

**Тема: Прямая на плоскости. Полуплоскости.  
Взаимное расположение двух прямых на плоскости**

**План лекции**

1. Способы задания и уравнения прямой.
2. Общее уравнение прямой. Особенности расположения прямой в АСК.
3. Аналитическое задание полуплоскости.
4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.

**Способы задания и уравнения прямой на плоскости**

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*. Прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, однако любые два из них коллинеарны, так как они параллельны одной прямой.

Положение прямой определяется однозначно, если даны *направляющий* вектор прямой и некоторая ее точка или две точки прямой. Поставим задачу: зная в аффинной системе координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  координаты направляющего вектора  $\vec{a}$  и точки  $M_0$  или двух точек  $M_1$  и  $M_2$  данной прямой, написать ее уравнение.

**1.1 Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.**

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  и в этой системе известны координаты некоторой точки  $M_0(x_0, y_0)$  прямой  $d$  и направляющего вектора  $\vec{a}(a_1, a_2)$  этой прямой (рис.1). Напишем уравнение прямой  $d$ . Очевидно, точка  $M(x, y)$  лежит на прямой  $d$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны. Так как вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  имеет координаты  $(x - x_0, y - y_0)$  то

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (1)$$

Если точка  $M$  лежит на прямой  $d$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению (1), а если она не лежит на прямой, то ее координаты не удовлетворяют этому уравнению, поэтому уравнение (1) является уравнением прямой  $d$ . Уравнение (1) можно также записать в виде:

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0 \quad (1')$$

**1.2 Уравнение прямой, заданной двумя точками**

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  и в этой системе известны координаты двух точек  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  данной прямой  $d$  (рис. 2). Тогда вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$  является направляющим вектором этой прямой. Так как этот вектор имеет координаты  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  то согласно формуле (1) уравнение прямой имеет

вид:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

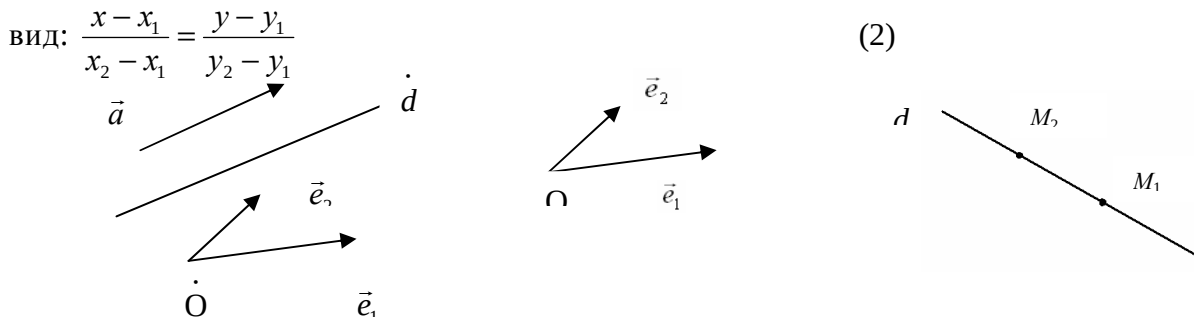


Рис.1

Рис.2

### 1.3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  и дана прямая  $d$ , пересекающая ось ординат. Если  $\vec{a}(a_1, a_2)$  — направляющий вектор прямой, то  $\vec{a}$  и  $\vec{e}_2$  не коллинеарны, поэтому  $a_1 \neq 0$ . Число  $k = a_2/a_1$  называется угловым коэффициентом прямой  $d$ .

Покажем, что угловой коэффициент прямой не зависит от выбора направляющего вектора прямой. Действительно, если  $\vec{b}(b_1, b_2)$  — другой направляющий вектор прямой  $d$ , то  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , поэтому, координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  пропорциональны:  $a_1 = \lambda b_1$ ,  $a_2 = \lambda b_2$ . Отсюда, учитывая, что  $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ , получаем

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\lambda b_2}{\lambda b_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

Угловой коэффициент  $k$  прямой имеет простой геометрический смысл, если прямая задана в прямоугольной системе координат  $O\vec{i}\vec{j}$ . В самом деле, пусть  $\vec{a}(a_1, a_2)$  — направляющий вектор этой прямой (рис. 3).  $a_1 = |\vec{a}| \cos \varphi$ ,  $a_2 = |\vec{a}| \sin \varphi$ , где  $\varphi = (\vec{i}, \vec{a})$ . Следовательно,  $k = \frac{|\vec{a}| \sin \varphi}{|\vec{a}| \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$ . Таким образом, число  $k$  позволяет определить направленный угол  $\varphi = (\vec{i}, \vec{a})$ , поэтому  $k$  называется *угловым коэффициентом прямой*.

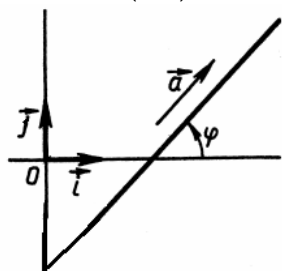


Рис.3.

Пусть  $k$  — угловой коэффициент прямой  $d$ , заданной в аффинной системе координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ . Ясно, что любой ненулевой вектор  $\vec{p}(p_1, p_2)$ , координаты которого удовлетворяют равенству  $k = \frac{p_2}{p_1}$ , является направляющим вектором прямой  $d$ . Поэтому, зная число  $k$ , можно определить направление прямой  $d$ , и, зная какую-нибудь точку  $M_0$  этой прямой, можно определить ее положение.

Составим уравнение прямой, заданной в аффинной системе координат точкой  $M_0(x_0, y_0)$  и угловым коэффициентом  $k$ . Пусть  $\vec{a}(a_1, a_2)$  — направляющий вектор прямой. Тогда согласно формуле (1') уравнение прямой имеет вид:  $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$  или, разделив на  $a_1$ , получаем:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3)$$

Если в качестве точки  $M_0(x_0, y_0)$  взять точку  $B(0, b)$  пересечения прямой  $d$  с осью ординат, то уравнение (3) примет вид:

$$y = kx + b \quad (4)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Подчеркнем, что в виде (4) можно записать уравнение любой прямой, *пересекающей ось ординат*.

#### 1.4 Параметрические уравнения прямой

Выберем какую-нибудь аффинную систему координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  зададим прямую  $d$  направляющим вектором  $\vec{a}(a_1, a_2)$  и точкой  $M_0 = (x_0, y_0)$ . Точка  $M(x, y)$  принадлежит прямой тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ , т. е. когда существует такое число  $t$ , что  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ . Это соотношение в координатах запишется так:  $x - x_0 = ta_1, y - y_0 = ta_2$ ,

или

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t, \\ y &= y_0 + a_2 t \end{aligned} \quad (5)$$

Эти равенства называются *параметрическими уравнениями прямой*, а  $t$  — её *параметром*. Смысл этих уравнений заключается в следующем: каково бы ни было действительное число  $t$ , точка с координатами  $x, y$ , которые удовлетворяют условиям (5), лежит на прямой  $d$ . Обратно, если  $(x, y)$  — точка прямой  $d$ , то всегда найдется такое  $t$ , что  $x$  и  $y$  выражаются через  $x_0, y_0, a_1, a_2$  при помощи равенств (5).

#### Общее уравнение прямой. Особенности расположения прямой в АСК

В предыдущем параграфе было показано, что уравнение любой прямой в аффинной системе координат является уравнением первой степени т. е. может быть записано в виде

$$Ax + By + C = 0 \quad (6)$$

где числа  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю. Таким образом, прямая является алгебраической линией первого порядка. Докажем обратное утверждение.

**Теорема 1.** *Линия на плоскости, заданная в аффинной системе координат уравнением первой степени (6) есть прямая. Вектор  $(-B, A)$  является направляющим вектором этой прямой.*

Пусть  $\gamma$  — линия, заданная уравнением (6), а  $M_0(x_0, y_0)$  — некоторая ее точка. Т.е. точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (6):

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (7)$$

Такая точка всегда существует, так как  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю. Определив из равенства (7)  $C$  и подставив в уравнение (6), получим уравнение линии  $\gamma$  в виде  $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$  или  $A(x - x_0) - (-B)(y - y_0) = 0$

Это уравнение имеет в точности вид (1') и, следовательно, определяет прямую, проходящую через точку  $M_0(x_0, y_0)$  с направляющим вектором  $\vec{a}(-B, A)$ .

Таким образом, любое уравнение первой степени (1) в аффинной системе координат определяет прямую линию. Другими словами *любая алгебраическая линия первого порядка есть прямая линия*. Уравнение (6) называется *общим уравнением прямой*, а  $x$  и  $y$  называются текущими координатами точки прямой.

Пусть в аффинной системе координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  дана прямая общим уравнением (6). Выясним особенности расположения прямой относительно системы координат, если некоторые из чисел  $A, B$  и  $C$  равны нулю. (Напомним, что хотя бы одно из чисел  $A$  и  $B$  отлично от нуля.)

1) Если  $C=0$ , то уравнению (6) удовлетворяют координаты точки  $O(0, 0)$  и, следовательно прямая проходит через начало координат. Обратно, если прямая проходит через начало координат, то в этом случае  $C=0$ . Итак, прямая (6) проходит *через начало координат тогда и только тогда, когда  $C=0$* . В этом случае уравнение прямой имеет вид:  $Ax + By = 0$

2) Если  $A=0$ , то направляющий вектор прямой  $\vec{a}(-B,0)$  коллинеарен координатному вектору  $\vec{e}_1$ , т. е. вектор  $\vec{e}_1$  параллелен прямой. Обратно, если  $\vec{a} \parallel \vec{e}_1$  то  $\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A = 0$

Итак, вектор  $\vec{e}_1$  параллелен прямой (1) тогда и только тогда, когда  $A=0$ . (В этом случае уравнение прямой имеет вид:  $Bu + C=0$  или  $y = b$ , где  $b = -\frac{C}{B}$ )

Если  $A=0$ ,  $C \neq 0$ , то прямая (6) не проходит через начало координат и поэтому параллельна оси  $Ox$ ; если же  $A=C=0$ , то прямая совпадает с осью  $Ox$  и имеет уравнение  $y = 0$ .

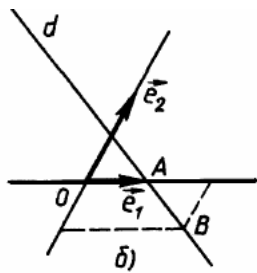
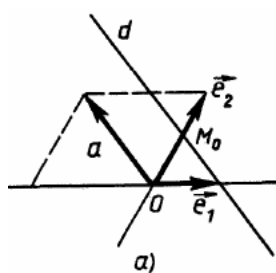


Рис. 4

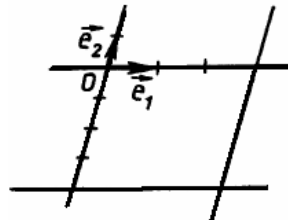


Рис5

3) Аналогично вектор  $\vec{e}_2$  параллелен прямой (6) тогда и только тогда, когда  $B=0$ . В этом случае уравнение прямой можно записать в виде  $x=a$ . Если  $B=0$ , ( $C \neq 0$ ), то прямая параллельна оси  $Oy$ , если же  $B=C=0$ , то прямая совпадает с осью  $Oy$  и имеет уравнение  $x=0$ .

3. Для построения прямой по ее уравнению достаточно знать два элемента, определяющие ее. Этими элементами могут быть: а) направляющий вектор и некоторая точка прямой; б) две точки, лежащие на прямой.

На рис. 4 построена прямая  $d: x + 2y - 1 = 0$ . Рис. 4, а соответствует случаю, когда в качестве определяющих элементов выбраны направляющий вектор  $\vec{a}(-2,1)$  и точка  $M_0(0, \frac{1}{2})$ , а рис. 4, б — случаю, когда определяющими элементами являются точки  $A(1, 0)$  и  $B(2, -\frac{1}{2})$ . На рис. 5 построены прямая  $l_1$  заданная уравнением  $x=3$ , и прямая  $l_2$ , заданная уравнением  $y=-4$ .

#### Аналитическое задание полуплоскости

4. Зададим на плоскости аффинную систему координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  и рассмотрим прямую  $d$ , заданную в этой системе уравнением (6).

Эта прямая разделяет множество точек плоскости, не принадлежащих ей, на две полуплоскости с общей границей  $d$ . Найдем условия, определяющие эти полуплоскости.

Зафиксируем на прямой  $d$  некоторую точку  $M_0(x_0, y_0)$  и рассмотрим векторы  $\vec{a}(A, B)$  и  $\vec{b}(-B, A)$  (рис. 6). Эти векторы образуют правый базис, так как  $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2 > 0$ , вектор  $\vec{b}$  параллелен прямой  $d$ , поэтому вектор  $\vec{a}$  не параллелен этой прямой. Отложим векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  от точки  $M_0$ :  $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{M_0M_2} = \vec{b}$  и обозначим через  $\lambda$  полуплоскость с границей  $d$ , содержащую точку  $M_1$  (рис. 6).

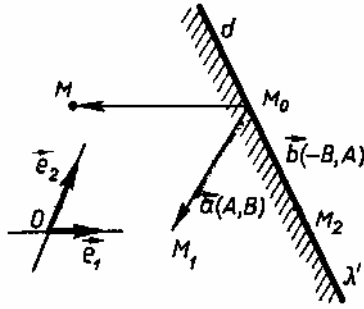


Рис.6.

Очевидно, точка  $M(x, y)$  принадлежит полуплоскости  $\lambda$  тогда и только тогда, когда базисы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$  имеют одну и ту же ориентацию, т. е. когда базис  $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$  имеет правую ориентацию. Но  $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$ ,  $\vec{b}(-B, A)$  поэтому базис  $\overrightarrow{M_0M}, \vec{b}$  имеет правую ориентацию в том и только в том случае, когда  $\begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} > 0$  или  $Ax + By - (Ax_0 + By_0) > 0$ . Так как  $M_0 \in d$  то  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ , или  $C = -(Ax_0 + By_0)$ . Поэтому предыдущее неравенство принимает вид:

$$Ax + By + C > 0 \quad (8)$$

Это и есть неравенство, определяющее полуплоскость  $\lambda$ . Другая полуплоскость  $\lambda'$  с границей  $d$  определяется неравенством

$$Ax + By + C < 0 \quad (9)$$

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Если в аффинной системе координат, прямая  $d$  задана уравнением (6), то полуплоскости с границей  $d$  определяются неравенствами (8) и (9).

### Взаимное расположение двух прямых на плоскости

В аффинной системе координат линия, заданная уравнением первой степени, является прямой. Выясним, при каких условиях два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (10)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (11)$$

определяют одну и ту же прямую. Докажем следующую теорему.

**Теорема.** Для того чтобы уравнения (10) и (11) в аффинной системе координат определяли одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты в этих уравнениях были пропорциональны.

Пусть уравнения (10) и (11) в системе координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  определяют одну и ту же прямую  $d$ . По теореме 1 векторы  $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$  и  $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$  являются направляющими векторами этих прямых, поэтому они коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны:  $-B_2 = \lambda(-B_1)$ ,  $A_2 = \lambda A_1$  или  $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$

Пусть  $M_0$  - точка прямой  $d$ . Тогда  $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$  и  $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$ . Отсюда, учитывая, что  $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1$  получаем:  $C_2 = \lambda(-A_1x_0 - B_1y_0) = \lambda C_1$

Таким образом  $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$ . Обратно, пусть в уравнениях (10) и (11) коэффициенты удовлетворяют равенствам (8). При этом  $\lambda \neq 0$ , так как  $A_2$  и  $B_2$  одновременно не равны нулю. Тогда уравнение (7) можно записать в виде  $\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1 = 0$

Уравнениями (6) и (9) задается одна и та же прямая, так как если координаты  $(x, y)$  точки удовлетворяют уравнению (6), то они удовлетворяют и уравнению (9).

2. Выясним взаимное расположение двух прямых  $d_1$  и  $d_2$ , заданных в некоторой аффинной системе координат  $O\vec{e}_1\vec{e}_2$  уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (12)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (13)$$

По теореме 1 вектор  $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$  параллелен прямой  $d_1$ , а вектор  $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$  прямой  $d_2$ . Возможны два случая:

1) Векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  не коллинеарны. В этом случае прямые  $d_1$  и  $d_2$  пересекаются. Обратно, если прямые  $d_1$  и  $d_2$  пересекаются, то векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  не коллинеарны. Условие неколлинеарности векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  согласно теореме запишется так  $\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0$  или

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Для определения координат точки пересечения этих прямых, очевидно, необходимо совместно решить систему (12) и (13).

2) Векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны. В этом случае прямые параллельны, так как по предположению они не совпадают. Обратно, если прямые (12) и (13) параллельны, то векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны. Условие коллинеарности векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  запишется так :

$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

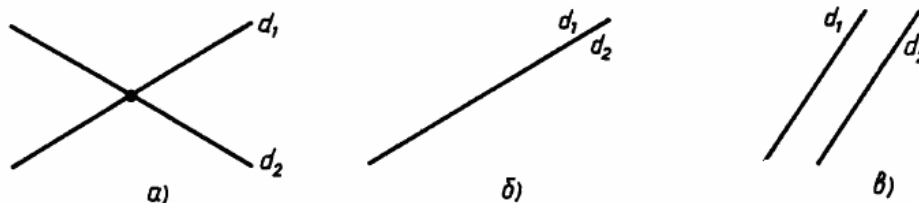


Рис.7.

Таким образом, можно сформулировать следующий вывод о взаимном расположении прямых  $d_1$  и  $d_2$  заданных уравнениями (12) и (13).

1) Прямые  $d_1$  и  $d_2$  пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при  $x$  и  $y$  в уравнениях (5) и (6) не пропорциональны (рис. 7а)

2) Прямые  $d_1$  и  $d_2$  совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты в уравнениях (5) и (6) пропорциональны, т. е. существует такое число  $\lambda$ , что  $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1$  (рис. 7,б).

3) Прямые (12) и (13) параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при  $x$  и  $y$  пропорциональны, но свободные члены им не пропорциональны, т. е. существует такое число  $\lambda$ , что  $A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 \neq \lambda C_1$  (рис. 7, в).