Лекция№6

Тема: **Векторное произведение векторов**

План лекции

1. Ориентация векторного базиса в пространстве.
2. Определение векторного произведения двух векторов.
3. Свойства векторного произведения
4. Вычисление векторного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.
5. Приложение векторного произведения к вычислению площади треугольника.

Ориентация векторного базиса в пространстве

Определение 1. Три вектора называются упорядоченной тройкой (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой – вторым и какой третьим.

При записи тройки векторов мы всегда будем располагать эти векторы в порядке их следования. Так, запись $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ означает, что первым элементом тройки является вектор $\vec{b}$, вторым – вектор $\vec{a}$ и третьим – вектор $\vec{c}$.

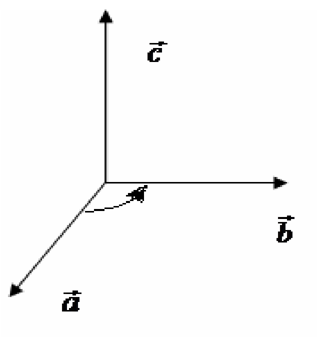
Определение 2. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется правой (левой), если выполнено одно из следующих трех условий (в курсе школьной физики вы изучали правило правой руки (правило Буравчика), аналогично получаем и здесь):

1. Если, будучи приведены к общему началу, эти векторы располагаются так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки;

2. Если после приведения к общему началу вектор $\vec{c}$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ кажется совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке);

3. Если, находясь внутри угла, образованного приведенными к общему началу векторами $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от $\vec{a}$ к $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки (рис.27а) (по часовой стрелке (рис.27б)).

а)



б)

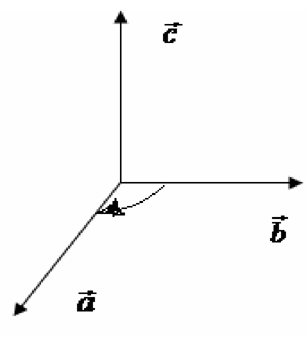


Рис.27.

Если две тройки векторов либо обе являются правыми, либо обе являются левыми, то говорят, что эти тройки одной ориентации.

Что противном случае получим?

Возможный вариант ответа: рассматриваемые две тройки противоположной ориентации.

Всего из векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ можно составить следующие шесть троек:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,,\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\,,\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\,, \qquad (11)$$

$$\vec{b}\,\vec{a}\vec{c},\vec{a}\vec{c}\vec{b},\vec{c}\vec{b}\,\vec{a}. \qquad (12)$$

Проверьте самостоятельно с помощью условия 3 ориентации троек векторов (11) и (12). Что можно о них сказать?

Возможный вариант ответа: все три тройки (11) той же ориентации, что и тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а все три тройки (12) имеют ориентацию, противоположную $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Определение векторного произведения двух векторов.
НДУ №2 коллинеарности векторов

Скалярное произведение векторов есть число, а при вычислении векторного произведения векторов мы получаем вектор.

Определение 1. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на не коллинеарный ему вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (рис.28), удовлетворяющий трем условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{пар.} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}});$ (13)

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b};$

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая, [4].

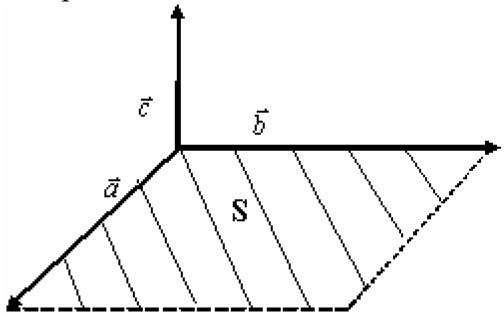


Рис.28.

Какие векторы называются коллинеарными?

Возможный вариант ответа: векторы называются коллинеарными, если прямые параллельны или совпадают.

Из определения векторного произведения следует необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.

При каком условии векторное произведение векторов равно нуль-вектору?

Возможный вариант ответа: векторное произведение векторов равно нуль-вектору, если векторы коллинеарны. Отсюда вытекает НДУ коллинеарности векторов.

НДУ коллинеарности векторов: $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$

Доказательство.

1)Необходимость вытекает из самого определения векторного произведения: для коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторное произведение по определению равно нулю.

2) Достаточность. Пусть векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Докажем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Прежде всего, исключим тривиальный случай, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является нулевым (нулевой вектор имеет неопределенное направление, и его можно считать коллинеарным любому вектору). Если же оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то $|\vec{a}|>0$ и $|\vec{b}|>0$, и поэтому из равенства $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ и из формулы (11) вытекает, что

$sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$, т.е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, ч.т.д.

Свойства векторного произведения

На предыдущей лекции мы доказывали свойства скалярного произведения векторов. Попробуйте вывести свойства векторного произведения векторов на основе предыдущих.

Возможный вариант ответа:

1°. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативный закон);

2°. $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$;

3°. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивный закон относительно сложения).

4°. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Доказательство провести самостоятельно.

Возможный вариант доказательства:

1°. Положим $\vec{m}=\vec{a}\times\vec{b}, \vec{n}=-\vec{b}\times\vec{a}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то в силу НДУ коллинеарности векторов $\vec{m}=\vec{n}=\vec{0}$, и свойство 1° доказано. Если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, во-первых, имеют одинаковую длину и, во-вторых, коллинеарны (в силу того, что оба вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ортогональны к плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$). Но тогда либо $\vec{m}=\vec{n}$, либо $\vec{m}=-\vec{n}$. Если бы имела место первая возможность, то по определению векторного произведения обе тройки $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ оказались бы правыми, но это невозможно (ибо эти тройки противоположной ориентации).

Итак, $\vec{m}=-\vec{n}$, и свойство 1° полностью доказано.

2°. Для доказательства свойства 2° положим $\vec{m}=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{n}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ и прежде всего исключим тривиальные случаи, когда вектор $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$ или когда $\alpha=0$. В этих случаях (в силу НДУ коллинеарности векторов и определения произведения вектора на число) мы получим, что $\vec{m}=\vec{n}=\vec{0}$, и свойство 2° доказано.

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и $\alpha\neq 0$. Докажем, что и в этом случае векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - φ, а угол между векторами $\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ψ. По определению векторного произведения и произведения вектора на число можно утверждать, что

$$|\vec{m}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\psi,\ |\vec{n}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi. \tag{14}$$

Учтем теперь, что могут представиться два случая: 1) $\psi=\varphi$ (когда $\alpha>0$ и векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ направлены в одну сторону); 2) $\psi=\pi-\varphi$ (когда $\alpha<0$ и векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ направлены в противоположные стороны). В обоих случаях $\sin\psi=\sin\varphi$ и в силу формул (14) $|\vec{m}|=|\vec{n}|$, т.е. векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ имеют одинаковую длину.

Далее, очевидно, что векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, ибо ортогональность к плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$, означает ортогональность и к плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для доказательства равенства векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ остается проверить, что эти векторы имеют одинаковое направление. Пусть $\alpha>0$ ($\alpha<0$); тогда векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ одинаково направлены (противоположно направлены), и, стало быть, векторы $\vec{a}\times\vec{b}$ и $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}$ также одинаково направлены (противоположно направлены), а это означает, что векторы $\vec{m}=(\alpha\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{n}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ всегда одинаково направлены. Свойство 2° доказано.

3°. Для доказательства третьего свойства заметим следующее: если вектор $\vec{a}$ единичный и $\vec{b}$ ему ортогонален, то вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ получится, если повернуть $\vec{b}$ в плоскости, перпендикулярной $\vec{a}$, на прямой угол в таком направлении, чтобы он образовал с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ правую тройку (наглядно: при взгляде на плоскость со стороны $\vec{a}$ поворот должен быть виден как происходящий против часовой стрелки).

4°. Это свойство непосредственно следует из НДУ коллинеарности векторов и из того, что любой вектор $\vec{a}$ коллинеарен сам с собой, [1], чтд.

Вычисление векторного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе

Теорема 1. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}(a_1,a_2,a_3),\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, то координаты векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ вычисляются по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

Доказательство.

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами, то имеем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-b_2a_3,-a_1b_3+b_1a_3,a_1b_2-b_1a_2)=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right),\text{чтд.}$$

Замечание. Формулу, приведенную в теореме можно записать иначе:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Приложение векторного произведения к вычислению площади треугольника

Задача. Найти площадь треугольника ABC, если в некоторой прямоугольной системе координат даны координаты его вершин:

$$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3).$$

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, численно равна $\left|\left[\overrightarrow{AB}\right],\left[\overrightarrow{AC}\right]\right|$. Отсюда следует, что

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\right],\left[\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ имеют координаты

$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),\overrightarrow{AC}(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$, поэтому, используя формулу (3),получаем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}\ .$$

В частности, если вершины треугольника лежат в плоскости Oxy, то $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\|.$$