Лекция№19

Тема: **Парабола. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы**

План лекции

1. Определение и каноническое уравнение параболы.
2. Геометрические свойства параболы. Взаимное расположение параболы и прямой, проходящей через ее центр.
3. Эксцентриситет параболы.
4. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

Определение и каноническое уравнение параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F.

Точка F называется *фокусом*, а прямая d – *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через p.

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат следующим образом: проведем через фокус F прямую l, перпендикулярную директрисе d, и обозначим через A точку пересечения этой прямой с директрисой (рис. 8).

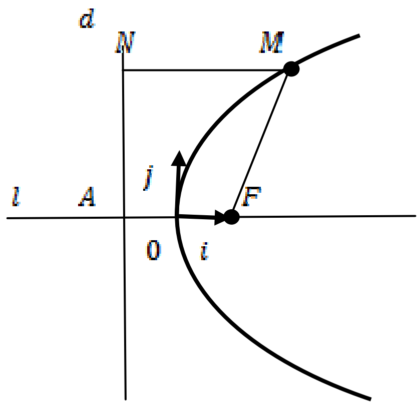

Рис.8

Примем за начало координат O – середину отрезка AF, а за ось Ox – прямую l, причем направление оси выберем так, чтобы точка F лежала на положительном луче этой оси. За ось Oy возьмем прямую, проходящую через O и параллельную директрисе d. Направление этой оси можно взять произвольно. В этой системе координат точка F имеет координаты $\left(\frac{p}{2},0\right)$, а прямая d - уравнение $x+\frac{p}{2}=0$. Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка плоскости. Если N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую d, то MN есть расстояние от M до прямой d, поэтому

$$MN=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

С другой стороны,

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Для того чтобы точка M принадлежала параболе, необходимо и достаточно, чтобы $MF=MN$ или

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{1}$$

Соотношение (1) является уравнением параболы в выбранной системе. С целью упрощения этого уравнения возведем обе его части в квадрат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2, \text{ или } x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

После приведения подобных членов получаем:

$$y^2=2px. \qquad (2)$$

Если точка лежит на параболе, то есть если ее координаты удовлетворяют соотношению (1), то ее координаты удовлетворяют также соотношению (2). Однако отсюда еще не следует, что (2) есть уравнение параболы. Мы должны показать, что если координаты точки $M(x,y)$ удовлетворяют уравнению (2), то она принадлежит параболе, то есть $MN=MF$. Имеем:

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=$$

$$=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Мы получили выражение, равное расстоянию от точки M до прямой d. Итак, точка M принадлежит параболе. Отсюда следует, что соотношение (2) эквивалентно соотношению (1) и является уравнением параболы. Оно называется *каноническим уравнением* параболы, а выбранная нами система – *канонической*.

Если поменять ролями оси координат, то уравнение (2) примет вид:

$$x^2=2py. \qquad (2')$$

В этом случае ось Ox параллельна директрисе, а ось Oy перпендикулярна ей и проходит через фокус.

Геометрические свойства параболы.

Взаимное расположение параболы и прямой, проходящей через ее вершину

а) Парабола проходит через начало канонической системы координат, так как числа (0, 0) удовлетворяют уравнению (2).

б) Парабола пересекает оси координат только в начале координат и других точек пересечения с осями координат не имеет. Эта точка называется *вершиной* параболы.

в) Парабола симметрична относительно оси Ox, так как переменная y в уравнении (2) входит только в четной степени. Но в отличие от случаев эллипса и гиперболы парабола не симметрично относительно оси Oy. Она не симметрична и относительно начало координат.

г) Изучим взаимное расположение прямых, проходящих через начало координат, с параболой. Для этой цели необходимо исследовать вопрос о существовании решений системы:

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=kx. \end{cases}$$

Подставив значение y из уравнения прямой в уравнение параболы, получаем:

$$k^2x^2-2px=0.$$

Если $k=0$, то имеем одно решение: $x=0$. Если $k\neq 0$, то два решения: $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{2p}{k^2}$. В этом случае прямая $y=kx$ пересекает параболу (2) в двух точках $M_1(0,0)$ и $M_2\left(\dfrac{2p}{k^2},\dfrac{2p}{k}\right)$. Отсюда следует, что всякая прямая, проходящая через начало координат и не совпадающая с осями координат, пересекается с параболой в двух точках – в начале координат и еще в одной точке.

д) Из уравнения (2)следует, что для любой точке параболы $x \geq 0$, поэтому парабола всеми своими точками расположена по одну сторону от канонической оси *Oy*, а именно поту же сторону, что и фокус *F*.

е) Для того чтобы иметь наглядное представление о расположении параболы на плоскости, следует построить несколько точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (2). При этом можно ограничиться точками, заданными в первой четверти, так как кривая симметрична относительно оси *Ox*. Парабола изображена на рисунке 8.

Эксцентриситет параболы

При рассмотрении директориальных свойств эллипса и гиперболы мы по существу выяснили геометрический смысл эксцентриситетов этих кривых: эксцентриситет эллипса или гиперболы есть то постоянное число, которому равно отношение расстояний от каждой точки кривой до фокуса к соответствующим расстояниям до одноименной директрисы. Из определения параболы видно, что ее точки обладают аналогичным свойством, то есть отношение расстояний от каждой точки параболы до фокуса к соответствующим расстояниям до директрисы постоянно и равно единице. Поэтому *число «единица» называется эксцентриситетом любой параболы*.

Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы

3. Обозначим через *у* линию, которая является либо эллипсом отличным от окружности, либо одной ветвью гиперболы, либо параболой. Пусть F и d – фокус и директриса этой линии, причем, если *у* – эллипс, то F – один из его фокусов, ad – соответствующая директриса (рис. 16, *а)*, а если *у* – одна ветвь гиперболы, то F и d – фокус и директриса, которые расположены по ту же сторону от второй оси симметрии гиперболы, что и ветвь *у* (рис. 16, б). Очевидно, линия γ всеми своими точками принадлежит полуплоскости А, с границей *d*, которой принадлежит точка *F*. Учитывая предыдущую теорему и определение параболы, приходим к выводу: линия γ *есть множество всех точек М полуплоскости к, таких, что FM =* $\varepsilon\rho$ *(M, d), где* е *– эксцентриситет линии у.*

Выведем уравнение линии *у* в полярной системе координат $F\vec{i}$, ПОЛЮСОМ которой является фокус F и $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{DF}}{DF}$, где D – проекция точки F на прямую d . Сначала вычислим р *(M, d),* где $M(r,\varphi)$ – произвольная точка плоскости. Если *M1* – проекция точки *M* на прямую *FD*, то р (M, *d)* = DM_1 = *DM-cosMDF*= $\overrightarrow{DM} \cdot \vec{i}$. Но, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FM}$ поэтому р$(M,d) = (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{FM})\vec{i} = \overrightarrow{DF}\vec{i} + \overrightarrow{FM}\vec{i} = DF + r\cos\varphi$.

Точка $M(r,\varphi)$ принадлежит линии γ тогда и только тогда, когда $FM = \varepsilon\rho(M,d)$ или $r = \varepsilon(DF + r\cos\varphi)$. Если положить $p = \varepsilon DF$, то отсюда получаем:

$$r(1-\varepsilon\cos\varphi) = p \qquad (1)$$

Это и есть уравнение линии γ (т. е. эллипса, одной ветви гиперболы или параболы) в полярных координатах. Из уравнения (1) при φ= 90° или φ=-90° получаем: $r = p$. Таким образом, p – полярный радиус точек N_1 и N_2, в которых пересекается линия γ с прямой l, проходящей через F и параллельной директрисе *d*. Число *p* называется *фокальным параметром*. Выясним, при каких значениях φ уравнение (1) определяет все точки линии γ. При $\varepsilon < 1$ линия γ представляет собой эллипс. В этом случае при любом φ имеем: $1-\varepsilon\cos\varphi \neq 0$, поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \qquad (2)$$

Если φ пробегает значения $0 \le \varphi \le 2\pi$, то уравнение (2) определяет все точки эллипса (рис. 16, а).

При $\varepsilon > 1$ линия γ – одна ветвь гиперболы. Уравнение (1) имеет смысл только для точек, полярные углы которых удовлетворяют неравенству $1 - \varepsilon \cos\varphi > 0$ или $\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon}$.

Пусть φ_0 – угол, для которого $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.Тогда предыдущее неравенство запишется в виде $\cos\varphi_0 > \cos\varphi$. Если φ пробегает значения $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$, то уравнение (2) определяет все точки линии γ, т. е. одной ветви гиперболы. Из равенства $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ следует, что $tg\varphi_0 = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{b}{a}$ Поэтому φ_0 – угол, который образует асимптота $y = \frac{b}{a}x$ гиперболы с действительной осью (рис.16,6).

Отметим, что если под φ_0 и r понимать обобщенные координаты точки, то при $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ уравнение (2) определяет другую ветвь гиперболы. Доказательство этого утверждения мы опускаем.

При $\varphi = 1$ линия γ представляет собой параболу и $i - \varepsilon \cos\varphi \ne 0$, если $\varphi \ne 0$. Но, как известно, на параболе нет точки, для которой $\varphi = 0$.

Таким образом, если φ пробегает значения $-\pi < \varphi \le \pi$, то уравнение (1) можно записать в виде $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$. Оно определяет все точки параболы (рис. 16, *в)*.