

§3. Компакты в \mathbf{R}^n

Теорема. *Подпространство в \mathbf{R}^n является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Необходимость. Пусть M - компакт в \mathbf{R}^n . Допустим, что множество M не замкнуто. Это означает, что существует точка $x \in \mathbf{R}^n$ прикосновения множества M , которая не лежит в этом множестве x . Выберем последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из M , сходящуюся к x . Любая подпоследовательность последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x в \mathbf{R}^n , значит, расходится в M . Это противоречит тому, что подпространство M является компактом. Допустим, что множество M не ограничено. Выберем произвольную точку $a \in \mathbf{R}^n$. Совокупность $\{U_k(a) : k \in \mathbf{N}\}$ k -окрестностей точки a является открытым покрытием пространства \mathbf{R}^n . Следовательно, открытые в M множества $M \cap U_k(a)$, $k \in \mathbf{N}$, образуют открытое покрытие подпространства M . Так как множество M предполагается неограниченным, из этого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. Это противоречит тому, что подпространство M является компактом.

Достаточность. Пусть $M \subseteq \mathbf{R}^n$ - замкнутое и ограниченное множество, $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ - произвольная последовательность точек из M . Последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Обозначим x ее предел. Точка x является точкой прикосновения множества M . Из замкнутости M вытекает, что $x \in M$. Это означает, что M - компакт ■

Следствие (лемма Гейне - Бореля). *Из любого открытого покрытия замкнутого ограниченного множества в \mathbf{R}^n можно выделить конечное подпокрытие.*

У п р а ж н е н и е . Пусть X - произвольное метрическое пространство, $M \subseteq X$ - компакт. Доказать, что множество M замкнуто и ограничено в X .

§4. Непрерывные отображения компактов

Теорема. *Непрерывный образ компакта есть компакт.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть X - компакт, Y - метрическое пространство, $F : X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение. Докажем, что подпространство $F(X) \subseteq Y$ является компактом. Пусть $\{G_{\alpha} : \alpha \in A\}$ - произвольное открытое покрытие $F(X)$. Прообразы $F^{-1}(G_{\alpha})$ открыты в X . При этом $X \subseteq F^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in A} F^{-1}(G_{\alpha})$. Таким образом совокупность $\{F^{-1}(G_{\alpha}) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием X . Выделим из него конечное подпокрытие $\{F^{-1}(G_{\alpha_1}), \dots, F^{-1}(G_{\alpha_n})\}$. Так как $X \subseteq F^{-1}(G_{\alpha_1}) \cup \dots \cup F^{-1}(G_{\alpha_n})$, то

$$F(X) \subseteq F(F^{-1}(G_{\alpha_1}) \cup \dots \cup F^{-1}(G_{\alpha_n})) = G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}.$$

Значит, совокупность $\{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ является подпокрытием покрытия $\{G_{\alpha} : \alpha \in A\}$ ■

Следствие. *Непрерывная на компакте действительная функция достигает свои точные верхнюю и нижнюю грани.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть X - произвольный компакт, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ - непрерывная на X действительная функция. Полный образ $f(X)$ является компактом в \mathbf{R} . Значит, $f(X)$ ограничено и замкнуто в \mathbf{R} . Ограниченность $f(X)$ влечет существование точных граней, а замкнутость $f(X)$ влечет их принадлежность к $f(X)$ ■

Следствие (теорема об обратном операторе). Если X, Y - компакты, F - взаимно однозначное непрерывное отображение пространства X на пространство Y , то обратное отображение F^{-1} непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточно доказать, что образ всякого открытого множества при отображении $F: X \mapsto Y$ открыт. Пусть G - открытое множество в X . Тогда $X \setminus G$ замкнуто в X . Следовательно, $X \setminus G$ - компакт в X , а $F(X \setminus G)$ - компакт в Y . Последнее означает, что множество $F(X \setminus G)$ замкнуто в Y . Из очевидных соотношений $F(G) = F(X \setminus (X \setminus G)) = F(X) \setminus F(X \setminus G) = Y \setminus F(X \setminus G)$ вытекает, что $F(G)$ открыто ■

Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ - произвольные метрические пространства. Отображение $F: X \mapsto Y$ называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$, выполнено неравенство $\rho_Y(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывное отображение компакта является равномерно непрерывным.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть (X, ρ_X) - компакт, (Y, ρ_Y) - метрическое пространство. Допустим, что отображение $F: X \mapsto Y$ непрерывно, но не равномерно непрерывно. Следовательно, $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in X: \rho_X(x_1, x_2) < \delta): \rho_Y(F(x_1), F(x_2)) \geq \varepsilon$. Положим $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}$. Найдутся $x_n, x'_n \in X$, удовлетворяющие условию $\rho_X(x_n, x'_n) < 1/n$, такие, что $\rho_Y(F(x_n), F(x'_n)) \geq \varepsilon$. Выделим из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и обозначим x ее предел. Так как

$$\rho_X(x'_{n_k}, x) \leq \rho_X(x'_{n_k}, x_{n_k}) + \rho_X(x_{n_k}, x) < 1/n_k + \rho_X(x_{n_k}, x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty,$$

то $x'_{n_k} \rightarrow x, k \rightarrow \infty$. Из непрерывности отображения F вытекает, что

$$\rho_Y(F(x_{n_k}), F(x'_{n_k})) \leq \rho_Y(F(x_{n_k}), F(x)) + \rho_Y(F(x), F(x'_{n_k})) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Это противоречит неравенству $\rho_Y(F(x_{n_k}), F(x'_{n_k})) \geq \varepsilon$ ■

§5. Расстояние между множествами

Пусть X - метрическое пространство, $A, B \subseteq X$. Расстоянием от точки x до множества B называют величину $\rho(x, B) = \inf_{y \in B} \rho(x, y)$. Расстоянием от множества A до множества B называют величину $\rho(A, B) = \inf_{x \in A} \rho(x, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$.

Теорема. Если A - компакт в X , B - замкнутое множество в X и $A \cap B = \emptyset$, то $\rho(A, B) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим, что A - компакт в X , B - замкнутое множество в X и $A \cap B = \emptyset$, но $\rho(A, B) = 0$. Из определения $\rho(A, B)$ вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $x_n \in A, y_n \in B$ такие, что $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Рассмотрим последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty$. Так как A - компакт, то из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить сходящуюся в A подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Пусть x - ее предел. Из неравенств $\rho(y_{n_k}, x) \leq \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k} + \rho(x_{n_k}, x)$ вытекает, что $\rho(y_{n_k}, x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что и последовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится к x . Так как множества A и B замкнуты в X , то $x \in A$ и $x \in B$. Это противоречит условию $A \cap B = \emptyset$ ■

У п р а ж н е н и е . Привести пример двух непересекающихся замкнутых множества в \mathbf{R}^n , расстояние между которыми равно нулю.

Теорема. Если A - компакт в \mathbf{R}^n , B - замкнутое множество в \mathbf{R}^n , то найдутся $x \in A$, $y \in B$ такие, что $\rho(A, B) = \rho(x, y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\rho(A, B) = d$. Выберем две последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ такие, что $x_n \in A$, $y_n \in B$ и $d \leq \rho(x_n, y_n) < d + \frac{1}{n}$. Так как A - компакт, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ограничена. Ограничена и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$. Действительно, это вытекает из неравенств

$$\rho(y_n, 0) \leq \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, 0) < d + \frac{1}{n} + \rho(x_{n_k}, 0) < d + 1 + M.$$

Выделим сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Пусть $x_{n_k} \rightarrow x$, $y_{n_k} \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$. Так как множества A и B замкнуты, то $x \in A$ и $y \in B$. Значит, $\rho(A, B) \leq \rho(x, y)$. Вместе с тем, $\rho(x, y) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y) \rightarrow d$ при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что $\rho(A, B) \geq \rho(x, y)$. Следовательно, $\rho(A, B) = \rho(x, y)$ ■