Лекция№5

Тема: **Скалярное произведение векторов**

***План лекции***

1. Угол между векторами. Определение скалярного произведения векторов.
2. Вычисление скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе
3. Свойства скалярного произведения.
4. Направляющие косинусы вектора.

## Угол между векторами. Определение скалярного произведения векторов

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые векторы. Отложим от произвольной точки $O$ векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ рассмотрим лучи $OA$ и $OB$ (рис. 24, а). *Углом между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется угол между лучами *OA* и *OB*, т. е. угол *AOB*, если эти лучи не совпадают. Если лучи OA и OB совпадают, то угол между ними считается равным нулю. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Так как два угла, стороны которых сонаправлены, равны (рис.24, б), то *угол между данными векторами не зависит от выбора точки O.*

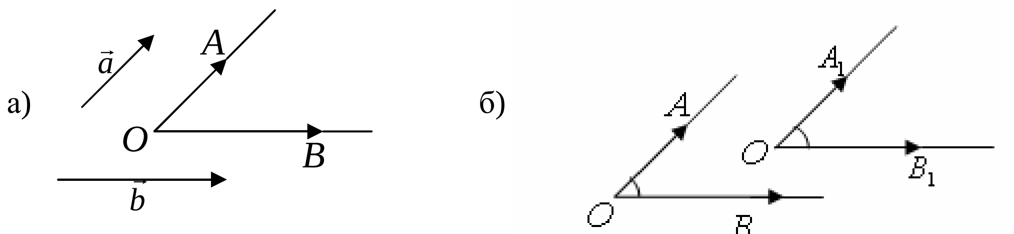


Рис. 24.

Два нулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *взаимно перпендикулярными или ортогональными,* если $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ пишут $\vec{a}\perp\vec{b}$. Условимся считать, что если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, нуль-вектор перпендикулярен любому вектору пространства. Итак, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем: $0\le\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le\pi$.

*Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.* Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Итак, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right). \qquad (19)$$

Из этой формулы мы заключаем, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и тогда, когда $\vec{a}\perp\vec{b}$. Это утверждение справедливо и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - нулевой, так как нулевой вектор мы считаем перпендикулярными к любому вектору.

Из формулы (19) следует также, что $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Число $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$. Таким образом,

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\,. \qquad (20).$$

Скалярное произведение двух векторов находит широкое применение в различных разделах физики, в частности, в механике.

**Вычисление скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе**

2. Докажем следующую теорему, которая позволяет найти скалярное произведение двух векторов, зная их координаты.

***Теорема 1.*** *Скалярное произведение векторов* $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, *заданных в ортонормированном базисе, выражается формулой*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad (21)$$

***Доказательство.*** Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость формулы (21) очевидна, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. От какой-нибудь точки *O* отложим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и рассмотрим треугольник *OAB*. По теореме косинусов $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA\cdot OB\cos\alpha$, где $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$. Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то предыдущее равенство можно записать так:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2). \qquad (22)$$

Так как $(\vec{b} - \vec{a})(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, то согласно теореме 2 параграфа 6 $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$. По той же теореме

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \\ |\vec{b}|^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{aligned} \qquad (23)$$

Подставив эти значения в формулу (22), после элементарных преобразований получаем формулу (21).

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. По теореме о коллинеарных векторах существует такое число $\lambda$, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, следовательно,

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3. \qquad (24)$$

По определению скалярного произведения $\vec{a}\vec{b} = (\lambda\vec{b})\vec{b} = |\lambda\vec{b}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{b}, \vec{b})$. Отсюда следует, что при любом $\lambda$ имеем: $\vec{a}\vec{b} = \lambda|\vec{b}|^2$. Но $|\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, поэтому $\vec{a}\vec{b} = \lambda(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (\lambda b_1)b_1 + (\lambda b_2)b_2 + (\lambda b_3)b_3$. Используя равенства (24), получаем формулу (21).

***Следствие 1.*** Векторы $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданные в ортонормированном базисе, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \qquad (25)$$

***Следствие 2.*** Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданными в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \qquad (26)$$

Действительно, по формуле (19) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Подставив сюда значения $\vec{a}\cdot\vec{b}, |\vec{a}|, |\vec{b}|$, из формулы (21) и (23) получим (26).

## Свойства скалярного произведения

3. Основные свойства скалярного произведения векторов сформулированы в следующей теореме.

***Теореме 2.*** Для произвольного числа $\alpha$ и произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедливы следующие равенства:

$1^0$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ *(коммутативность)*

$2^0$. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$ и $\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

$3^0$. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ *(дистрибутивность относительно сложения).*

Выберем ортонормированный базис $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ и введем в рассмотрение координаты векторов: $\vec{a}\ (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$.

Ограничимся доказательством одного из равенств, например равенства $3^0$, остальные равенства доказываются аналогично. Так как $(\vec{a}+\vec{b})(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$, то по формуле

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3= \\ (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} \qquad (27)$$

***Следствие.*** Для произвольных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ справедливо равенство $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$.

## Направляющие косинусы вектора

Используя скалярное произведение, выясним геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе. Пусть $\vec{a}$ - ненулевой вектор, заданный в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ координатами: $\vec{a}\ (a_1,a_2,a_3)$. Это означает, что $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$. Умножив обе части этого равенства скалярно на $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ и учитывая, что $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1, \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, получаем: $a_1=\vec{a}\cdot\vec{i}$, $a_2=\vec{a}\cdot\vec{j}$, $a_3=\vec{a}\cdot\vec{k}$.

Если ввести обозначения: $\alpha=(\vec{a},\hat{\ }\vec{i}), \beta=(\vec{a},\hat{\ }\vec{j}), \gamma=(\vec{a},\hat{\ }\vec{k})$, то предыдущие формулы принимают вид:

$$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha, a_2=|\vec{a}|\cos\beta, a_3=|\vec{a}|\cos\gamma \qquad (28)$$

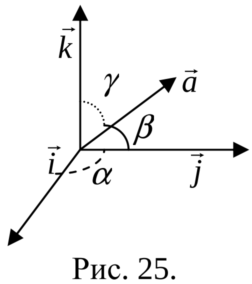


Рис. 25.

Числа $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Из формул (28) следует, что *каждая координата вектора равна произведению длины этого вектора на соответствующий направляющий косинус.*

Подставив значения $a_1,a_2,a_3$ из (28) в первую формулу (23), найдем: $|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)$. Так как $|\vec{a}|\neq 0$, то

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (29)$$

Таким образом, *сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице*.

Заметим, что координаты единичного вектора в ортонормированном базисе равны направляющим косинусам этого вектора. Это утверждение прямо следует из формул (9), если учесть, что $|\vec{a}| = 1$.