Лекция№9

Тема: **Преобразование координат. Полярные координаты**

План лекции

1. Преобразование АСК на плоскости.
2. Преобразование ПДСК на плоскости.
3. Полярные координаты.
4. Переход от полярной системы к присоединенной ПДСК.
5. Обобщенные полярные координаты точки.

Преобразование АСК на плоскости

Рассмотрим на плоскости две аффинные системы координат $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$. Первую систему назовем старой, а вторую – новой. Пусть M - произвольная точка плоскости, которая в старой системе имеет координаты x, y, а в новой системе - x', y'.

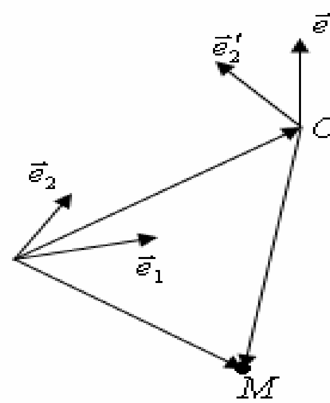

Рис. 9.

Задача преобразования координат состоит в следующем: зная координаты нового начала координат и новых координатных векторов в старой системе:

$$\vec{e}_1'(c_{11}, c_{21}), \vec{e}_2'(c_{12}, c_{22}), O'(x_0, y_0) \qquad (20)$$

выразить координаты x, y точки M в старой системе через координаты x', y' той же точки в новой системе.

По определению координат векторов и точек из (20) получаем:

$$\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2, \vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2, \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2. \qquad (21)$$

По правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, поэтому $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2'$, или, используя равенство (21), получим:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + (c_{11}x' + c_{12}y')\vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\vec{e}_2.$$

Отсюда, учитывая, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, приходим к формулам:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0. \end{aligned} \qquad (22)$$

Так выражаются координаты x, y точки M в старой системе $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$ через ее координаты x', y' в новой системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$. Формулы (22) называются *формулами преобразования* аффинной системы координат. Мы замечаем, что в этих формулах матрица $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при x', y', есть в точности матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, а свободными членами служат координаты x_0, y_0 нового начала O' в старой системе $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$.

Так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, то $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому система (22) всегда разрешима относительно x', y'. Это позволяет выразить координаты точки M в новой системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ через координаты той же точки в старой системе $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$.

Рассмотрим два частных случая преобразования аффинной системы координат.

1) *Перенос начала*. В этом случае системы координат $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ имеют одни и те же координатные векторы и разные начала. Так как $\vec{e}_1 = \vec{e}_1'$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_2'$, то матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, формулы (22) запишутся так:

$$x = x' + x_0,\, y = y' + y_0. \qquad (23)$$

2) *Замена координатных векторов*. Системы координат $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ имеют общее начало и отличаются координатными векторами. В этом случае $x_0 = 0, y_0 = 0$. Формулы (22) примут вид:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y',\, y = c_{21}x' + c_{22}y'. \qquad (24)$$

Преобразование ПДСК на плоскости

Рассмотрим теперь преобразование прямоугольных систем координат. Так как прямоугольная система координат является частным случаем аффинной, то при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой мы можем использовать те же формулы (22), но теперь на элементы c_{ij} матрицы перехода накладываются дополнительные ограничения. Предположим, что старая система $O\vec{i}\vec{j}$ имеет правую ориентацию, и рассмотрим два случая.

1) Системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ориентированы одинаково, т. е. обе системы имеют правую ориентацию. Пусть $\alpha = (\widehat{\vec{i}, \vec{i}'})$, векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ имеют координаты

$$\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha),\ \ \vec{j}'(\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}), \sin(\vec{i}, \vec{j}')). \qquad (25)$$

Но

$$\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}) = \cos[(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) + (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'})] = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha;$$

$$\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}) = \sin[(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) + (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'})] = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha.$$

Таким образом, формулы (22) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \qquad (26)$$

Здесь $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$.

Рассмотрим частный случай, когда обе системы координат имеют общее начало O. В этом случае говорят, что *система координат $O'\vec{i}'\vec{j}'$ получена из системы $O\vec{i}\vec{j}$ поворотом вокруг точки* O на угол α.

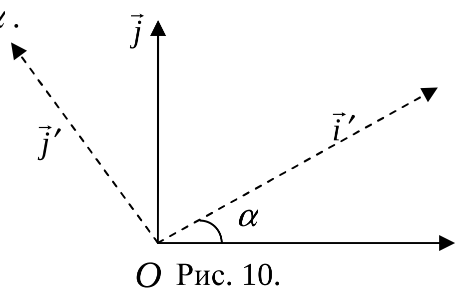

Рис. 10.

Так как точки O' и O совпадают, то $x_0 = y_0 = 0$, поэтому формулы (26) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (27)$$

2) Системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ориентированы противоположно: исходная система $O\vec{i}\vec{j}$ правая, а новая $O'\vec{i}'\vec{j}'$ левая. И в этом случае векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ имеют координаты (25), но здесь $(\vec{i}',\hat{\ }\vec{j}') = -\dfrac{\pi}{2}$, поэтому

$$\cos(\vec{i},\hat{\ }\vec{j}') = \cos[(\vec{i},\hat{\ }\vec{i}') + (\vec{i}',\hat{\ }\vec{j}')] = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha;$$

$$\sin(\vec{i},\hat{\ }\vec{j}') = \sin[(\vec{i},\hat{\ }\vec{i}') + (\vec{i}',\hat{\ }\vec{j}')] = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha.$$

Формулы (22) имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \qquad (28)$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -1.$$

Формулы (26) и (28) можно объединить в одной записи:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \qquad (29)$$

где $\varepsilon = 1$, если системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ориентированы одинаково, и $\varepsilon = -1$, если они ориентированы противоположно.

Полярные координаты

Аффинная система координат дает удобный, но не единственный способ определить положение точек плоскости при помощи чисел. Если указано правило, по которому положение точек плоскости можно определить с помощью упорядоченных пар вещественных чисел, то говорят, что на плоскости задана система координат.

Кроме аффинной системы координат, в математике часто применяют систему полярных координат на плоскости. Зададим на *ориентированной плоскости* точку O и единичный вектор $\vec{i}$. Пара, состоящая из точки O и вектора $\vec{i}$, называется *полярной системой координат* и обозначается так: $O\vec{i}$ или $(O,\vec{i})$. Рассмотрим ось OP, проходящую через точку O и параллельную вектору $\vec{i}$, на которой положительное направление определяется этим вектором. Точка O называется *полюсом*, а ось OP - *полярной осью*.

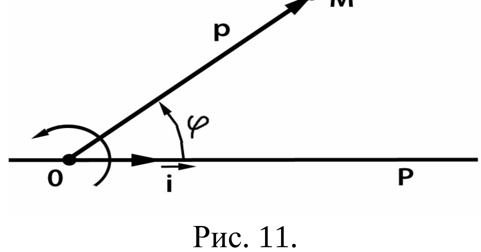

Рис. 11.

Пусть M - произвольная точка плоскости. Обозначим через ρ расстояние от точки O до точки M, а через φ - направленный угол $(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$, т.е. $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\varphi = (\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$. Если точка M совпадает с точкой O, то $\rho=0$, а угол φ - неопределенный. Числа ρ и φ однозначно определяют положение точки M на плоскости. Действительно, зная φ, сначала построим луч OQ, на котором отрезок OM длиной ρ (рис. 11). Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M в полярной системе $O\vec{i}$. Число ρ называется *полярным радиусом* или первой полярной координатой точки M, а число φ - *полярным углом* или второй координатой этой точки. Если точка M имеет полярные координаты ρ, φ, то коротко пишут так: $M(\rho, \varphi)$.

Замечание. Иногда бывает целесообразно считать, что полярный угол точки $M(\rho, \varphi)$ равен так же $\varphi - 2\pi$, если $\varphi > 0$ и $\varphi + 2\pi$, если $\varphi < 0$. В этом случае полярный угол каждой точки, отличной от полюса, имеет два значения и изменяется в пределах от -2π до 2π.

Переход от полярной системы к присоединенной ПДСК

К каждой полярной системе координат $O\vec{i}$ можно присоединить положительно ориентированную прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$, началом которой служит полюс O, первым координатным вектором – вектор $\vec{i}$ и $(\vec{i}, \widehat{\vec{j}}) = \dfrac{\pi}{2}$.

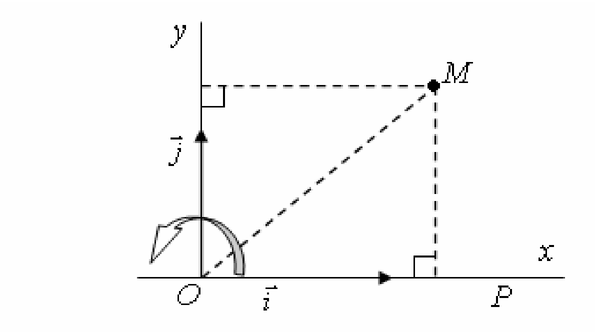

Рис. 12.

Пусть ρ и φ - полярные координаты точки M, отличной от точки O, а x, y - ее координаты в присоединенной прямоугольной системе. Тогда $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ и $\varphi = (\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$.

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi. \qquad (30)$$

Зная полярные координаты ρ и φ точки M, по формулам (30) найдем прямоугольные координаты x, y этой точки. Из формул (30) находим: $x^2 + y^2 = \rho^2$ и, значит,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (31)$$

Для точки M, отличной от полюса O, имеем $\rho \neq 0$, из формул (30), (31) находим:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (32)$$

Зная прямоугольные координаты x, y точки M, отличной от начала координат, мы по формулам (31) и (32) найдем полярные координаты ρ и φ этой точки.

Обобщенные полярные координаты точки

Из определения полярных координат следует, что не любая пара действительных чисел является полярными координатами точки. Например, на плоскости не существует точки с полярными координатами $\left(-3, \frac{\pi}{2}\right)$. Это обстоятельство приводит к определенным трудностям при решении ряда конкретных задач. Чтобы устранить такое неудобство, обобщим понятие полярных координат так, чтобы в данной полярной системе $O\vec{i}$ любая упорядоченная пара действительных чисел определяла на плоскости некоторую точку.

Пусть (ρ, φ)- произвольная пара действительных чисел, а $O\vec{i}$ - данная полярная система координат. Если $\rho \geq 0$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$, то этой парой определяется точка с полярными координатами (ρ, φ). Если $\rho \geq 0\ \varphi > \pi$ или $\rho \geq 0$ и $\varphi \leq -\pi$, то выразим φ в виде $\varphi = \varphi_0 + 2\pi\kappa$, где κ- целое число такое, что $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$, и будем считать, что парой (ρ, φ) определяется точка $M(\rho, \varphi_0)$. Если, наконец, $\rho < 0$, то будем считать, что парой (ρ, φ) определяется точка M, которая симметрична точке $M'(|\rho|, \varphi)$ относительно точки O. Например, пара чисел $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ определяет точку C, симметричную точке C', имеющей полярные координаты $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$. Такие координаты точки называются *обобщенными полярными координатами*. Каждая точка плоскости имеет бесконечное множество обобщенных полярных координат.

Формулы (30), определяющие декартовы координаты точки через полярные, справедливы и в том случае, когда ρ и φ являются обобщенными полярными координатами. В самом деле, пусть (ρ^*, φ^*)- обобщенные полярные координаты точки M, а (x, y)- ее координаты в присоединенной прямоугольной системе. Докажем, что

$$x = \rho^* \cos\varphi^*, y = \rho^* \sin\varphi^*. \qquad (33)$$

Если $\rho^* > 0$, а $\varphi^* = \varphi_0 + 2\pi\kappa$, где κ- целое число такое, что $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$, то (ρ^*, φ_0) являются обычными полярными координатами точки M, поэтому выполняются равенства (30):

$$x = \rho^* \cos\varphi_0, y = \rho^* \sin\varphi_0.$$

Но $\cos\varphi_0 = \cos(\varphi_0 + 2\pi\kappa) = \cos\varphi^*$, $\sin\varphi_0 = \sin(\varphi_0 + 2\pi\kappa) = \sin\varphi^*$, следовательно, справедливы равенства (33).

Если $\rho^* < 0$, то точка $M(\rho^*, \varphi^*)$ имеет также обобщенные полярные координаты $(-\rho^*, \varphi^* + \pi)$, поэтому, так как $-\rho^* > 0$, то по доказанному $x = -\rho^* \cos(\varphi^* + \pi)$, $y = -\rho^* \sin(\varphi^* + \pi)$ или $x = \rho^* \cos\varphi^*$, $y = \rho^* \sin\varphi^*$.

Зная прямоугольные координаты x, y точки M, по формулам (31) и (32) найдем обобщенные полярные координаты ρ и φ этой точки. Но в этом случае в формулах (31) и (32) перед радикалами надо поставить знаки «$\pm$». Знак перед радикалами в формулах (31) и (32) можно выбрать произвольно, но один и тот же.