

План лекции

1. Определение и каноническое уравнение гиперболы.
2. Геометрические свойства гиперболы.
3. Взаимное расположение гиперболы и прямой, проходящей через ее центр.
4. Асимптоты гиперболы.
5. Эксцентриситет. Зависимость формы гиперболы от эксцентриситета.
6. Директрисы гиперболы.

Определение и каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная, меньшая чем расстояние между F_1 и F_2 .

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы, а длина отрезка $F_1 F_2$ - *фокальным расстоянием*.

Обозначим через $2a$ абсолютную величину разности расстояний любой точки гиперболы до фокусов, а через $2c$ расстояние между фокусами. По определению $c > a$. Мы предполагаем, что $a > 0$, поэтому $c > 0$ и F_1 не совпадает с F_2 .

Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало O совпало с серединой отрезка $F_1 F_2$, ось абсцисс – с прямой $F_2 F_1$, а направления осей Ox и Oy возьмем так, как показано на рисунке 4.

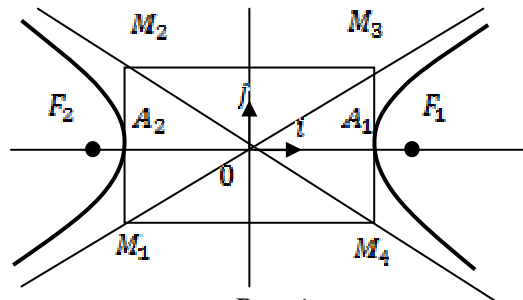


Рис.4

Так как $F_1 F_2 = 2c$, то фокусы будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы имеем:

$$MF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Воспользовавшись определением гиперболы, составим равенство:

$$\left| \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a. \quad (1)$$

Обратно, если координаты некоторой точки плоскости удовлетворяют уравнению (1), то точка принадлежит гиперболе. Таким образом, соотношение (1) является *уравнением гиперболы* в выбранной системе.

Для того чтобы упростить это уравнение, запишем его в виде:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2,$$

или

$$\pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc,$$

Это соотношение возведем в квадрат:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Если ввести обозначение

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad (2)$$

то после элементарных преобразований предыдущее уравнение приведем к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Из соотношения (1) получили соотношение (3), поэтому если точка лежит на гиперболе, то есть если ее координаты удовлетворяют уравнению (1), то они же удовлетворяют и уравнению (3). Однако отсюда еще не следует, что соотношение (3) есть уравнение гиперболы. Так же, как и в случае гиперболы, следует показать, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (3), то точка принадлежит гиперболе.

Пусть $M(x, y)$ - точка плоскости, координаты которой удовлетворяют соотношению (3). Вычислим расстояния $\rho_1 = MF_1$ и $\rho_2 = MF_2$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x - a\right|. \end{aligned}$$

Из соотношения (3) следует, что $|x| \geq a$, следовательно, если $x > 0$, то $\frac{c}{a}x - a > 0$ и

$$\rho_1 = \frac{c}{a}x - a. \quad (4)$$

Если $x < 0$, то $\frac{c}{a}x - a < 0$, поэтому

$$\rho_1 = a - \frac{c}{a}x. \quad (4')$$

Аналогично можно показать, что если $x > 0$, то

$$\rho_2 = \frac{c}{a}x + a; \quad (5)$$

если $x < 0$, то

$$\rho_2 = -\frac{c}{a}x - a. \quad (5')$$

Таким образом, если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют уравнению (3) и $x > 0$, то

$$|MF_1 - MF_2| = \left| \left(\frac{c}{a}x - a \right) - \left(\frac{c}{a}x + a \right) \right| = 2a,$$

то есть точка принадлежит гиперболе. Если $x < 0$, то, пользуясь соотношениями (4') и (5'), получаем аналогичный результат. Мы доказали, что соотношение (3) является уравнением гиперболы. Оно называется *каноническим уравнением*, а выбранная нами система – *канонической системой*.

Геометрические свойства гиперболы

а) Гипербола не проходит через начало канонической системы координат.

б) Гипербола пересекает ось Ox в двух точках: $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Однако в отличие от случая гиперболы она не пересекает ось Oy , так как система

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0$$

не имеет действительных решений. Точки A_1 и A_2 называются *вершинами*, а отрезок A_1A_2 - *действительной осью гиперболы*. Если на оси Oy взять точки B_1 и B_2 так, чтобы они были симметричны относительно центра O и каждая из них отстояла от O на расстоянии b , то получим отрезок B_1B_2 , который называется *мнимой осью гиперболы*. Легко видеть, что $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$, число a называется действительной полуосью, а число b - мнимой.

в) Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, так как переменные x и y входят в уравнение гиперболы только в четных степенях. Поэтому начало канонической системы координат называется *центром* гиперболы, прямая A_1A_2 - действительной осью симметрии, а B_1B_2 - мнимой осью симметрии.

Взаимное расположение гиперболы и прямой, проходящей через ее центр

Выясним вопрос о взаимном расположении прямой, проходящей через начало координат, с гиперболой. Для этой цели достаточно исследовать вопрос о существовании решений системы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = kx. \quad (6)$$

Подставив значение y из уравнения прямой в уравнение гиперболы, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1, \quad x^2(b^2 - k^2 a^2) = a^2 b^2. \quad (7)$$

Нас интересуют действительные решения этого уравнения. Возможны три случая:

1) $b^2 - k^2 a^2 > 0$. Уравнение имеет два действительных решения:

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}} \text{ и } x_2 = -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}.$$

В этом случае прямая $y = kx$ пересекает гиперболу (3) в двух точках, симметричных относительно начала координат:

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}\right), \quad M_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \frac{-kab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}\right).$$

2) $b^2 - k^2 a^2 = 0$. В этом случае уравнение (7) не имеет ни действительных, ни комплексных решений. Соответственно этому система (6) несовместна. Геометрически это означает, что прямые $y = kx$ в этом случае не пересекаются с гиперболой.

3) $b^2 - k^2 a^2 < 0$. Система уравнений (6) имеет комплексные решения, поэтому и в этом случае прямая $y = kx$ не пересекает гиперболу.

Теперь выясним, как расположены прямые, соответствующие каждому из этих случаев. Так как $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол, образованный прямой с осью Ox , то

$$1) k^2 a^2 < b^2, \quad k^2 < \frac{b^2}{a^2}, \quad -\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a}, \quad -\frac{b}{a} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{b}{a};$$

$$2) k^2 a^2 = b^2, \quad k^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad k_1 = \frac{b}{a}, \quad k_2 = -\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{b}{a};$$

$$3) k^2 a^2 > b^2, \quad k^2 > \frac{b^2}{a^2}, \quad k > \frac{b}{a}, \quad k < -\frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha > \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha < -\frac{b}{a}.$$

Эти неравенства легко интерпретировать геометрически, если построить прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ так, чтобы стороны были параллельны осям координат, а центр совпадал с началом. На рисунке 4 этот прямоугольник обозначен через $M_1M_2M_3M_4$.

Случаю 1) соответствуют прямые, расположенные внутри вертикальных углов M_1OM_2 и M_3OM_4 . Случаю 2) соответствуют две прямые M_1M_3 и M_2M_4 . Случаю 3) соответствуют прямые, расположенные внутри вертикальных углов M_2OM_3 и M_1OM_4 .

Строго говоря, из нашего поля зрения выпала ось Oy , так как она, как известно, не может быть задана уравнением с угловым коэффициентом. Но выше было показано, что ось Oy не пересекает гиперболу, точнее, пересекает ее в двух комплексных точках. Этот вывод вполне согласуется с результатом исследования, проведенного выше, – ось Oy относится к случаю 3).

Итак, только прямые, проходящие через начало координат и расположенные внутри вертикальных углов M_1OM_2 и M_3OM_4 , пересекают гиперболу.

д) Предыдущее исследование в какой-то степени определяет область расположения точек гиперболы. В самом деле, на *прямых* M_2M_4 и M_1M_3 и *внутри вертикальных углов* M_2OM_3 и M_1OM_4 нет ни одной точки гиперболы, поэтому гипербола всеми своими точками расположена внутри вертикальных углов M_1OM_2 и M_3OM_4 . Для того, чтобы уточнить область расположения точек, заметим, что из уравнения (3) следует: $|x| \geq a$ или $x \geq a$, $x \leq -a$. Таким образом, внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми M_1M_2 и M_3M_4 , нет ни одной точки гиперболы. Сопоставляя эти результаты, мы приходим к выводу, что гипербола всеми своими точками расположена в области, заштрихованной на рисунке 5. Отсюда следует, что в отличие от гиперболы гипербола состоит из двух частей (ветвей), каждая из которых симметрична другой относительно оси Oy .

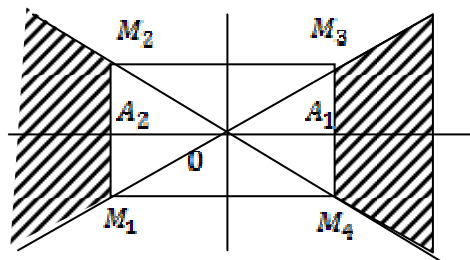


Рис.5

Асимптоты гиперболы

Прямые, проходящие через начало канонической системы координат и имеющие угловые коэффициенты $\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, называются *асимптотами* гиперболы. Асимптоты – это те прямые, которые соответствуют случаю 2) пункта г) предыдущего исследования. На рисунках 4 и 5 этими прямыми являются M_2M_4 и M_1M_2 . Они определяют границу области, в которой расположена гипербола. Докажем следующую теорему, которая поясняет термин «асимптота».

Теорема. Точки гиперболы по мере удаления от оси Oy неограниченно (асимптотически) приближаются к соответствующим асимптотам, то есть расстояние между точкой гиперболы и соответствующей асимптотой при увеличении x уменьшается, стремясь к нулю, но не достигая нуля.

Доказательство. Так как гипербола симметрична относительно осей координат, то достаточно доказать теорему для точек, лежащих в первой четверти. Пусть $x = p$ – произвольная прямая l , перпендикулярная оси Ox . Обозначим через M точку пересечения этой прямой с гиперболой, а через N – с асимптотой (рисунок 6).

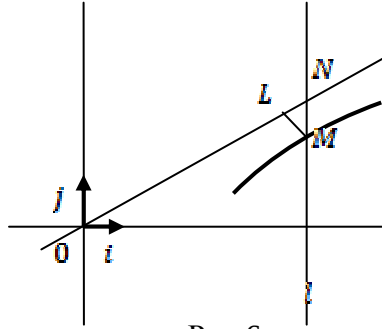


Рис.6

Для нахождения координат точки M следует совместно решить систему

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = p.$$

Имеем:

$$\frac{p^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}, \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{p^2 - a^2}.$$

Таким образом, точка M имеет координаты:

$$M \left(p, \frac{b}{a} \sqrt{p^2 - a^2} \right).$$

Если $p > a$, то эти координаты действительны.

Координаты точки N определяются из системы:

$$x = p, \quad y = \frac{b}{a} x,$$

решая которую, найдем: $N \left(p, \frac{b}{a} p \right).$

Так как $\frac{b}{a} p > \frac{b}{a} \sqrt{p^2 - a^2}$, то точка N лежит выше точки M , поэтому

$$MN = \frac{b}{a} p - \frac{b}{a} \sqrt{p^2 - a^2} = \frac{b}{a} \frac{a^2}{p + \sqrt{p^2 - a^2}} = \frac{ab}{p + \sqrt{p^2 - a^2}}.$$

Пусть LM – расстояние от точки M до соответствующей асимптоты. Так как $LM < NM$, то

$$LM < \frac{ab}{p + \sqrt{p^2 - a^2}}. \quad (8)$$

При удалении точки M от оси ординат p растет, поэтому выражение, находящееся в правой части неравенства (8), уменьшается. При p , стремящемся к бесконечности, длина отрезка LM стремится к нулю. Теорема доказана.

Предыдущее исследование дает полное представление о форме гиперболы. Гипербола изображена на рисунке 4.

Эксцентриситет гиперболы

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом гиперболы*. Здесь c половина фокального расстояния, а a – действительная полуось. Так как $c > a$, то эксцентриситет любой гиперболы больше единицы. По аналогии с теоремой для эллипсов может быть доказана следующая теорема.

Теорема. Две гиперболы, имеющие равные эксцентриситеты, подобны.

Выясним, какова зависимость формы гиперболы от эксцентриситета. Для этой цели выразим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет:

$$c = \varepsilon a, \quad b^2 = c^2 - a^2 = \varepsilon^2 a^2 - a^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1),$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \quad (9)$$

Рассмотрим систему гипербол, имеющих одну и ту же действительную ось, но разные эксцентриситеты. Из соотношения (14) следует, что чем больше эксцентриситет, тем больше $\frac{b}{a}$, то есть угловой коэффициент асимптот. Из этого же соотношения следует,

что, чем меньше ε , тем меньше $\frac{b}{a}$, и при ε стремящимся к единице, отношение $\frac{b}{a}$ стремится к нулю, то есть асимптоты стремятся к оси Ox .

На рисунке 7 изображены гиперболы, эксцентриситеты которых удовлетворяют неравенствам: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4$.

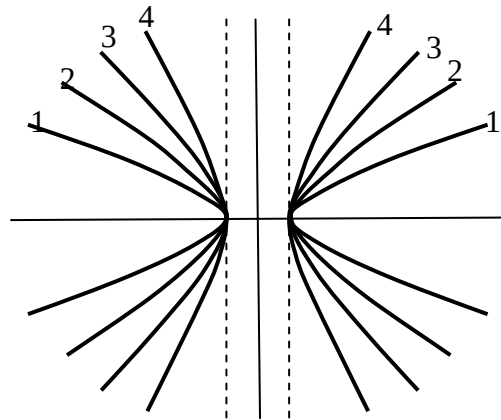


Рис.7

Директрисы гиперболы

Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные канонической оси Oy и отстоящие от этой оси на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$. Здесь a длина действительной полуоси, а ε - эксцентриситет гиперболы. Директриса, расположенная по ту же сторону от оси Oy , что и фокус F_1 , называется *первой*, а другая директриса – *второй*.

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие фокальных радиусов точек гиперболы, аналогичное соответствующему понятию для эллипса. Пусть M – точка гиперболы. Отрезки F_1M и F_2M называются соответственно *первым* и *вторым фокальными радиусами гиперболы*. Если длины этих отрезков обозначить через ρ_1 и ρ_2 , то из формул (4), (4'), (5), (5') следует, что

$$\text{при } x > 0 \quad \rho_1 = \varepsilon x - a, \quad \rho_2 = \varepsilon x + a, \quad (10)$$

$$\text{при } x < 0 \quad \rho_1 = a - \varepsilon x, \quad \rho_2 = -\varepsilon x - a. \quad (11)$$

Теорема. (Директориальное свойство.) Гипербола есть множество G всех точек, отношение расстояний от каждой из которых до фокуса F к соответствующим расстояниям до одноименной директрисы d постоянно и равно эксцентриситету.

Доказательство. Пусть (3) – данная гипербола, а F и d – соответственно первый фокус и первая директриса. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ гиперболы и вычислим расстояния FM и MN , где N – основание перпендикуляра, опущенного из

точки M на директрису d . Если $x > 0$, то согласно формуле (10) $FM = \varepsilon x - a$. С другой стороны, расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы, заданной уравнением $x = \frac{a}{\varepsilon}$, равно:

$$MH = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{x\varepsilon - a}{\varepsilon} \right| = \frac{|x\varepsilon - a|}{\varepsilon}.$$

В данном случае $x \geq a$, $\varepsilon > 1$, поэтому $|x\varepsilon - a| = x\varepsilon - a$. Таким образом,

$$\frac{FM}{MH} = \frac{\varepsilon x - a}{\frac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Если $x < 0$, то согласно (11) $FM = a - \varepsilon x$, $MH = \frac{|x\varepsilon - a|}{\varepsilon}$. В этом случае

$x < a$, $|x\varepsilon - a| = a - \varepsilon x$, $\frac{FM}{MH} = \varepsilon$. Мы показали, что для каждой точки M гиперболы имеем:

$$\frac{FM}{MH} = \varepsilon.$$

Обратно, пусть для точки $M(x, y)$ плоскости $\frac{MF}{MH} = \varepsilon$, где H – основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую d .
Имеем:

$$MF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

$$MH = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon},$$

поэтому

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \varepsilon \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon} = |\varepsilon x - a|.$$

По возведении обеих частей этого соотношения в квадрат получаем: $x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2xa\varepsilon + a^2$. Отсюда, после элементарных преобразований, получаем соотношение (3). Мы пришли к выводу, что каждая точка множества G принадлежит гиперболе.