ЭЛЛИПС. ГИПЕРБОЛА. ПАРАБОЛА

Лекция№17

Тема: **Эллипс**

План лекции

1. Определение и каноническое уравнение эллипса.
2. Геометрические свойства эллипса.
3. Эксцентриситет. Зависимость формы эллипса от эксцентриситета.
4. Директрисы эллипса.

Определение и каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости F_1 *и* F_2 *есть величина постоянная, большая чем расстояние между* F_1 *и* F_2.

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние между ними - *фокальным расстоянием.*

Обозначим через $2a$ сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов, а через $2c$ фокальное расстояние; по определению $a > c$.

Если точки F_1 и F_2 совпадают, то в этом случае, очевидно, эллипс есть окружность радиуса *a*. Таким образом, *окружность является частным случаем эллипса.*

Выведем уравнение эллипса и изучим форму эллипса по его уравнению.

Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало совпало с серединой отрезка F_1F_2, а ось абсцисс с прямой F_1F_2, при этом направление этой оси выберем от точки *O* к F_1 (рис.1).

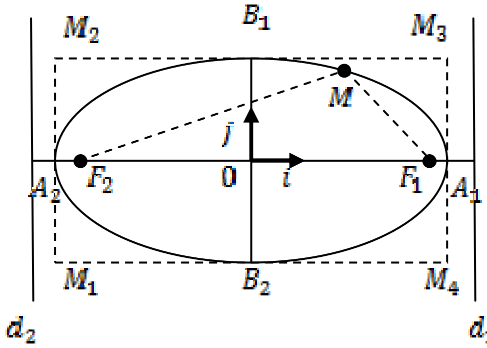

Рис. 1.

Так как $F_1F_2 = 2c$, то в выбранной системе фокусы будут иметь координаты $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$ эллипса имеем:

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

поэтому

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Обратно, если координаты некоторой точки плоскости удовлетворяют уравнению (1), то точка принадлежит эллипсу. Таким образом, соотношение (1) является *уравнением эллипса* в выбранной системе координат.

Для того чтобы упростить это уравнение, запишем его в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и обе части возведем в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$
или
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc\,.$$
Возведем это равенство в квадрат и после упрощения получим:
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\,.$$

Если ввести обозначения, положив
$$b^2=a^2-c^2\,, \tag{2}$$
то из предыдущего соотношения получаем:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{3}$$

Из соотношения (1) мы получили соотношение (3), поэтому если точка лежит на эллипсе, то есть если ее координаты удовлетворяют уравнению (1), то ее координаты удовлетворяют также уравнению (3). Но обратное утверждение не очевидно. Однако оно справедливо, то есть если координаты точки удовлетворяют уравнению (3), то точка лежит на эллипсе. В самом деле, пусть координаты произвольной точки плоскости $M(x,y)$ удовлетворяют соотношению (3). Вычислим расстояния $\rho_1=MF_1$ и $\rho_2=MF_2$:
$$\rho_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=$$
$$=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2xc+c^2+b^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}\,.$$

Если $x\le 0$, то $a-\frac{c}{a}x>0$. Если же $x>0$, то из соотношения (3) следует что $x\le a$, по этому $a-\frac{c}{a}x\ge a-\frac{c}{a}a=a-c>0$. Для любого x имеем: $a-\frac{c}{a}x>0$, следовательно,
$$\rho_1=a-\frac{c}{a}x\,. \tag{4}$$

Аналогичным образом можно показать, что
$$\rho_2=a+\frac{c}{a}x\,. \tag{5}$$

Таким образом, если координаты точки M удовлетворяют уравнению (3), то $MF_1+MF_2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)+\left(a+\frac{c}{a}x\right)=2a$, то есть точка принадлежит эллипсу. По существу мы доказали, что уравнения (1) и (3) эквивалентны и уравнение (3) является уравнением эллипса. Уравнение (3) называется *каноническим уравнением,* а выбранная нами система координат – *канонической системой.*

При выводе канонического уравнения эллипса мы попутно вывели формулы (4) и (5) для вычисления длин отрезков F_1M и F_2M, где M – любая точка эллипса. Эти отрезки называются *фокальными радиусами* точки M, при этом F_1M называется *первым* фокальным радиусом, а F_2M - *вторым.*

Заметим, что если F_1 и F_2 совпадает, то $c=0$ и из (2) следует, что $a^2=b^2$, поэтому уравнение (3) принимает вид $x^2+y^2=a^2$. Мы снова пришли к выводу, что если фокусы эллипса совпадают, то эллипс является окружностью. В этом случае фокальные радиусы совпадают с радиусом окружности. В общем случае, когда $c\ne 0$, как следует из

(2), $b < a$ и уравнение (3) не задает окружность, поэтому возникает необходимость изучения свойств эллипса по уравнению.

Геометрические свойства эллипса

Изучим геометрические свойства эллипса, заданного уравнением (3).

а) Эллипс не проходит через начало канонической системы координат, так как координаты $O(0,0)$ не удовлетворяют уравнению (3).

б) Для определения координат точек пересечения эллипса (3) с осью Ox следует совместно решить уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0.$$

Решив эту систему, получаем две точки пересечения: $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$.

Аналогично получаем точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$. Таким образом, эллипс с каждой осью координат пересекается в двух точках, симметричных относительно начала координат (рис. 1). Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами*, а отрезки A_1A_2 и B_1B_2 - *осями эллипса*. Очевидно, $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$. Из (2) следует, что $b<a$, по этому отрезок A_1A_2 называется *большой осью*, а отрезок B_1B_2 - *малой*. Числа a и b называются полуосями эллипса.

в) Так как переменные x и y в уравнение эллипса входят только в четных степенях, то эллипс симметричен одновременно относительно обеих осей координат. Отсюда следует, что эллипс симметричен также относительно начала координат.

г) Возьмем произвольную прямую, проходящую через начало координат $y=kx$, и найдем точки пересечения этой прямой с эллипсом (3). Для этого необходимо совместно решить уравнение (3) с уравнением прямой. Подставив значение y из уравнения прямой в уравнение эллипса, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2x^2}{b^2}=1.$$

Отсюда определяем абсциссы точек пересечений:

$$x_{1,2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}.$$

Подставив эти значения в уравнение прямой, получаем ординаты точек пересечения:

$$y_{1,2}=\pm\frac{kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}.$$

Таким образом, каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает эллипс в двух точках, симметричных относительно начала:

$$C_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}},\frac{kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\right),$$

$$C_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}},\frac{-kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\right).$$

Мы снова пришли к выводу, что эллипс симметричен относительно O, поэтому начало канонической системы координат называется *центром эллипса*, других центров симметрии эллипс не имеет.

д) Для определения области изменения переменной y решим уравнение (3) относительно x^2:

$$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Так как $x^2 \geq 0$, то $1-\frac{y^2}{b^2} \geq 0$, или $y^2 \leq b^2$, $-b \leq y \leq b$. Аналогично получаем область изменения переменной x: $-a \leq x \leq a$. Мы приходим к выводу, что область изменения переменных определяется неравенствами:

$$-a \leq x \leq a,\ -b \leq y \leq b.$$

Отсюда следует, что точки эллипса расположены внутри прямоугольника $M_1M_2M_3M_4$, изображенного на рисунке 1.

Для того чтобы иметь наглядное представление о расположении эллипса на плоскости, следует построить несколько точек эллипса. При этом можно ограничиться точками, лежащими в первой четверти, так как кривая симметрична относительно осей координат. Эллипс изображен на рисунке 1.

Эксцентриситет. Зависимость формы эллипса от эксцентриситета

Эксцентриситетом эллипса называется число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где c – половина фокального расстояния, а a – длина большой полуоси. Из определения следует, что эксцентриситет ε эллипса всегда меньше единицы.

Эксцентриситет равен нулю тогда и только тогда, когда эллипс вырождается в окружность. Выше было отмечено, что две фигуры F и F' называются подобными, если существует такое преобразование подобия, при котором одна фигура переходит в другую. Докажем теорему.

Теорема. Два эллипса, имеющие равные эксцентриситеты, подобны.

Доказательство. Если эксцентриситеты эллипсов ровны нулю, то эллипсы является окружностями. В этом случае теорема, очевидно, справедлива, поэтому докажем теорему для того случая, когда $\varepsilon \neq 0$.

Пусть два эллипса, заданные каждый в своей канонической системе уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{11}$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\tilde{a}^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{b}^2}=1, \tag{12}$$

имеют один и тот же эксцентриситет ε. Пусть Oij и $O'i'j'$ - канонические системы данных эллипсов. Рассмотрим движение, которое переводит систему $O'i'j'$ в Oij. При этом эллипс (12) перейдет в равный ему эллипс, который в системе Oij задается уравнением (рис.2):

$$\frac{\tilde{x}^2}{\tilde{a}^2}+\frac{\tilde{y}^2}{\tilde{b}^2}=1 \tag{12$'$}$$

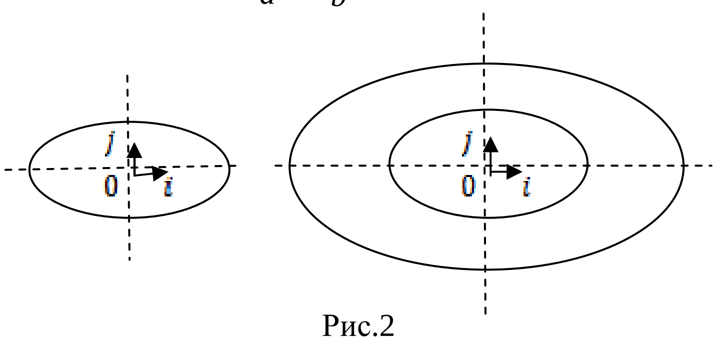

Рис.2

Так как $\frac{c}{a} = \varepsilon$ и $\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}} = \varepsilon$, то $\frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\tilde{a}}{a}$.

Если ввести обозначение $k = \frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\tilde{a}}{a}$, то легко показать, что $\frac{\tilde{b}}{b} = k$. В самом деле, $\tilde{b}^2 = \tilde{a}^2 - \tilde{c}^2 = k^2(a^2 - c^2) = k^2 b^2$.

Отсюда, так как $\tilde{b} > 0$, $b > 0$, $k > 0$, имеем: $\tilde{b} = kb$. Подставим значения $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в уравнение $(12')$, получаем:

$$\frac{x^2}{k^2 a^2} + \frac{y^2}{k^2 b^2} = 1. \tag{13}$$

Рассмотрим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k. Если точка $M(x, y)$ при этой гомотетии переходим в $M'(x', y')$, то имеем: $x' = kx$, $y' = ky$. При этой гомотетии эллипс (11) переходит в эллипс

$$\frac{x'^2}{k^2 a^2} + \frac{y'^2}{k^2 b^2} = 1,$$

который совпадает с эллипсом (13). Так как эллипс (13) равен эллипсу (12), то эллипсы (11) и (12) подобны.

Выясним, какова зависимость формы эллипса от эксцентриситета. Для этой цели выразим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет:

$$c = \varepsilon a, \quad b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2(1 - \varepsilon^2).$$

Отсюда, так как $b > 0$, $a > 0$, $1 - \varepsilon^2 > 0$, получаем:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \tag{14}$$

Рассмотрим систему эллипсов, имеющих одну и ту же большую ось, но разные эксцентриситеты. Из соотношения (14) следует, что, чем больше ε, тем меньше b, и при ε, стремящемся к единице, число b стремится к нулю. Из этого соотношения так же следует, что, чем меньше ε, тем больше b, и при ε, равном нулю, $b = a$, то есть эллипс является окружностью. Таким образом, с увеличением эксцентриситета уменьшается «ширина» эллипса и он делается более продолговатым. На рисунке 3 изображены эллипсы, эксцентриситеты которых удовлетворяют неравенствам:

$$0 = \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_5.$$

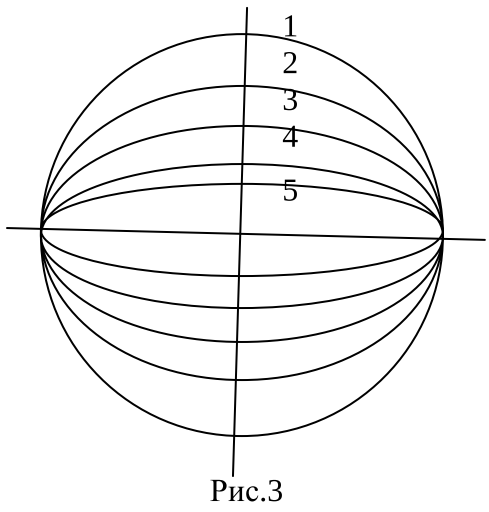

Рис.3

Директрисы эллипса

Директрисами эллипса называются прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, где a – большая полуось, а ε - эксцентриситет.

Директриса, расположенная по ту же сторону от малой оси, что и фокус F_1 называется *первой,* а другая директриса – *второй.* Очевидно, директрисы не пересекают эллипс, так как $\varepsilon < 1$ и $\frac{a}{\varepsilon} > a$.

Окружность как частный случай эллипса не имеет директрис, так как для нее $\varepsilon = 0$.

Любой эллипс, отличный от окружности, имеет две директрисы, расположенные симметрично относительно оси *Oy* (рис. 1).

Рассмотрим следующее директориальное свойство эллипса.

Теорема. Эллипс есть множество всех точек, отношение расстояний от каждой из которых до фокуса F к расстояниям до одноименной директрисы d постоянно и равно его эксцентриситету.

Доказательство. Пусть уравнение (3) – данный эллипс, а F и d соответственно первый фокус и первая директриса. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ эллипса и вычислим расстояния *FM* и *MH,* где *H* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *M* на директрису *d*. Согласно формуле (4) $FM = a - \varepsilon x$. С другой стороны, $MH = \frac{a}{\varepsilon} - x$ при любом расположении точки *M*. Таким образом,

$$\frac{FM}{MH} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon .$$

Обратно, пусть для точки $M(x, y)$ плоскости $\frac{MF}{MH} = \varepsilon$, где *H* – основание перпендикуляра, опущенного из *M* на прямую *d*,

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ , \quad MH = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|,$$

поэтому $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|$.

Возведем обе части этого соотношения в квадрат:

$$(x-c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(x^2 - \frac{2xa}{\varepsilon} + \frac{a^2}{\varepsilon^2} \right),$$

или

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2xa\varepsilon + a^2 .$$

Отсюда, после элементарных преобразований, получаем уравнение (3). Мы пришли к выводу, что каждая точка множества принадлежит эллипсу.