

Мощность множества

§1. Понятие множества. Мощность множества

Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему определение, которое не сводилось бы к замене слова «множества» его синонимами: совокупность, система, класс и т.п. Можно попытаться определить понятие множества используя аксиоматический метод. Для этого необходимо выделить достаточно широкий запас элементарных свойств множеств и принять его за систему аксиом. Однако, этот путь наталкивается на трудности, связанные с проверкой непротиворечивости выбираемой аксиоматики. Вместе с тем, все обнаруженные теоретико-множественные *антиномии* (противоречия, парадоксы) возникают при попытках оперирования со слишком «обширными» множествами («сверхмножествами») типа «множества всех множеств», «множества всех множеств, обладающих конкретным свойством» и т.п. Источником антиномий служит «оправдание» противоестественного свойства какого-либо «сверхмножества» быть элементом самого себя.

П а р а д о к с Р а с с е л а . Пусть M - множество всех множеств, не включающих самих себя в качестве элементов. Если $M \notin M$, то по определению множества M должно выполняться включение $M \in M$. С другой стороны, если $M \in M$, то множество M не содержит себя в качестве элемента, значит, $M \notin M$.

Существует ряд аксиоматик теории множеств, позволяющих избежать по крайней мере известных антиномий. В настоящее время наиболее употребимы две из них – система аксиом Геделя-Бернайса и система аксиом Цермело-Френкеля. Первая из этих аксиоматик основана на разделении «всех множеств» на два типа: «настоящие» множества (несобственные классы) и «сверхмножества» (собственные классы). Различия множеств (классов) разных типов проявляются в правилах оперирования ими. Для множеств второго типа они значительно жестче (например, собственный класс не может быть элементом какого-либо класса). Вторая аксиоматика запрещает использование «сверхмножеств» и не признает «законным» какое-либо оперирование ими с помощью естественных теоретико-множественных правил. Трудно совместить в одном курсе лекций сколько-нибудь содержательное изложение материала с его строгим аксиоматическим обоснованием. Поэтому знакомство с одним из основных понятий теории множеств осуществим опираясь лишь на интуитивное представление о множествах и их свойствах.

Множества X, Y называются *эквивалентными* (в обозначениях: $X \sim Y$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Про эквивалентные множества говорят, что они имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, мощность множества - это то общее, что присуще всем множествам эквивалентным данному множеству. Мощность множества X обозначаем $\text{card } X$.

У п р а ж н е н и е . 1. Убедиться, что $[0;1] \sim [0;2]$, $[0;1] \sim (0;1)$, $(0;1) \sim \mathbf{R}$.

2. Доказать, что конечные множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое количество элементов.

3. Множество называется *бесконечным*, если оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству. Доказать, что множества \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} являются бесконечными.

Понятие «мощности множества» для конечных множеств эквивалентно понятию «количества элементов множества», следовательно, $\text{card } \{0,1,a\} = 3$, $\text{card } \{\oplus, \emptyset, \perp, \wedge\} = 4$. Множества эквивалентные множеству натуральных чисел \mathbf{N} называются *счетными*, а множества эквивалентные множеству действительных чисел называются *континуумами*. Мощность счетных множеств обозначается \aleph_0 (алеф нуль), мощность континуумов обозначается \aleph (алеф) или c .

У п р а ж н е н и е . 1. Убедиться, что $\text{card } \mathbf{Z} = \text{card } 2\mathbf{Z} = \aleph_0$, $\text{card } \mathbf{N}^2 = \text{card } \mathbf{Z}^2 = \aleph_0$.

2. Доказать, что для любого $k \in \mathbf{N}$ справедливо равенство $\text{card } \mathbf{N}^k = \aleph_0$.

§2. Свойства счетных множеств

Если множество X является счетным, то существует биекция (взаимно однозначное эпиморфное отображение) $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Другими словами, множество X можно представить в виде последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, все члены которой различны. Возможность представления множества в виде последовательности, все члены которой различны, является характеристическим свойством счетных множеств.

Т₁ Каждое подмножество счетного множества конечно или счетно.

⇓ Пусть $X \sim \mathbb{N}$, $Y \subseteq X$. Так как множество X является счетным, то его можно представить в виде последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, все члены которой различны. Пусть x_{k_1}, x_{k_2}, \dots - те члены последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, которые входят в Y . Если среди чисел k_1, k_2, \dots есть наибольшее, то множество Y конечно, в противном случае Y счетно, поскольку представляется в виде подпоследовательности $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ■

Т₂ Объединение конечного или счетного множества конечных или счетных множеств не более чем счетно, т.е. либо конечно, либо счетно.

⇓ Пусть $\{X_1, X_2, \dots\}$ - не более чем счетная совокупность не более чем счетных множеств; $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2 \setminus Y_1$, $Y_3 = X_3 \setminus (Y_1 \cup Y_2)$, Множества

$$Y_1 = \{y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots\}, Y_2 = \{y_{21}, y_{22}, y_{23}, \dots\}, Y_3 = \{y_{31}, y_{32}, y_{33}, \dots\}, \dots$$

- не более чем счетные, попарно не пересекаются и $Y_1 \cup Y_2 \cup \dots = X_1 \cup X_2 \cup \dots$. Составим

$ \begin{array}{ccc} y_{11} & \text{---} & y_{12} & & y_{13} & \text{---} & \\ & / & & & / & & \\ y_{21} & & & & y_{22} & & \\ & & / & & & & \\ y_{31} & & & & & & \end{array} $	<p>бесконечную вправо и вниз таблицу с возможно пустыми отдельными ячейками, если какие-либо из множеств Y_1, Y_2, \dots окажутся конечными или пустыми. Занумеруем ячейки этой таблицы «по диагоналям», пропуская пустые ячейки. В результате этой процедуры, каждый элемент множества $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k$</p>
---	---

получит определенный номер. Если среди этих номеров есть наибольший, то множество X конечно. В противном случае будет установлено взаимно однозначное соответствие между элементами множества X и всеми натуральными числами, т.е. множество X счетно ■

Т₃ Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

⇓ Если множество X бесконечно, то оно содержит эквивалентное себе собственное бесконечное подмножество $X_1 \subset X$. Так как X_1 - собственное подмножество X , то найдется элемент $x_1 \in X \setminus X_1$. Множество X_1 эквивалентно бесконечному множеству, значит, само является бесконечным. Выберем его бесконечное собственное подмножество $X_2 \subset X_1$ и элемент $x_2 \in X_1 \setminus X_2$ и т.д. В результате этой процедуры получим последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, представляющую некоторое счетное подмножество множества X ■

Т₄ Если к бесконечному множеству добавить счетное множество, то его мощность не изменится.

⇓ Пусть X - бесконечное множество, $Y \sim \mathbb{N}$. Покажем, что $X \cup Y \sim X$. Так как X бесконечное множество, то в нем можно выделить собственное счетное подмножество $Z \subset X$. При этом $X = (X \setminus Z) \cup Z$, $X \cup Y = (X \setminus Z) \cup (Z \cup Y)$. Так как $Z \sim Z \cup Y$, то суще-

существует биекция $f: Z \rightarrow Z \cup Y$. Эта биекция позволяет построить взаимно однозначное отображение

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in Z, \\ x, & \text{если } x \in X \setminus Z \end{cases}$$

множества X на множество $X \cup Y$ ■

Т₃ Если множество X бесконечно и несчетно, $Y \subseteq X$, $Y \sim \mathbb{N}$, то $X \setminus Y \sim X$.

⇓ Так как множество Y счетно и $X = (X \setminus Y) \cup Y$, то множество $X \setminus Y$ бесконечно и несчетно. По предыдущему свойству $X \setminus Y \sim X$ ■

§3. Счетность множества рациональных и алгебраических чисел

Высотой обыкновенной дроби p/q , где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, называют натуральное число $h(p/q) = |p| + q$.

Т₁ Множество рациональных чисел \mathbb{Q} счетно.

⇓ Множество рациональных чисел \mathbb{Q} эквивалентно множеству обыкновенных несократимых дробей $\tilde{\mathbb{Q}} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{НОД}(p, q) = 1\}$. Покажем, что множество $\tilde{\mathbb{Q}}$ счетно. Для этого разобьем множество $\tilde{\mathbb{Q}}$ по высоте:

$$\tilde{\mathbb{Q}}_{h=1} = \left\{ \frac{0}{1} \right\}, \tilde{\mathbb{Q}}_{h=2} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \tilde{\mathbb{Q}}_{h=3} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{1} \right\}, \dots$$

Множества $\tilde{\mathbb{Q}}_{h=n}$ являются конечными и $\tilde{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{Q}}_{h=n}$, значит, по второму свойству счетных множеств $\mathbb{Q} \sim \tilde{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{N}$ ■

Вещественное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем какого-либо многочлена с рациональными коэффициентами. Вещественное число не являющееся алгебраическим называется *трансцендентным*. Высотой многочлена с натуральными коэффициентами называется число $h(a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n) := a_0 + \dots + a_n$.

Т₂ Множество алгебраических чисел счетно.

⇓ Множество всех алгебраических чисел обозначим \mathbf{A} . Пусть $M_{\mathbb{Q}}$ - множество многочленов с рациональными коэффициентами, $M_{\mathbb{N}}$ — множество многочленов с натуральными коэффициентами. Так как $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, то $M_{\mathbb{Q}} \sim M_{\mathbb{N}}$. Представим множество $M_{\mathbb{N}}$ в виде объединения $M_{\mathbb{N}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, где M_n - подмножество $M_{\mathbb{N}}$, содержащее лишь многочлены степени n . Множество M_n , в свою очередь, представимо в виде объединения $M_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{nk}$, где M_{nk} - совокупность всех многочленов из M_n , высота которых равна k , значит, $M_{\mathbb{N}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{nk}$. Но множества M_{nk} конечны, следовательно, множество $M_{\mathbb{N}}$ является счетным, значит, множество $M_{\mathbb{Q}}$ счетно. Каждый многочлен из $M_{\mathbb{Q}}$ имеет конечное число корней, значит, множество \mathbf{A} представляется в виде объединения счетного множества конечных множеств. На основании свойств счетных множеств заключаем, что множество алгебраических чисел счетно ■

У п р а ж н е н и е . 1. Какова мощность множества рациональных функций с целыми коэффициентами в числителе и знаменателе.

2. Доказать, что для любого $k \in \mathbf{N}$ справедливы равенства $\text{card} \mathbf{Q}^k = \text{card} \mathbf{A}^k = \aleph_0$.

§4. Несчетность множества действительных чисел

Ⓓ *Множество действительных чисел \mathbf{R} несчетно.*

⇓ Допустим, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{N}$. Отрезок $[0;1]$ является бесконечным множеством, значит, $[0;1] \sim \mathbf{N}$. Последнее означает, что отрезок $[0;1]$ можно представить в виде последовательности $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Члены этой последовательности, в свою очередь, представляются в виде бесконечных десятичных дробей вида:

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots, \quad x_2 = 0, x_{21}x_{22}x_{23}\dots, \quad x_3 = 0, x_{31}x_{32}x_{33}\dots, \dots,$$

в частности, $0 = 0,000\dots$, $1 = 0,999\dots$. Выберем бесконечную десятичную дробь $0, y_1y_2y_3\dots$, полагая $y_k = 1$, если $x_{kk} \neq 1$, и $y_k = 2$, если $x_{kk} = 1$. Эта дробь представляет некоторое действительное число $y \in [0;1]$, которого нет среди чисел x_1, x_2, x_3, \dots . Получили противоречие, которое доказывает, что отрезок $[0;1]$ и \mathbf{R} - несчетные множества ■

Отрезок $[0;1]$ эквивалентен части декартовой степени $[0;1]^2$. Отсюда вытекает, что множество $[0;1]^2$ является несчетным (в противном случае мы приходим к заключению, что множество $[0;1]$ счетно). То же можно сказать и про множество \mathbf{R}^2 . Вместе с тем, множество \mathbf{R}^2 эквивалентно части множества \mathbf{R} . Для того чтобы доказать это, достаточно показать, что множество $[0;1]^2$ эквивалентно части множества $[0;1]$. Пары $(x, y) \in [0;1]^2$, где $x = 0, x_1x_2\dots$, $y = 0, y_1y_2\dots$, поставим в соответствие бесконечную десятичную дробь $z = 0, x_1y_1x_2y_2\dots \in [0;1]$. Убедимся, что построенное отображение $f: [0;1]^2 \rightarrow [0;1]$ является взаимно однозначным. Действительно, пусть $f(x, y) = f(s, t) = z$. Где, с одной стороны, $z = 0, x_1y_1x_2y_2\dots$, а с другой стороны, $z = 0, s_1t_1s_2t_2\dots$, значит $x_1 = s_1$, $y_1 = t_1, \dots$, т.е. $x = s$, $y = t$. Таким образом, множество $[0;1]^2$ эквивалентно части множества $[0;1]$. Эти рассуждения наводят на мысль, что множество $[0;1]^2$ эквивалентно множеству $[0;1]$, т.е. $\mathbf{R}^2 \sim \mathbf{R}$. В справедливости этого предположения позволяет убедиться теорема, рассмотренная в следующем параграфе.

У п р а ж н е н и е . 1. Доказать, что трансцендентные числа существуют.

2. Доказать, что для любого $k \in \mathbf{N}$ декартова степень \mathbf{R}^k эквивалентна части отрезка $[0;1]$.