

План лекции

1. Уравнения прямой в пространстве
2. Взаимное расположение прямых в пространстве.
3. Взаимное расположение прямой и плоскости.
4. Углы между двумя прямыми.
5. Угол между прямой и плоскостью.

Уравнения прямой в пространстве

Пусть d -прямая в пространстве. Любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, называется ее направляющим вектором. Ясно, что прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, любые два из которых коллинеарны. Все эти векторы, вместе с нулевым вектором, образуют одномерное векторное подпространство, которое называется направляющим подпространством прямой d .

Положение прямой d в пространстве определяется полностью, если даны: а) направляющий вектор прямой d и некоторая ее точка (рис. 16, а, б) две точки прямой (рис. 16; б, в) две плоскости, пересекающиеся по прямой d (рис. 16, в). Поставим задачу: для каждого из этих способов задания прямой написать ее уравнения.

9.1 Канонические уравнения прямой.

Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат и в этой системе известны координаты некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и координаты направляющего вектора $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ прямой d . Напишем уравнения этой прямой. Сначала рассмотрим тот случай, когда ни одна из координат вектора $\vec{p}$ не равна нулю.

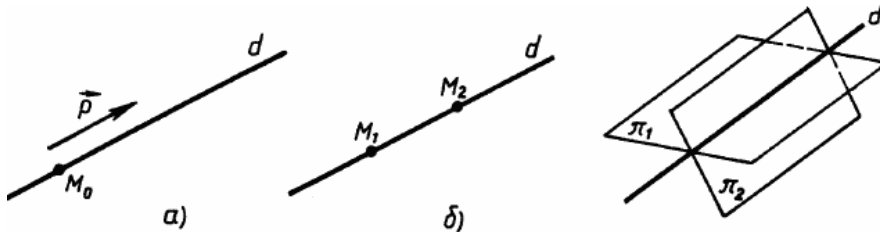


Рис.16

Очевидно, точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой d тогда и только

тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, поэтому по свойству 4°

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$$

(24)

Эти равенства являются уравнениями прямой d . Если одна из координат вектора p равна нулю, например: $p_3 = 0, p_2 \neq 0, p_1 \neq 0$ то условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ запишется так:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}, z - z_0 = 0 \quad (25)$$

Аналогично, если равны нулю две координаты вектора $\vec{p}$, например: $p_2 = p_3 = 0, p_1 \neq 0$, то получаем:

$$y - y_0 = 0, z - z_0 = 0 \quad (26)$$

В этом случае прямая d параллельна оси Ox (если хоть одно из чисел y_0, z_0 отлично от нуля) или совпадает с осью Ox (если $y_0 = z_0 = 0$)

Уравнения (24), (25) и (26) называются каноническими уравнениями прямой.

9.2 Уравнения прямой, заданной двумя точками

Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат и в этой системе известны координаты двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой d . Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является направляющим вектором этой прямой. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, то канонические уравнения прямой d , при $x_2 - x_1 \neq 0, y_2 - y_1 \neq 0, z_2 - z_1 \neq 0$ согласно формуле (24) имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (27)$$

Если одна из координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ или две его координаты равны нулю, то для получения канонических уравнений прямой следует воспользоваться формулами (25) и (26).

9.3 Уравнения прямой, заданной двумя плоскостями

Пусть прямая d является линией пересечения плоскостей σ_1 и σ_2 , которые в аффинной системе координат заданы уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (28)$$

Точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой d тогда и только тогда, когда ее координаты являются решением системы уравнений (28), поэтому эта система и является уравнениями прямой d . Обратно, любая система уравнений (28) представляет собой уравнения некоторой прямой пространства, если ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен двум. Для того чтобы найти

канонические уравнения прямой, заданной уравнениями (28), надо знать координаты какой-нибудь точки M_0 этой прямой и некоторого направляющего вектора $\vec{p}$. Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ следует выбрать так, чтобы ее координаты удовлетворяли системе линейных уравнений (28). Для нахождения координат направляющего вектора воспользуемся леммой.

Лемма. Если в аффинной системе координат прямая задана уравнениями (28) то вектор $\vec{p} \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ является направляющим вектором этой прямой.

Пусть σ_1 и σ_2 - плоскости, заданные уравнениями (28), а d -заданная прямая. По лемме о параллельности вектора и плоскости вектор $\vec{p}$ параллелен как плоскости σ_1 , так и плоскости σ_2 поэтому $\vec{p}$ параллелен прямой d . Вектор $\vec{p}$ ненулевой, так как в системе уравнений (28) коэффициенты при x, y, z не пропорциональны. Таким образом, $\vec{p}$ - направляющий вектор прямой d .

9.4 Параметрические уравнения прямой

Выберем какую-нибудь аффинную систему координат и зададим прямую d направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на прямой d тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны, т. е. когда существует такое число t , что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{p}$. Это соотношение в координатах запишется так:

$$x - x_0 = tp_1, y - y_0 = tp_2, z - z_0 = tp_3$$

или

$$\begin{aligned}x &= x_0 + p_1 t, \\y &= y_0 + p_2 t \\z &= z_0 + p_3 t\end{aligned}\tag{29}$$

Эти равенства называются параметрическими уравнениями прямой, а t -параметром. Их смысл заключается в следующем: для любого действительного числа t точка с координатами (x, y, z) , удовлетворяющая условиям (29), лежит на прямой d . Обратно, если (x, y, z) -точка прямой d , то всегда найдется такое t , что x, y и z выражаются через $x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, p_3$ при помощи равенств (29).

Взаимное расположение прямых в пространстве

Рассмотрим сначала взаимное расположение двух прямых. Пусть в пространстве даны: прямая d_1 - точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}_1$ и прямая d_2 - точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{p}_2$ (рис. 17). Оказывается, что по векторам $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ можно определить взаимное расположение данных прямых. Возможны четыре случая: 1) прямые скрещиваются; 2) прямые пересекаются; 3) прямые параллельны; 4) прямые совпадают.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности. Заметим, что прямые d_1, d_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{p}_1, \vec{p}_2$ компланарны и, значит, имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 = 0\tag{30}$$

Как известно две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости (т.е. не существует плоскости, содержащей каждую из этих прямых). Следовательно, для того чтобы данные прямые d_1 и d_2 были скрещивающимися, необходимо и достаточно, чтобы для них имело место неравенство

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 \neq 0$$

Пусть прямые d_1, d_2 лежат в одной плоскости, и, следовательно, для них выполняется условие (30). Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда их направляющие векторы не коллинеарны. Итак, прямые d_1 и d_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1 M_2} \vec{p}_1 \vec{p}_2 = 0$ и векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ не коллинеарны.

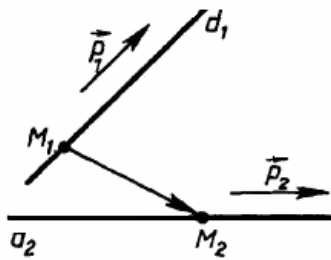


Рис.17

Прямые d_1, d_2 лежащие в одной плоскости, параллельны, если они не имеют общих точек. Это будет только в том случае, когда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{M_1 M_2}$ и $\vec{p}_1$ не коллинеарны. Итак, прямые d_1 и d_2 параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны, но векторы $\vec{p}_1$ и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ не коллинеарны.

Ясно, что прямые d_1 и d_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ и $\overrightarrow{M_1 M_2}$ попарно коллинеарны.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим условия взаимного расположения прямой и плоскости. Возможны 3 случая взаимного расположения прямой и плоскости.

1 случай. Прямая пересекает плоскость в некоторой точке.

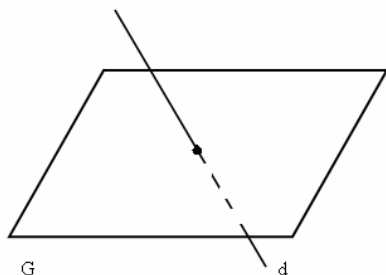


Рис.18

2 случай. Прямая лежит в плоскости.

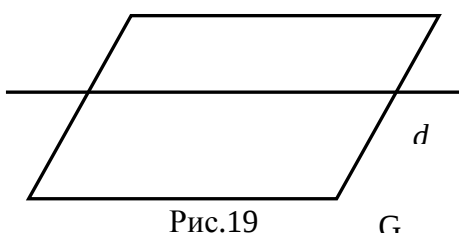


Рис.19

3 случай. Прямая параллельна плоскости

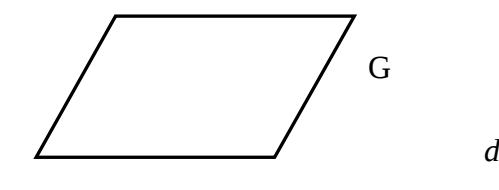


Рис.20

Пусть прямая d задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. $d : M_0(x_0, y_0, z_0) \in d$

$\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel d$, $\sigma : Ax + By + Cz + D = 0$

1. d пересекает $\sigma \Leftrightarrow \vec{p} \nparallel \sigma \Leftrightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 \neq 0$ (условие пересечения)

2. d пересекает σ то для любой точки $M_0 \in d \Rightarrow M_0 \in \sigma \Rightarrow$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

(условие принадлежности прямой плоскости)

3. $d \parallel \sigma \begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$

Угол между двумя прямыми

Вычисление углов, указанных в названии этого параграфа, носит метрический (измерительный) характер, поэтому эти задачи удобно решать в прямоугольной системе координат.

Пусть в пространстве даны две непараллельные прямые d_1 и d_2 . Возьмем произвольную точку A пространства и проведем через нее прямые d'_1 и d'_2 , соответственно па-

параллельные прямым d_1 и d_2 . (рис. 21). Прямые d'_1 и d'_2 образуют четыре угла с вершиной A . Каждый из этих углов называется углом между прямыми d_1 и d_2

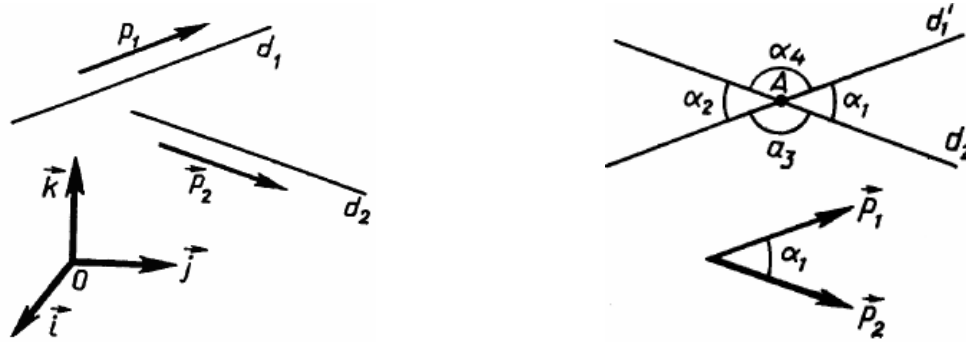


Рис. 21

Если известен один из четырех указанных углов, то мы легко найдем остальные три угла. Но один из этих четырех углов есть в точности угол между направляющими и векторами этих прямых. Если $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ - направляющие векторы данных прямых d_1 и d_2 , то угол α , между этими прямыми вычисляют по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{p}_1 \vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|}$$

Отсюда получаем, условие перпендикулярности двух прямых ($\alpha = 90^\circ$): $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$. Напомним, что две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве могут быть как скрещивающимися, так и пересекающимися.

Угол между прямой и плоскостью

Говорят, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними $\angle(d, \sigma) = 90^\circ$. Если прямая d не перпендикулярна плоскости, то углом между d и σ называется угол между этой прямой и её проекцией на плоскость

Пусть $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$, $d: \vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ в ПДСК. Рассмотрим вектор $\vec{n}$, $\vec{n} \perp \sigma$, $\vec{n}(A, B, C)$ $\angle(\vec{n}, \vec{p}) = \theta$. В 1 случае: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$; 2 случай $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$1 \text{ случай: } \sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$2 \text{ случай: } \sin \varphi = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = |\cos \theta|, \cos \theta = \cos(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| |\vec{p}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}$$

