем виде:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями

Основные факты

Пусть плоскости σ_1 и σ_2 заданы соответственно уравнениями:

(30) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и

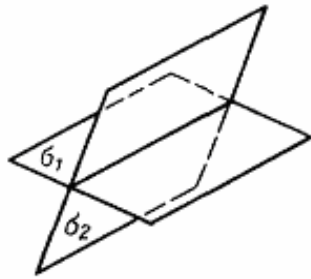
(31) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Возможны три случая взаимного расположения двух плоскостей:

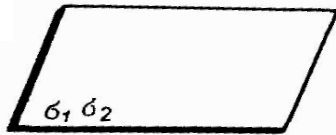
1) Плоскости σ_1 и σ_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow \neg \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \right)$ (рис. а);

2) Плоскости σ_1 и σ_2 *совпадают* $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ (рис. б);

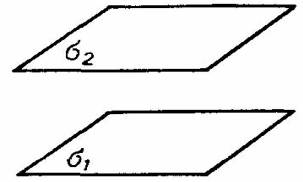
3) Плоскости σ_1 и σ_2 параллельны $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ (рис. в).



а)



б)



в)

Пусть в некоторой аффинной системе координат плоскости σ_1 , σ_2 и σ_3 заданы соответственно уравнениями:

(30) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

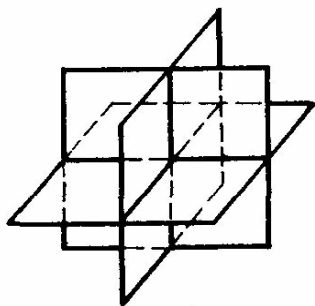
(31) $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ и

(32) $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$.

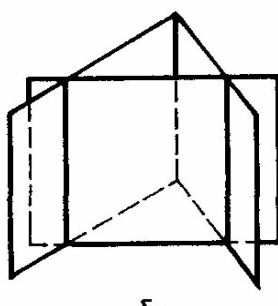
Вопрос о взаимном расположении плоскостей σ_1 , σ_2 и σ_3 полностью сводится к исследованию системы линейных уравнений (30), (31) и (32).

Возможны восемь следующих случаев взаимного расположения этих плоскостей:

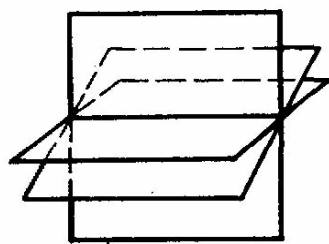
- а) плоскости имеют единственную общую точку;
- б) плоскости попарно пересекаются, но не имеют общей точки;
- в) плоскости попарно различны, но проходят через одну прямую;
- г) две из плоскостей параллельны, а третья их пересекает;
- д) три плоскости попарно параллельны;
- е) две плоскости совпадают, а третья их пересекает;
- ж) две плоскости совпадают, а третья им параллельна;
- з) все три плоскости совпадают.



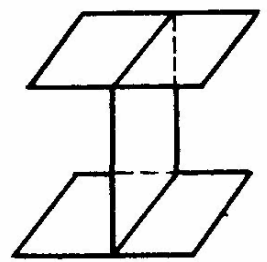
а)



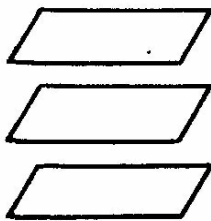
б)



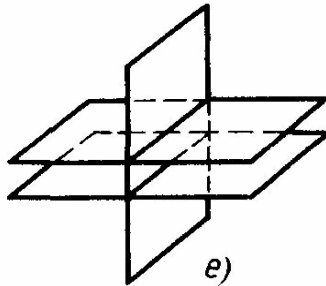
в)



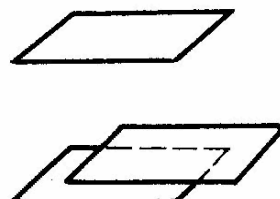
г)



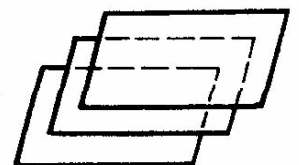
д)



е)



ж)



з)

Пусть в прямоугольной системе координат даны две пересекающиеся плоскости σ_1 и σ_2 соответственно уравнениями (30) и (31).

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла, и любой из этих углов называется *углом между данными плоскостями*.

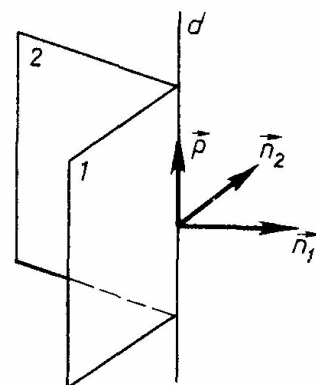
Так как векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярны соответственно данным плоскостям, то угол $\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ равен линейному углу одного из двугранных углов, образованных плоскостями σ_1 и σ_2 .

Условие перпендикулярности:

$$(33) \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Если плоскости не перпендикулярны, то угол между ними можно вычислить по формуле:

$$(34) \quad \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



Примеры решения типовых задач

Задача 4

В аффинной системе координат даны плоскость σ уравнением $2x - 3y + z - 1 = 0$ и точка $M_0(1, 2, 3)$. Написать уравнение плоскости π , проходящей через точку M_0 и параллельной плоскости σ .

Решение

Уравнение плоскости π будем искать в виде: $2x - 3y + z + D = 0$.

Так как искомая плоскость проходит через точку $M_0(1, 2, 3)$, то:
 $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + D = 0$.

Отсюда, $D = 1$. Следовательно, π : $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Задача 5

Выяснить взаимное расположение плоскостей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, заданных следующими уравнениями в аффинной системе координат:

$$\sigma_1: x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_2: x + 4y - 5 = 0, \quad \sigma_3: 2x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

Решение

Для того чтобы выяснить, какой из случаев б) — з) имеет место, исследуем сначала взаимное расположение плоскостей σ_1 и σ_2 . Для этих плоскостей выполняется условие пересечения, поэтому σ_1 и σ_2 пересекаются по прямой (случай б) взаимного расположения двух плоскостей).

Далее, выясним взаимное расположение плоскостей σ_1 и σ_3 . Для этих плоскостей выполняется условие параллельности, поэтому $\sigma_1 \parallel \sigma_3$ (случай в) взаимного расположения двух плоскостей). Отсюда следует, что плоскость σ_2 , пересекая плоскость σ_1 , пересекает также и параллельную ей плоскость σ_3 .

Итак, плоскости σ_1 и σ_3 параллельны, а плоскость σ_2 их пересекает (случай г) взаимного расположения трех плоскостей).

Задача 6

Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что три плоскости, каждая из которых проходит через ребро основания тетраэдра и середину противоположного к нему ребра, пересекаются в одной точке.

Решение

Выберем аффинную систему координат

$R=(A, B, C, D)$. В этой системе $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,1)$.

Пусть K, L, M – середины ребер. Тогда $K(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $L(0,0, \frac{1}{2})$, $M(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Напишем уравнения плоскостей (ABK) , (BCL) , (ACM) по формуле (23):

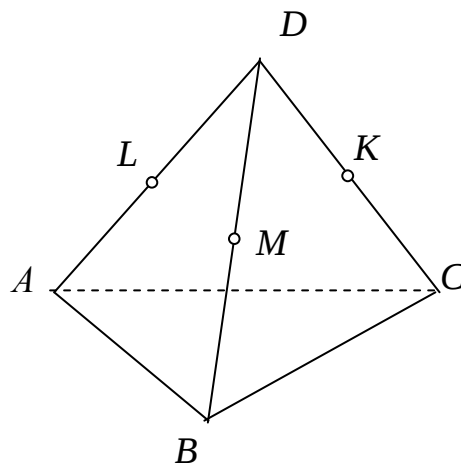
$$(ABK): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & 2 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = 0, \quad y-z=0.$$

$$(BCL): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & 2 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = 0, \quad x-z=0.$$

$$(ACM): \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{2}{3} & 2 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = 0, \quad x+y+2z-1=0.$$

Объединив полученные уравнения в систему и решив ее, получим единственное решение: $x=y=z=\frac{1}{4}$. Следовательно, плоскости пересекаются в точке с координатами

$$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}).$$



Задачи для самостоятельного решения

104. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

- 1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$;
- 2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y+2z-1=0$;
- 3) $x-3z+2=0$, $2x-6z-7=0$.

105. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

- 1) $3x-y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$;
- 2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$;
- 3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$.

106. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости;

- 1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;
- 2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;
- 3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

- 107.** Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:
- 1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;
 - 2) $5x+y-3z-3=0$, $2x+ly-3z+1=0$;
 - 3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.
- 108.** Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:
- 1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;
 - 2) $3y-z=0$, $2y+z=0$;
 - 3) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$;
 - 4) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.
- 109.** Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями:
- а) $3x-y+7z-4=0$ и $5x+3y-5z+2=0$; б) $x-7y+6=0$ и $3x-4y+5z-6=0$.
- 110.** Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей:
- а) $16x+8y+2z+1=0$, $2x-2y+z+5=0$; б) $2x+5y+4z+15=0$, $6x-3z+2=0$.
- 111.** Установить, что три плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x-y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.
- 112.** Доказать, что три плоскости $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ проходят через одну прямую.
- 113.** Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.
- 114.** Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$:
- 1) имеют одну общую точку;
 - 2) проходят через одну прямую;
 - 3) пересекаются по трем различным параллельным прямым.
- 115.** Через точку $M(-5,16,12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox , другая – ось Oy . Вычислить угол между этими двумя плоскостями.
- 116.** Построить линии пересечения координатных плоскостей с плоскостью $5x+2y-3z-10=0$.
- 117.** Даны две пересекающиеся плоскости $x-3y+2z+1=0$, $2x-y+z=0$. Определить:
- а) координаты некоторой точки, лежащей на линии пересечения данных плоскостей;
 - б) координаты вектора, параллельного этим плоскостям.
- 118.** Показать, что плоскости $2x-y+z-4=0$, $x+y-z-2=0$ и $2x-y+3z-6=0$ пересекаются в одной точке; найти ее координаты.
- 119.** Показать, что плоскости $x-y+z+1=0$, $2x-y-3z-2=0$ и $4x-3y-z=0$ пересекаются по одной прямой.
- 120.** Показать, что плоскости $x-y-z+4=0$, $3x-z+5=0$, $5x+y-z+1=0$ пересекаются по трем параллельным между собой прямым.
- 121.** Указать особенности в расположении плоскостей в каждом из следующих случаев:
- а) $3x-y+1/2z-1=0$, $6x-2y+z+2=0$, $x+y-5z+3=0$;
 - б) $x+y-z+1=0$, $x+y-z=0$, $-x-y+z-1=0$;
 - в) $2x-y+3z-1/2=0$, $4x-2y+3z+1=0$, $-2x+y-3z+2=0$.
- 122.** Показать, что четыре плоскости $5x-z+3=0$, $3y+2z-1=0$, $22x+11y-44z+65=0$, $3x+4y+5z-3=0$ пересекаются в одной точке. Найти координаты этой точки.
- 123.** В общей декартовой системе координат даны две пересекающиеся плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. При каком условии линия пересечения этих плоскостей пересекается с осью Oz ?
- 124.** В общей декартовой системе координат даны две пересекающиеся плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей лежит в плоскости Oxy .

125. Вычислить углы между следующими плоскостями:

1) $4x-5y+3z-1=0$ и $x-4y-z+9=0$;

2) $3x-y+2z+15=0$ и $5x+9y-3z-1=0$;

3) $6x+2y-4x+17=0$ и $9x+3y-6z-4=0$.

126. Через точку $M(-5,16,12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox , другая – ось Oy . Вычислить угол между этими двумя плоскостями.

127. Составить уравнение плоскости:

1) проходящей через точку $(-2,7,3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$;

2) проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям:

$$2x-y+5z+3=0 \text{ и } x+3y-z-7=0;$$

3) проходящей через точки $L(0,0,1)$ и $N(3,0,0)$ и образующей угол $\pi/3$ с плоскостью Oxy .

128. Через ось Ox провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\pi/3$.

129. Найти точку пересечения следующих трех плоскостей:

1) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

2) $x-4y-2z+3=0$, $3x+y+z-5=0$, $-3z+12y+6z-7=0$;

3) $2x-y+5z-4=0$, $5x+2y-13z+23=0$, $3x-z+5=0$.

130. Проверить, имеют ли общую точку следующие четыре плоскости:

1) $5x-z+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5y-3=0$;

2) $5x+2y-6=0$, $x+y-3z=0$, $2x-3y+2z+8=0$, $3x+2z-1=0$.

Расстояние от точки до плоскости

Основные факты

Пусть M_0 – точка, не лежащая в плоскости σ . Длина перпендикуляра, проведенного из точки M_0 на плоскость σ , называется *расстоянием от точки M_0 до плоскости σ* .

В прямоугольной системе координат расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости σ , заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, вычисляется по формуле:

$$(35) \quad \rho(M_0, \sigma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние между параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$ вычисляется по формуле:

$$(36) \quad \rho(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Примеры решения типовых задач

Задача 7

В прямоугольной системе координат дана плоскость σ уравнением $3x-4y+\sqrt{11}z-5=0$. Найти расстояние от начала координат до плоскости σ .

Решение

Начало координат O имеет координаты $(0,0,0)$. По формуле (35) получим:

$$\rho(O, \sigma) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + \sqrt{11} \cdot 0 - 5|}{\sqrt{9 + 16 + 11}} = \frac{5}{6}.$$

Задача 8

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение

Так как искомая плоскость не проходит через начало координат, то ее уравнение можно записать в виде: $Ax + By + Cz + 1 = 0$.

Искомые коэффициенты A, B, C найдем из следующих условий:

- 1) $A \cdot (-1) + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0$, т.к. точка M_1 принадлежит искомой плоскости;
- 2) $A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 2 + 1 = 0$, т.к. точка M_2 принадлежит искомой плоскости;
- 3) $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ – по формуле (35).

Решая полученную систему уравнений, получаем два решения:

$$A_1 = \frac{5}{22}, \quad B_1 = \frac{7}{22}, \quad C_1 = -\frac{17}{22}; \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Итак, условию задачи удовлетворяет две плоскости:

$$5x + 7y - 17z + 22 = 0 \quad \text{и} \quad x - y - z + 2 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

131. Найдите расстояние от начала координат до плоскости $2x - y + 2z + 9 = 0$.
132. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(1, 3, -2)$ на плоскость $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.
133. Найдите расстояние между плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $Ax + By + Cz + D_1 = 0$.
134. Найти плоскость, зная, что точка $P(3; -6; 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.
135. Вычислить расстояние:
 - 1) точки $(3; 1; -1)$ от плоскости $22x + 4y - 20z - 45 = 0$,
 - 2) точки $(4; 3; -2)$ от плоскости $3x - y + 5z + 1 = 0$,
 - 3) точки $(2; 0; -\frac{1}{2})$ от плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.
136. Вычислить высоту (h_s) пирамиды с вершинами $S(0; 6; 4)$, $A(3; 5; 3)$, $B(-2; 11; -5)$, $C(1; -1; 4)$.
137. Даны две точки $A(2; 3; -2)$ и $B(7; -4; 4)$. Через точку B провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AB .
138. Положение зеркала определяется уравнением $2x - 6y + 3z - 42 = 0$. С какой точкой должно совпадать зеркальное изображение точки $A(3; -7; 5)$?
139. Найдите высоту AH тетраэдра $ABCD$, вершины которого известны: $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$, $D(3, 4, 2)$.
140. Определите, лежит ли точка $M(2, 1, 1)$ с той же стороны от плоскости $x + 2y + z - 1 = 0$, что и начало координат.
141. Определите, точки $M(2, 1, 1)$ и $P(2, 1, 3)$ лежат по одну сторону от плоскости $x + 2y - z - 2 = 0$ или по разные.
142. Определите, лежит ли начало координат внутри тетраэдра, грани которого принадлежат плоскостям $x + y + z - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - z - 1 = 0$, $z - 2 = 0$.

143. Напишите уравнение плоскости, касающейся сферы $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{25}{3}$ и параллельной плоскости $x+y+z-17=0$.
144. Напишите уравнение сферы с центром в точке $(3,-2,30)$ и касающейся плоскости $3x+4y+4=0$.
145. Найдите центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, вершины которого известны: $(1,2,3)$, $(-2,8,9)$, $(5,0,7)$, $(3,4,2)$.
146. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1,1,4)$ и от плоскости $2x-2y+z-12=0$.
147. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $x+2y-2z-1=0$ и $3x+5=0$.
148. Подвижная точка, имевшая начальное положение $M_0(5;-1;2)$, перемещается параллельно оси Oy . Найти точку ее встречи с плоскостью $x-2y-3z+7=0$.
149. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости:
а) $15x-10y+6z-190=0$; б) $2x-3y+5z-3=0$.
150. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:
а) $M_1(1,-2,2)$, $2x+y+2z-7=0$; б) $M_2(3,0,4)$, $2x+3y+8=0$; в) $M_3(-1,2,\sqrt{2})$, $5x-3y+\sqrt{2}z=0$.

Вопросы для самоподготовки

1. Что такое направляющее подпространство плоскости?
2. Какими способами задается плоскость?
3. Напишите каноническое уравнение плоскости.
4. Напишите параметрические уравнения плоскости. В чем состоит смысл параметров?
5. Напишите уравнение плоскости, заданной тремя точками.
6. Напишите уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором.
7. Напишите уравнение плоскости «в отрезках».
8. Напишите общее уравнение плоскости. Сформулируйте теорему об общем уравнении плоскости и векторах ее направляющего подпространства.
9. Каковы особенности расположения плоскости в системе координат при равенстве нулю некоторых из коэффициентов в ее общем уравнении?
10. Какими аналитическими условиями определяются полупространства с заданной границей?
11. Сформулируйте лемму о параллельности вектора и плоскости.
12. Какие случаи взаимного расположения двух плоскостей возможны? Каким аналитическим условием определяется каждый из этих случаев?
13. Какие случаи взаимного расположения трех плоскостей возможны и какими условиями они определяются?
14. Как найти угол между двумя пересекающимися плоскостями?
15. Напишите условие перпендикулярности двух плоскостей.
16. Что называется расстоянием от точки до плоскости? По каким формулам вычисляются расстояние от точки до плоскости и расстояние между двумя параллельными плоскостями?