Практическое занятие №5

Тема: **Смешанное произведение векторов.**
**Применение векторов для решения задач элементарной геометрии**

***План***

1. Определение и свойства смешанного произведения.
2. Смешанное произведение в координатах.
3. Признак компланарности векторов.
4. Приложение смешанного произведения к вычислению объемов.
5. Применение векторов для решения задач элементарной геометрии.

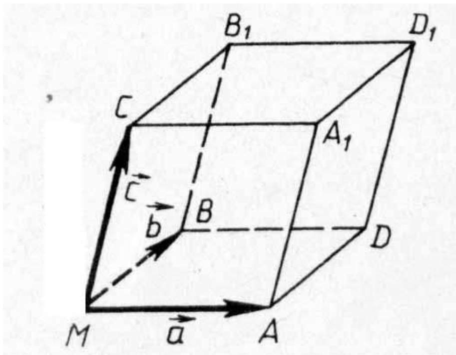
## *СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ*

### *Основные факты*

*Смешанным произведением* некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятых в данном порядке, называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначение: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

По определению $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Рис. 18




**Теорема (Геометрический смысл смешанного произведения).** *Модуль смешанного произведения трех некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:* $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = V_{\text{пар-да}}$ (рис. 18).

Из определения и теоремы следует:

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая ;

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$, если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая.

Свойства смешанного произведения:

1) **НДУ компланарности** векторов: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$;
2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\,\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\,\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}$.
3) $(\alpha\cdot\vec{a})\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,(\alpha\cdot\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,(\alpha\cdot\vec{c}) = \alpha\cdot(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$;
4) $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}$,
   $\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d} + \vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}$,
   $\vec{a}\,\vec{b}\,(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}$ (дистрибутивный закон относительно сложения).

**Теорема.** *Если векторы $\vec{a}\,(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}\,(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}\,(c_1,c_2,c_3)$ заданы своими координатами в ортонормированном правом базисе, то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ вычисляется по формуле:*

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

## *Примеры решения типовых задач*

Задача 1

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами в ортонормированном правом базисе:

а) $\vec{a}(1,-1,2)$, $\vec{b}(-2,0,1)$, $\vec{c}(5,-1,0)$;

б) $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(1,1,2)$, $\vec{c}(3,1,-1)$.

Компланарны ли эти векторы? Если нет, определить ориентацию тройки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

*Решение*

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

а) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-5+4+1=0$. Следовательно, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

б) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-18+1-3-4+3=-23<0$. Следовательно, тройка $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ - левая.

Задача 2

Доказать тождество: $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

*Решение*

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))=$ |В силу дистрибутивности векторного умножения относительно сложения| $=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})=$ |В силу НДУ№4 коллинеарности $\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$ | $=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})=$ |В силу дистрибутивности скалярного умножения относительно сложения и определения смешанного произведения| $=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}+\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{a}+\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{a}+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=$ |В силу НДУ компланарности $\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}=\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{a}=\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{a}=0$| $=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=$ |В силу свойства 2| $=2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, ч.т.д.

Задача 3

Вычислить объем тетраэдра *ABCD*, если в ортонормированном базисе: $\overrightarrow{OA}(1,2,1)$, $\overrightarrow{OB}(1,1,1)$, $\overrightarrow{OC}(1,0,2)$, $\overrightarrow{OD}(2,1,-1)$, где *O* – произвольная точка пространства.

*Решение*

$V_{\text{ABCD}}=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}|$, где $\overrightarrow{AB}(0,-1,0)$, $\overrightarrow{AC}(0,-2,1)$, $\overrightarrow{AD}(1,-1,-2)$.

$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-1$, $V_{\text{ABCD}}=\frac{1}{6}$.

## *Задачи для самостоятельного решения*

199. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

200. Показать, что $(\vec{a}+\vec{b})\cdot((\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b})=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

201. Показать, что $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\cdot((\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}))=3\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

202. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

203. Вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, если известно, что:

а) $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=30°$, $(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=90°$, $(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=90°$, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$;

б) $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=90°$, $(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=90°$, $(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=60°$, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$.

204. Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, компланарны.

205. Даны три вектора: $\vec{a}(1,-1,3)$, $\vec{b}(-2,2,1)$, $\vec{c}(3,-2,5)$. Вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

206. Проверить, компланарны ли данные векторы, если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны:

а) $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{r}=7\vec{a}+14\vec{b}-13\vec{c}$;

б) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=3\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$.

207. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если:

а) $\vec{a}(2,3,-1)$, $\vec{b}(1,-1,3)$, $\vec{c}(1,9,-11)$;

б) $\vec{a}(3,-2,1)$, $\vec{b}(2,1,2)$, $\vec{c}(3,-1,-2)$;

в) $\vec{a}(2,-1,2)$, $\vec{b}(1,2-3)$, $\vec{c}(3,-4,7)$.

208. Найти смешанное произведение и определить ориентацию тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе:

а) $\vec{a}(2,-3,1)$, $\vec{b}(1,1,2)$, $\vec{c}(3,1,-1)$;

б) $\vec{a}(-2,1,5)$, $\vec{b}(3,0,2)$, $\vec{c}(-1,4,2)$;

в) $\vec{a}(1,-1,1)$, $\vec{b}(5,2-3)$, $\vec{c}(1,4,-2)$.

209. Даны векторы $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(1,-1,1)$, $\vec{c}(\alpha,\alpha+1,1)$. При каком значении параметра $\alpha$ эти векторы компланарны?

210. Известно, что $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=3$. Вычислить:

а) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})$;

б) $(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-3\vec{a})$;

в) $(\vec{b}+3\vec{c})(2\vec{b}-\vec{c})(2\vec{b}+3\vec{c})$.

211. Доказать, что четыре точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

212. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$A$ (2,-3,1), $B$ (-1,1,1), $C$ (-4,5,6), $D$ (2,-3,6). Доказать, что $ABCD$ – плоский выпуклый четырехугольник.
213. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах
$\vec{a}$ (1,-1,1), $\vec{b}$ (5,2,-3), $\vec{c}$ (1,4,-2).

214. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$,
$\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, где $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.
215. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках:
а) $A$ (2,-1,1), $B$ (5,5,4), $C$ (3,2,-1) , $D$ (4,1,3);
б) $A$ (2,-1,-1), $B$ (5,-1,2), $C$ (3,0,-3), $D$ (6,0,-1);
в) $A$ (0,0,0), $B$ (3,4,-1), $C$ (2,3,5), $D$ (6,0,-3).
216. Найти длину высоты $AH$ тетраэдра $ABCD$, вершины которого находятся в точках:
а) $A$ (2,-4,5), $B$ (-1,-3,4), $C$ (5,5,-1), $D$ (1,-2,2);
б) $A$ (2,3,1), $B$ (4,1,-2), $C$ (6,3,7), $D$ (-5,-4,8).
217. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5куб.ед., три его вершины находятся в точках $A$(2,1,-1), $B$ (3,0,1), $C$ (2,-1,3). Найти координаты четвертой вершины $D$, если известно, что она лежит на оси $Oy$.

## *ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ*

### *Основные факты*

Идея *векторного метода* решения геометрических задач заключается в следующем. Выбирают удобным образом базис из двух неколлинеарных векторов (для планиметрической задачи) или трех некомпланарных векторов (для стереометрической задачи); условие задачи и ее заключение записывают в векторной форме; проводят решение, используя факты и формулы векторной алгебры; полученный результат формулируют в терминах задачи.

При решении задач с помощью векторов часто используют прием, основанный на единственности разложения вектора по базису: раскладывая один вектор по базису двумя способами, приравнивают соответствующие полученные коэффициенты разложения.

Примеры решения типовых задач

<u>Задача 3</u>

Найти угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.

*Решение*

Примем векторы $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}$ за базисные. Найдем угол между диагональю $B_1D$ куба и диагональю $AD_1$ грани $ADD_1A_1$ (рис. 19). (Ребро куба можно взять единичной длины без нарушения общности, так как все кубы подобны друг другу).

$$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1},$$

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}.$$

Таким образом, в выбранном ортонормированном базисе $\overrightarrow{B_1D}$ (1,1,-1), $\overrightarrow{AD_1}$ (0,1,1).

Искомый угол обозначим через φ. Тогда $cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{B_1D}| \cdot |\overrightarrow{AD_1}|} = \dfrac{0+1-1}{\sqrt{3 \cdot 2}} = 0$.

Следовательно, φ=90°.

Задача 4

Пусть точки *K*, *L*, *M*, *N* – середины соответственно сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DA* произвольного четырехугольника *ABCD* (не обязательно выпуклого). Доказать, что четырехугольник *KLMN* является параллелограммом.

*Решение*

Заметим, что $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (рис. 20);

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$, значит, *KLMN* является параллелограммом, ч.т.д.

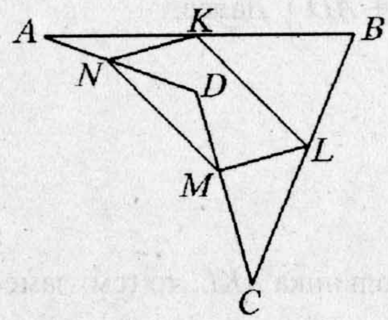



Рис. 20

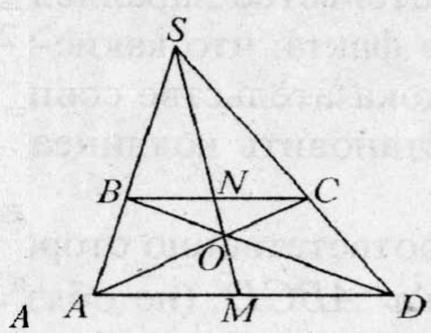



Рис. 21

Задача 5

Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

*Решение*

Обозначим середины оснований *AD* и *BC* трапеции *ABCD* соответственно через *M* и *N*, точку пересечения диагоналей – через *O*, точку пересечения продолжений боковых сторон – через *S* (рис. 21).

Из подобия треугольников *ASD* и *BSC* следует, что *BS*:*AS*=*CS*:*DS*. Обозначим это отношение через *x*. Тогда $\overrightarrow{SB} = x\,\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC} = x\,\overrightarrow{SD}$.

Так как *BO*:*OD*=*BC*:*AD*=*BS*:*AS*=*x*:1, то

$$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{SB} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{SD} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{SA} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{SD} = \frac{x}{x+1}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD}).$$

С другой стороны, $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD})$, $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{x}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD})$.

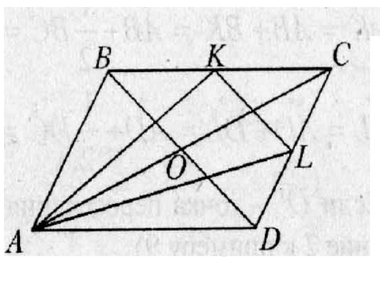
Итак, векторы $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SN}$ попарно коллинеарны, а это означает, что точки *S*, *O*, *M*, *N* лежат на одной прямой.

Задача 6

В параллелограмме *ABCD* точка *K* – середина стороны *BC*, а точка *L* – середина стороны *CD*. Найти *AD*, если *AK*=6, *AL*=3, $\angle KAL$=60°.

*Решение*

Рис. 22




$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (рис. 22).

Выразим отсюда $\overrightarrow{AD}$ через $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, откуда $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AL}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.

Но $|\overrightarrow{AK}|=6$, $|\overrightarrow{AL}|=3$, $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AL}=6\cdot3\cdot cos60°=9$, поэтому $|\overrightarrow{AD}|^2=(\frac{4}{3}\overrightarrow{AL}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK})\cdot(\frac{4}{3}\overrightarrow{AL}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK})==\frac{16}{9}|\overrightarrow{AL}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{AK}|^2-\frac{16}{9}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AL}=$

$=\frac{16}{9}\cdot9+\frac{4}{9}\cdot36-\frac{16}{9}\cdot9=16$, откуда $AD=4$.

Задача 7

Доказать обратную теорему Пифагора: треугольник $ABC$ является прямоугольным с прямым углом $A$, если $BC^2=AB^2+AC^2$.

*Решение*

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$. Отсюда после элементарных преобразований получаем: $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2$ или $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2)$. Так как по условию задачи $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2=0$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, поэтому $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, т.е. $\angle A$ – прямой, ч.т.д.

Задача 8

Доказать, что если в тетраэдре две пары противолежащих ребер взаимно перпендикулярны, то и третья пара ребер взаимно перпендикулярна.

*Решение*

Пусть $OABC$ – данный тетраэдр, у которого $OA\perp BC$ и $OB\perp AC$ (рис. 23).

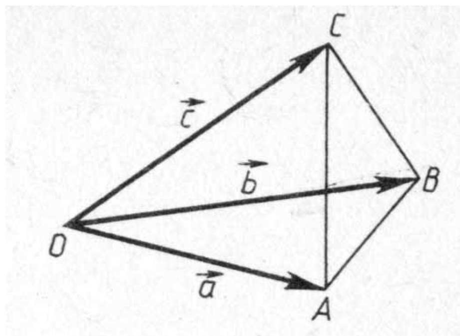
Надо доказать, что $OC\perp AB$.

Введем обозначения: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

Так как $OA\perp BC$, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ или $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$.

Аналогично, так как $OB\perp AC$, то $\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$.
Вычитая из второго равенства первое, находим:
$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$, т.е. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Отсюда следует, что $OC\perp AB$, ч.т.д.

Рис. 23




***Задачи для самостоятельного решения***

218. Точки $P$ и $Q$ – середины отрезков $AB$ и $CD$ соответственно. Доказать, что середины отрезков $AC$, $BD$ и $PQ$ принадлежат одной прямой.

219. Даны два отрезка $AB$ и $CD$. Доказать, что если $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$, то отрезки перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

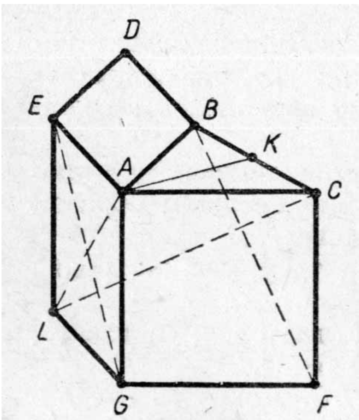
220. Доказать, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

221. Доказать, что если медианы треугольника $ABC$ соответственно параллельны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, то медианы треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны сторонам треугольника $ABC$.

222. Из медиан треугольника $ABC$ построен новый треугольник $A_1B_1C_1$, из его медиан – треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники $ABC$ и $A_2B_2C_2$ подобны; найти коэффициент подобия.
223. Две медианы треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Доказать, что $AO:OK=BO:OL=2:1$.
224. Точки $M$ и $N$ лежат соответственно на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ так, что $CM:MA=3:2$, $CN:NB=2:3$. В каком отношении делит прямая $MN$ медиану $CK$ треугольника $ABC$?
225. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.
226. Доказать, что если длины двух медиан в треугольнике равны, то этот треугольник равнобедренный.
227. Пусть $M$ – точка пересечения медиан треугольника $ABC$. Доказать, что $AM^2+BM^2+CM^2=\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+AC^2)$.
228. Точка $K$ лежит на продолжении стороны $AB$ треугольника $ABC$ за точку $B$, точка $L$ – на продолжении стороны $BC$ за точку $C$, точка $M$ – на продолжении стороны $CA$ за точку $A$, причем $AB:BK=BC:CL=CA:AM$. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников $ABC$ и $KLM$ совпадают.
229. Стороны $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ удвоены при продолжении за точки $B$, $C$, $A$ соответственно. Получены точки $M$, $N$, $P$. Найти отношение площадей треугольников $ABC$ и $MNP$.
230. Дан треугольник $ABC$ и произвольная точка $M$ пространства. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ симметричны с точкой $M$ относительно середин сторон треугольника $ABC$.Доказать,

что треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны.
231. Доказать, что биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника делит противолежащую сторону внешним образом на части, пропорциональные прилежащим сторонам.
232. Пользуясь скалярным произведением векторов, доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
233. Вершина $A$ треугольника соединена с точками $A_1$, $A_2$, делящими сторону $BC$ на три равные части. Показать, что разность квадратов отрезков $AA_1$ и $AA_2$ в три раза меньше разности квадратов сторон, выходящих из вершины $A$.
234. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если медианы проведенные из концов его основания, взаимно перпендикулярны.

Рис. 24




235. В плоскости треугольника $ABC$, на его сторонах $AB$ и $AC$ извне построены квадраты $ABDE$, $ACFG$ (рис. 24), а затем параллелограмм $AELG$. Доказать:
а) диагональ $EG$ параллелограмма перпендикулярна медиане $AK$ и вдвое больше ее;
б) диагональ $LA$ перпендикулярна $BC$;
в) прямая $LC$ перпендикулярна $BF$;
г) прямая $LB$ перпендикулярна $DC$.
236. В параллелограмме $ABCD$ точка $K$ является серединой стороны $BC$, точка $L$ – серединой стороны $CD$. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника $AKL$ совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

237. На стороне $AD$ параллелограмма $ABCD$ взята точка $M$ так, что $AM=kAD$. Прямая $BM$ пересекает диагональ $AC$ в точке $P$. Определить отношение $AP:AC$.
238. В параллелограмме $ABCD$ точки $M$ и $P$ – середины сторон $AB$ и $BC$ соответственно, $K$ – точка пересечения прямых $AP$ и $DM$. Найти отношения $AK:AP$ и $DK:DM$.
239. Вершина $D$ параллелограмма $ABCD$ соединена с точкой $K$ отрезка $BC$ такой, что $BK:KC=4:3$. Вершина $B$ соединена с точкой $L$ отрезка $CD$ такой, что $DL:LC=3:2$. В каком отношении точка $M$ пересечения прямых $DK$ и $BL$ делит отрезки $DK$ и $BL$?
240. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
241. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами нового квадрата.
242. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNPQ$ так, что вершины $M$, $N$, $P$, $Q$ лежат соответственно на сторонах $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Показать, что стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям данного квадрата $ABCD$, если $MNPQ$ не является квадратом.
243. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
244. Трапеция $AEFG$ с основаниями $EF$ и $AG$ расположена в квадрате $ABCD$ со стороной 14 так, что точки $E$, $F$, $G$ лежат на сторонах $AB$, $BC$, $CD$ соответственно. Диагонали $AF$ и $EG$ перпендикулярны, а $EG=10\sqrt{2}$. Найти периметр трапеции.
245. Доказать, что площадь всякого четырехугольника вдвое больше площади четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного.
246. Доказать, что сумма квадратов диагоналей любого четырехугольника сумме квадратов его сторон без учетверенного квадрата отрезка, соединяющего середины диагоналей..
247. Доказать, что диагональ $AC_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекает плоскость $A_1BD$ в центре тяжести треугольника $A_1BD$.
248. На каждой из трех попарно перпендикулярных прямых, проходящих через точку $O$, лежит по точке $A$, $B$, $C$ так, что $OA=2OB=4OC$. Найти расстояние от точки $O$ до центра тяжести треугольника $ABC$ и углы этого треугольника, если $OC=a$.
249. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB=a$, $AD=2a$, $AA_1=3a$. Плоские углы при вершине $A$ равны по 60°. Найти:
а) длину диагонали $BD_1$;
б) угол между прямыми $AC$ и $BD_1$.
250. Диагональ $AE$ прямоугольного параллелепипеда образует с каждым из двух ребер, выходящих из точки $A$, угол 60°. Какой угол она образует с третьим ребром, выходящим из той же точки $A$?
251. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что его объем вдвое меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1}$ как на ребрах.
252. Доказать, что в тетраэдре отрезки, каждый из которых соединяет вершины с центром тяжести противолежащей грани, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1:3, считая от грани.
253. Показать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.
254. Доказать, что каждая пара противоположных ребер $AB$ и $CD$, $AC$ и $BD$, $BC$ и $AD$ тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярна тогда и только тогда, когда
$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=BC^2+AD^2$.
255. Дан тетраэдр $PABC$. Точка $M$ лежит на ребре $AP$, причем $MA=\frac{1}{2}AP$, точка $N$ лежит на ребре $BC$, причем $NC=\frac{1}{2}CB$. Доказать, что прямые $AC$, $MN$, $PB$ параллельны одной плоскости.
256. Найти угол между двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла.

257. В пространственном четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно:
а) середины двух противоположных сторон;
б) середины двух других противоположных сторон;
в) середины диагоналей.
Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке $P$, и каждый из них точкой $P$ делится пополам.

258. Доказать, что если в некотором пространственном четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон. Доказать обратную теорему.

259. Доказать, что если $ABCD$ – пространственный четырехугольник, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$, где $AB$ и $DC$ – противоположные стороны, а $E$ и $F$ – соответственно середины сторон $AD$ и $BC$. Пользуясь этой задачей, доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

260. Пусть $M$ и $N$ – соответственно середины сторон $AB$ и $CD$ пространственного четырехугольника $ABCD$. Доказать, что середины диагоналей двух четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.

261. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ (4,3,0), $\overrightarrow{AD}$ (2,1,2), $\overrightarrow{AA_1}$ (-3,-2,5). Найти:
а) объем параллелепипеда;
б) площади граней;
в) длину высоту, проведенной из вершины $A_1$ на грань $ABCD$;
г) косинус угла между ребром $AB$ и диагональю $B_1D$;
д) косинус угла между гранями $ABCD$ и $ADD_1A_1$.

262. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overrightarrow{AB}$ (0,1,-1) и $\overrightarrow{AC}$ (2,-1,4) определяют основание, а вектор $\overrightarrow{AA_1}$ (-3,2,2) направлен по боковому ребру. Найти:
а) объем призмы;
б) площади граней;
в) высоту;
г) угол между ребрами $B_1C_1$ и $AA_1$.

263. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ (2,0,0), $\overrightarrow{AC}$ (3,4,0) и $\overrightarrow{AD}$ (3,4,2). Найти:
а) объем тетраэдра;
б) площади граней;
в) длину высоты, проведенной из вершины $D$;
г) косинус угла между ребрами $AD$ и $BC$;
д) косинус угла между гранями $ABC$ и $ADC$.

### *Вопросы для самоподготовки*

1. Как определяется угол между векторами?
2. Какие векторы называют взаимно перпендикулярными?
3. Чему равен угол между сонаправленными; противоположно направленными векторами; между произвольным и нулевым вектором?
4. Дайте определение скалярного произведения векторов. Как его обозначают?
5. Что такое скалярный квадрат вектора? Чему он равен?
6. Как найти скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе (теорема)?

7. Как найти косинус угла между векторами по их координатам в ортонормированном базисе (следствие)?
8. Сформулируйте свойства скалярного произведения векторов.
9. В чем состоит геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе? Дайте понятие направляющих косинусов вектора.
10. Каким соотношением связаны направляющие косинусы вектора?
11. Как определяется ориентация тройки векторов в пространстве?
12. Дайте определение векторного произведения векторов. Как его обозначают?
13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие №3 коллинеарности векторов.
14. Сформулируйте свойства векторного произведения векторов.
15. Как найти координаты векторного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе (теорема)?
16. Сформулируйте лемму о связи векторного и скалярного произведения векторов.
17. Как вычислить площадь треугольника, зная векторное, скалярное произведение векторов сторон или координаты вершин?
18. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как его обозначают?
19. В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения?
20. Как вычисляют смешанное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе?
21. Сформулируйте свойства смешанного произведения векторов.
22. Как применяют смешанное произведение для вычисления объема параллелепипеда, тетраэдра?
23. В чем заключается идея векторного метода решения геометрических задач?