2. Конспект лекций (рекомендации к теоретической части)

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Лекция№1

Тема: **Направленный отрезок. Вектор. Основные отношения векторов**

План лекции

1. Направленный отрезок.
2. Понятие вектора, его длины и направления. Основные отношения векторов: коллинеарность, одинаковая и противоположная направленность, равенство.
3. Основные отношения векторов.

Направленный отрезок

1. Отрезок называется *направленным,* если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы. Пусть задан отрезок с концами в точках A и B. Если A — первая точка, а B - вторая, то точка A называется *началом*, а B — *концом* этого направленного отрезка; его обозначают так: $\overline{AB}$. На рисунке направленный отрезок отмечается стрелкой, обращенной к его концу. Так, на рисунке 1 изображены отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

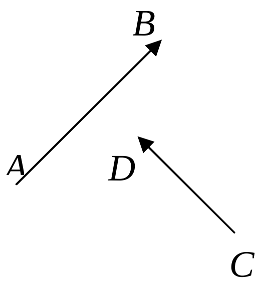

Рис. 1.

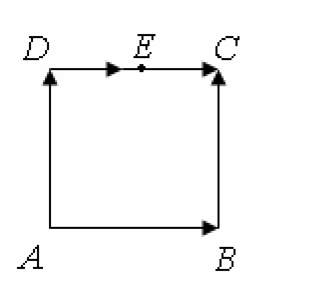

Рис. 2.

В целях общности удобнее рассматривать каждую точку A как частный случай направленного отрезка (начало и конец которого совпадают). Его называют *нулевым направленным отрезком* и обозначают так: $\overline{AA}$. Длиной ненулевого направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается символом $\left|\overline{AB}\right|$ или просто AB. Длина нулевого направленного отрезка считается равной нулю.

Пусть A и B — две точки. Если рассматриваются обычные (ненаправленные) отрезки, то AB и BA — один и тот же отрезок (одно и тоже множество точек). Если же рассматриваются направленные отрезки, то $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ — разные отрезки. Каждый из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ называются *противоположным* другому. Если $\overline{AA}$ — нулевой направленный отрезок, то противоположным ему считается тот же отрезок $\overline{AA}$.

Ненулевые отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются одинаково (противоположно) направленными, если одинаково (противоположно) направлены лучи AB и CD. Нулевой направленный отрезок считается одинаково направленным с любым направленным отрезком.

Ненулевой отрезок $\overline{AB}$ определяет направление, а именно то направление, которому принадлежит луч AB. Нулевой отрезок $\overline{AA}$ не определяет никакого направления.

2. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквиполлентными,* если они одинаково направлены и имеют равные длины (пишут $\overline{AB} \overset{\omega}{=} \overline{CD}$).

На рисунке 2 изображен квадрат $ABCD$. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ эквиполлентны, так как они одинаково направлены и их длины равны. Отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ также эквиполлентны. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ не эквиполлентны, (их длины равны, но направления различны), точно так же не эквиполлентны отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$ (они одинаково направлены, но их длины различные). Ясно, что любые два нулевых направленных отрезка эквиполлентны.

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквиполлентны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают.

Заметим, что отношение эквиполлентности удовлетворяет трем условиям:

1. $\overline{AB}\overset{\omega}{=}\overline{AB}$ для любого направленного отрезка $\overline{AB}$ (рефлексивность).

2. $\overline{AB}\overset{\omega}{=}\overline{CD} \Rightarrow \overline{CD}\overset{\omega}{=}\overline{AB}$ (симметричность).

3. ($\overline{AB}\overset{\omega}{=}\overline{CD}$ и $\overline{CD}\overset{\omega}{=}\overline{EF}$) $\Rightarrow \overline{AB}\overset{\omega}{=}\overline{EF}$ (транзитивность).

Следовательно, это отношение является отношением эквивалентности на множестве всех направленных отрезков пространства.

Понятие вектора, его длины и направления. Основные отношения векторов

1.Пусть W – множество всех направленных отрезков пространства. Отношение эквиполлентности, заданное в этом множестве, является отношением эквивалентности. Каждый класс эквивалентности этого отношения называется вектором (или свободным вектором). Итак, вектор – это элемент фактор-мнажества $V = W|_{\omega}$. Векторы обозначаются одной буквой, над которой ставится стрелка: $\vec{a}, \vec{b}$, …, или одной буквой полужирного шрифта: **a, b, c, …,** .Таким образом, вектор – это множество всех направленных отрезков, любые два из которых эквиполлентны. Если хотя бы один из направленных отрезков этого множества нулевой, то все направленные отрезки множества нулевые. В этом случае вектор называется нулевым или нуль-вектором и обозначается через $\vec{0}$.

Пусть $\vec{a}$ - данный вектор, т.е. класс эквивалентности отношения $\overset{\omega}{=}$. Если $\overline{AB}$ - представитель этого класса, то $\overline{AB}$ определяется весь класс эквивалентности, т.е. вектор $\vec{a}$. В этом случае вектор $\vec{a}$ обозначается через $\overrightarrow{AB}$ и на рисунке изображается в виде направленного отрезка $\overline{AB}$.

Заметим, что запись $\vec{a} = \vec{b}$ (читается: «вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$) означает, что множество $\vec{a}$ совпадает с множеством $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - один и тоже вектор, но по-разному обозначенный. В частности, запись $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означает, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ - один и тот же вектор (т. е. что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквиполлентны). Имеет место следующая лемма о равенстве векторов.

Лемма. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Доказательство. По условию леммы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, поэтому $\overline{AB}\overset{\omega}{=}\overline{CD}$. По признаку эквиполлентности направленных отрезков середины отрезков AD и CB совпадают (рис. 3).

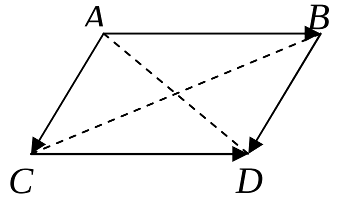

Рис. 3.

Рассмотрим отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$. Так как середины отрезков AD и CB совпадают, то $\overline{AC}\overset{\omega}{=}\overline{BD}$, следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

2. Пусть $\vec{a}$ - произвольный вектор, а O – некоторая точка пространства. Докажем, что существует одна и только одна точка M *т*акая, что $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Действительно, допустим, что $\overline{AB} \in \vec{a}$. Рассмотрим середину C отрезка OB (этот отрезок может быть и нулевым) и возьмем точку M, симметричную точке A относительно точки C (рис. 4, а, б).

а) б)

Рис. 4.

По признаку эквиполлентности двух направленных отрезков $\overline{OM} \overset{\omega}{=} \overline{AB}$, поэтому $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.Построение точки M условимся называть откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки O.

3. Говорят, что вектор $\vec{a}$ параллелен прямой d, если любой его представитель параллелен этой прямой или лежит на ней. Нулевой вектор считается параллельным любой прямой. Очевидно, если вектор $\vec{a}$ параллелен прямой d, то он параллелен любой прямой, параллельной прямой d.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если существует прямая, которой они параллельны. Отметим, что если из двух векторов по крайней мере один нулевой, то эти векторы коллинеарны. Здесь $\vec{a} \parallel \vec{b}$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. На рисунке 5 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GH}$. На этом же рисунке векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{GH}$ не коллинеарны.

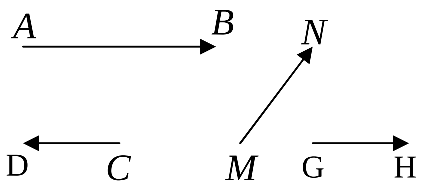

Рис. 5.

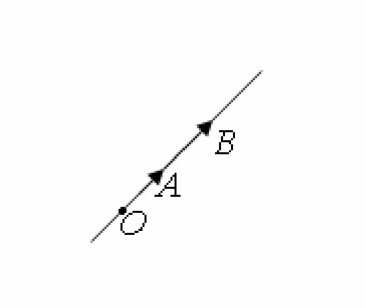

Рис. 6.

Замечание. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарные векторы. Отложим эти векторы от произвольной точки O пространства: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Отрезки $O\vec{A}$ и $O\vec{B}$ (рис. 6) имеют общее начало, и в силу коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ они лежат на одной прямой линии. Это свойство поясняет термин «коллинеарные векторы».

4. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - коллинеарные векторы, а $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ - какие-то представители этих векторов: $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$.По определению коллинеарности векторов отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ параллельны или лежат на одной прямой. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются одинаково направленными , если одинаково направлены отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис.7,а), и противоположно направленными, если противоположено направлены эти отрезки (рис. 7,б). Ясно, что свойство двух векторов быть одинаково (противоположно) направленными не зависит от выбора представителей этих векторов.

Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ будет означать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, а запись $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ - что эти векторы противоположено направлены. На рисунке 5 $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{GH}$. На рисунке 6 $\overline{OA} \uparrow\uparrow \overline{OB}$. Так как нулевой направленный отрезок одинаково направлен с любым направленным отрезком, то $\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$, где $\vec{a}$ - произвольный вектор.

а) б)

Рис. 7.

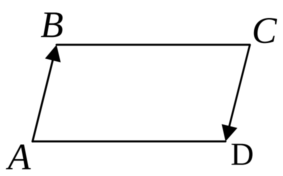

Рис. 8.

5. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ и от какой – нибудь точки *A* отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется вектором, противоположным вектору $\vec{a}$, и обозначается через (-$\vec{a}$). На рисунке 8 изображен параллелограмм *ABCD*. Вектор $\overrightarrow{CD}$ является вектором, противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$, так как $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Вектором, противоположным вектору $\overrightarrow{BA}$, является $\overrightarrow{AB}$, поэтому -(-$\vec{a}$)=$\vec{a}$.Вектором, противоположным нуль-вектору, является нуль-вектор.

6. Длиной вектора называется длина любого представителя этого вектора. Длина нулевого вектора равна нулю. Длины векторов $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ обозначаются так: $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\overrightarrow{AB}|$.

Вектор называется единичным, если его длина равна единице.

Замечание. В математике и ее приложениях (механике, физике и т. д.), кроме свободных векторов, используются и так называемые скользящие и связанные векторы.

Скользящий вектор – это множество одинаково направленных отрезков прямой, имеющих равные длины. Таким вектором можно представить силу, приложенную к абсолютно твердому телу.

Связанный вектор – это направленный отрезок. Если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$-связанные векторы, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда , когда совпадают точки *A* и *C*, а также точки *B* и *D*. Связанным вектором представляют, например, вектор скорости частиц жидкости, движущейся с завихрениями; здесь каждая частица имеет свой вектор скорости для соседней частицы.

В настоящем курсе геометрии применяются только свободные векторы, которые будем называть векторами, опуская для краткости слово «свободный».