Лекция№2

Тема: **Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. НДУ коллинеарности.**

План лекции

1. Сложение векторов.
2. Вычитание векторов. Модуль суммы и модуль разности векторов.
3. Определение и свойства произведения вектора на число.
4. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.

Сложение векторов

1. Введем операцию сложения векторов, которая играет важную роль в векторной алгебре. Возьмем произвольный вектор $\vec{a}$ и $\vec{b}$. От какой-нибудь точки *A* отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, затем от точки *B* отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается так: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 9)

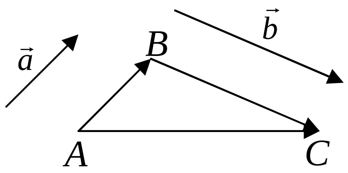

Рис. 9.

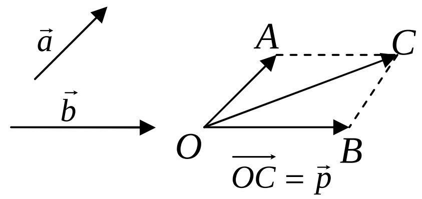

Рис. 10.

Покажем, что вектор $\vec{c}$ определяется с помощью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно, независимо от выбора точки *A*, от которой откладывается вектор $\vec{a}$. Пусть вместо точки *A* взята другая точка A_1 и выполнено аналогичное построение: $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$. Докажем, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то по лемме о равенстве векторов $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, т. е. $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Отсюда по лемме о равенстве векторов $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

Заметим, что для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов приходится строить треугольник (ΔABC в принятых выше обозначениях). Поэтому указанное здесь правило сложения векторов в общем случае называется *правилом треугольника*. Это правило можно сформулировать так: *для любых точек A, B и C справедливо равенство*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

Применив это правило к точкам *A, B, A*, получим $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.
Аналогично $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

Таким образом, для любого вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \qquad (2)$$

$$\vec{a} + \vec{0} \quad \text{и} \quad \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \qquad (3)$$

Если слагаемые векторы не коллинеарны, то для построения их суммы можно пользоваться другим способом – *правилом параллелограмма*, которое хорошо известно из курса физики средней школы. На рисунке 10 дано построение суммы $\vec{p}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по этому правилу.

2. Докажем теорему о сложении векторов.

Теорема. *Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие равенства:*

1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство или свойство коммутативности).

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство или свойство ассоциативности).

Доказательство 1^0. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ - произвольные векторы. От какой – нибудь точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, а затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (рис. 11). Согласно построению $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,поэтому по лемме о равенстве векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т.е. $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$.

Рассмотрим случай когда $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. По правилу треугольника построим сумму этих векторов. Из определения параллелограмма $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда треугольник ABC: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 11 а)

По правилу треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC}$. Отсюда следует, что $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{c}$ - один и тот же вектор.

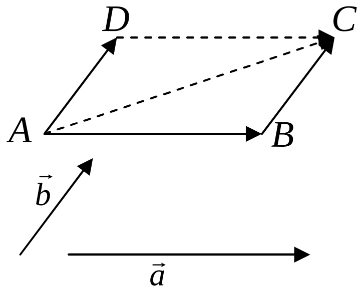

Рис.11 а.

Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (рис. 11 б). $OA = \vec{a}$, $AB = \vec{b}$, $OB = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ (*). Возьмем вспомогательную точку *D,* не лежащую на прямой *OB*. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OD}$ (по доказанному в случае 1, так как $\overrightarrow{DB} \nparallel \overrightarrow{OD}$)(**).

$\Delta ODA : \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA}$, (по доказанному в случае 1) $\Delta ADB : \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ (по доказанному в случае 1). Подставим два последних выражения в равенство (**)

$\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \vec{b} + \vec{a}$ (***).Сравним (*) и (***) можно сделать вывод, что свойство выполняется.

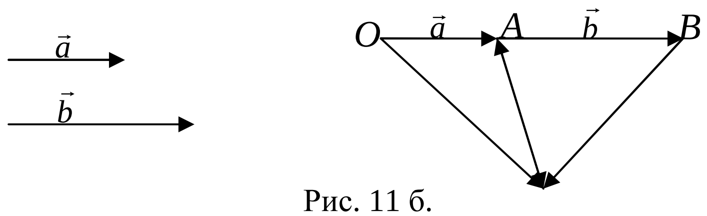

Рис. 11 б.

Доказательство 2^0. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ - произвольные векторы. Возьмем какую-нибудь точку А и отложим последовательно векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ (рис. 12). По правилу треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, поэтому $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \overrightarrow{AD}$. С другой стороны, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, поэтому $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \overrightarrow{AD}$. Отсюда следует, что $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ и $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ - один и тот же вектор.

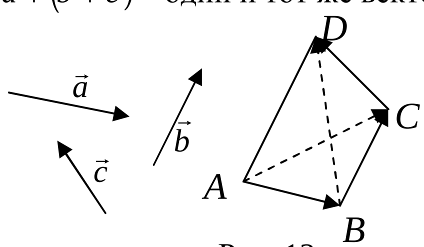

Рис. 12.

3. Суммой векторов $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ будем считать вектор $\vec{p} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$. На основании теоремы о сложении векторов $\vec{p} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$, поэтому при записи суммы трех векторов можно опустить скобки и записать ее в виде $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Более того, можно доказать, что *сумма трех векторов не зависит от порядка слагаемых*. В самом деле, докажем, например, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$. Здесь применена теорема о сложении векторов. Аналогично можно определить и сумму большего числа векторов. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ - произвольный набор векторов (n>3). Их суммой называется вектор $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_{n-1}\right) + \vec{a}_n$ и обозначается так: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$. На рисунке 13 показано построение суммы n векторов при n =5: $\overrightarrow{OA_5} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$. Это правило построения суммы нескольких векторов называется *правилом многоугольника*.

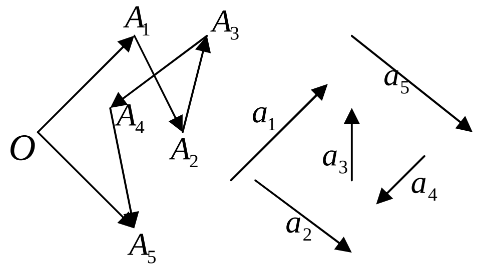

Рис. 13.

По аналогии с предыдущим можно убедиться в том, что сумма n векторов не зависит от порядка слагаемых.

Вычитание векторов. Модуль суммы и модуль разности векторов

4. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что

$$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}. \qquad (4)$$

Докажем, что разность любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует и определяется однозначно.

Сначала предположим, что вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству (4), существует, и выразим его через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Прибавим к обеим частям равенства (4) вектор -$\vec{b}$: $\left(-\vec{b}\right) + \left(\vec{b} + \vec{x}\right) = \left(-\vec{b}\right) + \vec{a}$. К левой части этого равенства применим сочетательный закон, а к правой части – переместительный закон сложения векторов: $\left(\left(-\vec{b}\right) + \vec{b}\right) + \vec{x} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$. Отсюда следует, что

$$\vec{x} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right). \qquad (5)$$

Итак, доказано, что если вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству (4), существует, то он определяется однозначно формулой (5). Но вектор $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ действительно удовлетворяет уравнению (4): $\vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{b})) = \vec{a}$. Таким образом, формулой (5) однозначно определяется разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначает так: $\vec{a} - \vec{b}$. Из формулы (5) получаем:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \qquad (6)$$

По правилу треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, поэтому согласно равенству (4)

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \qquad (7)$$

Следовательно, для любых точек A, B, C справедливо равенство (7).

Замечание. В векторной алгебре часто встречается выражение вида $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ или $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$ и др. По аналогии с равенством (6) эти выражения означают:

$$\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + (-\vec{d}).$$

5. Иногда ошибочно считают, что при сложении векторов их длины складываются. На самом деле длина суммы двух векторов в общем случае не равна сумме длин слагаемых.

Можно доказать, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы следующие соотношения:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|, \qquad (8)$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \qquad (9)$$

В соотношении (8) знак равенства имеет место только в том случае, когда $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а в соотношении (9) только в том случае, когда $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, или один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой.

Умножение вектора на число

1. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на действительное (вещественное) число* α называется вектор $\vec{p}$, который удовлетворяет условиям:

а) $\left|\vec{p}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right|$, где $\left|\alpha\right|$ - абсолютное значение числа α;

б) $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\alpha \ge 0$ и $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\alpha < 0$.

Такой вектор $\vec{p}$ обозначают через $\alpha\vec{a}$. Нетрудно убедиться в том, что при любых α и $\vec{a}$ вектор $\vec{p}$ определяется однозначно.

На рисунке 14 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD} = (-3)\overrightarrow{AB}$. Из условия а) следует, что $\vec{p} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$. Таким образом,

$$\alpha\vec{0} = \vec{0},\ 0\vec{a} = \vec{0}. \qquad (10)$$

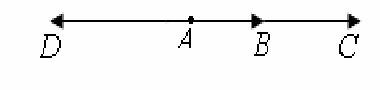

Рис. 14.

2. Для дальнейшего изложения понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если при гомотетии с центром O и коэффициентом k треугольник OAB переходит в треугольник $OA'B'$, то* $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

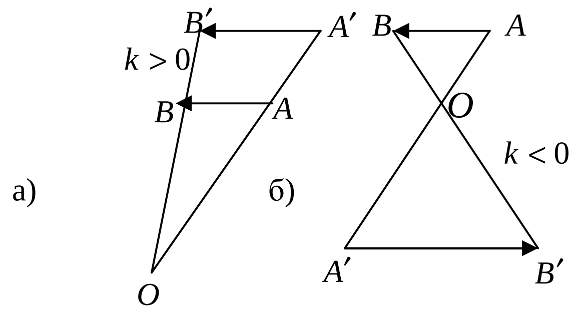

Рис.15.

Доказательство. По определению гомотетии $OA' = \left|k\right|OA, OB' = \left|k\right|OB$ (рис. 15, а и б), поэтому $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$. Отсюда следует, что $A'B' = \left|k\right|AB$, $A'B' \,//\, AB$. Если k>0, то точки B и B' лежат в одной полуплоскости с границей OA (рис. 15, а), поэтому $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, следовательно, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Если k<0, то точки B и B' лежат в разных полуплоскостях с границей OA (рис. 15, б), поэтому $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$,т. е. и в этом случае $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Докажем теперь теорему о свойствах умножения вектора на число.

Теорема. *Для произвольных чисел* α, β *и векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *справедливы следующие равенства:*

1^0. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ и $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

2^0. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

3^0. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

4^0. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Доказательства свойств. Свойство 1^0 непосредственно следует из данного выше определения произведения вектора на число. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость остальных свойств очевидна. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Ниже приведены доказательства свойств 2, 3 и 4.

2^0. Пусть $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$, $\vec{q} = (\alpha\beta)\vec{a}$. По определению произведения вектора на число $|\vec{p}| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$, $|\vec{q}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$.

Отсюда следует, что $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Докажем, что $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Возможны два случая: $\alpha\beta > 0$ и $\alpha\beta < 0$. Рассмотрим первый случай. Так как $\vec{p} = \alpha(\beta\vec{a})$, числа α и β одного знака, то векторы $\vec{p}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены. Но векторы $\vec{q} = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ также одинаково направлены, следовательно, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Аналогично убеждаемся в том, что и в случае $\alpha\beta < 0$ получим: $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Учитывая равенства $|\vec{p}| = |\vec{q}|$, приходим к выводу, что $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

3^0. От какой-нибудь точки *A* отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а затем от точки *B* – вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, т. е. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Рассмотрим гомотетию с коэффициентом α и с центром в некоторой точке *O*, не лежащей на прямых *AB*, *BC* и *AC*. Пусть A', B', C' - образы точек *A*, *B* и *C*. По предыдущей лемме $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{A'C'} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$. С другой стороны, по правилу треугольника $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$, т. е. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

4^0. Рассмотрим два возможных случая: а) $\alpha\beta > 0$ и б) $\alpha\beta < 0$.

а) $\alpha\beta > 0$. От некоторой точки *A* отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a}$, а затем от точки *B* - вектор $\overrightarrow{BC} = \beta\vec{a}$ (рис.16, а, б). Отсюда следует, что $AB = |\alpha||\vec{a}|, BC = |\beta||\vec{a}|$. Так как $\alpha\beta > 0$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, поэтому точка *B* лежит между точками *A* и *C*, следовательно, $AC = AB + BC$ или $AC = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}|$. Но числа α и β имеют одинаковые знаки, поэтому $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$. Таким образом,

$$AC = |\alpha + \beta||\vec{a}|. \tag{11}$$

Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены, если $\alpha > 0, \beta > 0$, т. е. если $\alpha + \beta > 0$ (рис.16, а), и противоположно направлены, если $\alpha < 0, \beta < 0$, т. е. $\alpha + \beta < 0$ (рис. 16, б). Поэтому, учитывая равенство (2), получим: $\overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta)\vec{a}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Таким образом, $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

б) $\alpha\beta < 0$. Если $\alpha + \beta = 0$, то левая часть равенства 4^0 есть нуль-вектор. Докажем, что в этом случае и правая часть есть нуль-вектор. В самом деле, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a} = \alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{a} = 0$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha + \beta \neq 0$. Так как α и β имеют разные знаки, то либо $-\alpha, (\alpha + \beta)$, либо $-\beta, (\alpha + \beta)$ имеют один и тот же знак. Пусть, например, $-\alpha$ и $\alpha + \beta$

имеют один и тот же знак. Тогда по доказанному $(-\alpha)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}=((-\alpha)+(\alpha+\beta))\vec{a}=\beta\vec{a}$ или $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

Рис.16.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов

1.***Теорема*** (Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.) Для того чтобы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где ($\vec{a}\neq\vec{0}$) были коллинеарны необходимо и достаточно чтобы существовало число $\lambda\in\Re$, такое что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ (*).

Доказательство (необходимость). Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны возможны три случая:

а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$

б) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$

в) $\vec{b}=\vec{0}$

а) $\vec{a}_0=\vec{b}_0$, тогда $\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\vec{b}_0=\left|\vec{b}\right|\cdot\vec{a}_0=\left|\vec{b}\right|\cdot(\frac{1}{|\vec{a}|})\cdot\vec{a}=\frac{\left|\vec{b}\right|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$. Если в качестве λ выбрать число $\lambda=\frac{\left|\vec{b}\right|}{|\vec{a}|}$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

б) $\vec{b}_0=-\vec{a}_0$, $\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\vec{b}_0=\left|\vec{b}\right|\cdot(-\vec{a}_0)=-\left|\vec{b}\right|\cdot\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=(-\frac{\left|\vec{b}\right|}{|\vec{a}|})\vec{a}$, $\lambda=\frac{-\left|\vec{b}\right|}{|\vec{a}|}$, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

в) $\vec{0}=\lambda\vec{a}$ это равенство выполняется при $\lambda=0$.

Доказательство (достаточность). Пусть существует число λ такое, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, тогда из определения произведения вектора на число следует, что при $\lambda>0$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$; при $\lambda<0$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$; при $\lambda=0$, $\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{0}\parallel\vec{a}$.