

§7. Связные множества в метрическом пространстве

Путь в метрическом пространстве X называется всякое непрерывное отображение $\sigma: I \rightarrow X$, где I - отрезок $[0;1]$, с обычной метрикой. Точки $\sigma(0)$ и $\sigma(1)$ называются началом и концом пути, соответственно, а множество $\sigma(I)$ называется *траекторией* пути. Говорим, что путь $\sigma: I \rightarrow X$ *лежит в множестве* $M \subseteq X$, если траектория $\sigma(I)$ этого пути вложена в M . Точки $x_1, x_2 \in M$ называют *соединимыми путём*, если существует путь, лежащий в M , начало которого совпадает с x_1 , а конец - с x_2 . Множество в метрическом пространстве X называется *линейно связным*, если любые две точки этого множества соединимы путём.

Теорема. Если M - линейно связное множество в метрическом пространстве X , Y - метрическое пространство, $F: X \rightarrow Y$ - непрерывное на множестве M отображение, то $F(M)$ - линейно связное множество в пространстве Y .

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in F(M)$, $x_1 \in F^{-1}(y_1)$, $x_2 \in F^{-1}(y_2)$. Так как M - линейно связное множество, то существует путь $\sigma: I \rightarrow X$ с началом в x_1 и концом в x_2 , лежащий в M . Рассмотрим отображение $s = F \circ \sigma$. Оно непрерывно и отображает отрезок I в пространство Y . При этом $s(0) = y_1$, $s(1) = y_2$, $s(I) \subseteq F(M)$. Значит, s - путь с началом в y_1 и концом в y_2 , лежащий в $F(M)$. Следовательно, $F(M)$ - линейно связное множество в пространстве Y ■

Метрическое пространство называется *связным*, если в нем нет открыто-замкнутых подмножеств, отличных от всего пространства и пустого множества.

Лемма. Траектория любого пути в метрическом пространстве X , с индуцированной метрикой, является связным подпространством X .

Доказательство. Выберем произвольный путь $\sigma: I \rightarrow X$ и допустим, что подпространство $\sigma(I) \subseteq X$ не является связным. Это предположение означает, что $\sigma(I)$ содержит открыто-замкнутое подмножество m . Обозначим t_0 точную верхнюю грань множества $\sigma^{-1}(m) := \{t \in I : \sigma(t) \in m\}$. Отображение $\sigma: I \rightarrow X$ является непрерывным, значит, множество $\sigma^{-1}(m)$ является открыто-замкнутым. Замкнутость множества $\sigma^{-1}(m)$ влечет включение $t_0 \in \sigma^{-1}(m)$. Открытость множества $\sigma^{-1}(m)$ влечет существование вложенной в него окрестности $U_\varepsilon(t_0)$. Последнее противоречит определению точной верхней грани числового множества ■

Теорема. Линейно связное множество M в метрическом пространстве X , с индуцированной метрикой, является связным подпространством X .

Доказательство. Допустим, что множество $M \subseteq X$ является линейно связным, но не является связным подпространством X . Последнее означает, что подпространство M содержит собственное открыто-замкнутое подмножество m . Выберем произвольный путь $\sigma: I \rightarrow X$, лежащий в M и соединяющий какую-либо точку из m с какой-либо точкой из $M \setminus m$. Пересечение $\sigma(I) \cap m$ является собственным открыто-замкнутым подмножеством подпространства $\sigma(I)$. Это противоречит связности пространства $\sigma(I)$ ■

У п р а ж н е н и е . Доказать, что объединение произвольной совокупности связных подпространств метрического пространства X , имеющих хотя бы одну общую точку, является связным подпространством X .

Компонентой точки x метрического пространства X называется объединение всех связных подпространств X , содержащих точку x . Компоненты различных точек или совпадают, или не пересекаются, так, что в совокупности компоненты составляют разбиение про-

пространства X на попарно непересекающиеся связные множества, называемые *компонентами связности* пространства X .

§8. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Теорема. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого, для любых $p \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

Необходимость. Пусть $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого, для любых $p \in \mathbb{N}$, будут выполняться неравенства: $|x_n - x| < \varepsilon/2, |x_{n+p} - x| < \varepsilon/2$. Это значит, что будут выполняться неравенства

$$|x_n - x_{n+p}| \leq |x_n - x| + |x - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Достаточность. Положим $\varepsilon = 1$. Найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено $|x_N - x_{N+p}| < 1$. Пусть

$$M = \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x_N + 1|, |x_N - 1|\}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $|x_n| \leq M$. Это значит, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Следовательно, из нее можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторому числу x . Покажем, что $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$. Для этого зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon/2$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ таким, что $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2, n_k > N(\varepsilon)$. Тогда для любого $n \geq N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Это и означает, что последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится ■

На практике полезна следующая символическая запись критерия Коши сходимости числовой последовательности

$$(x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbb{N}) : |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

§9. Полные метрические пространства

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из метрического пространства X называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет условию Коши:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbb{N}) : \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится. Из критерия Коши сходимости числовой последовательности вытекает, что пространство \mathbb{R} является полным.

Теорема. Пространство \mathbb{R}^n является полным.

Доказательство. Пусть $n \neq 1$ и $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ - фундаментальная последовательность элементов \mathbb{R}^n . Последнее означает, что выполняется условие Коши:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m \geq N)(\forall p \in \mathbb{N}) : \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i^{(m+p)})^2} < \varepsilon.$$

Из очевидных соотношений $|x_i^{(m)} - x_i^{(m+p)}| = \sqrt{(x_i^{(m)} - x_i^{(m+p)})^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i^{(m+p)})^2} < \varepsilon$ вытекает, что координатные последовательности $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}, \dots, \{x_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ являются фундаментальными. По критерию Коши они сходятся. Значит, сходится последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ■

Теорема. Пространство $C[a, b]$ является полным.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = x_n(t)$, $t \in [a, b]$, - фундаментальная последовательность точек из $C[a, b]$. Это означает, что выполняется условие Коши:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbb{N}) : \sup_{[a, b]} |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon.$$

Для любого $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $|x_n(t) - x_{n+p}(t)| \leq \sup_{[a, b]} |x_n(t) - x_{n+p}(t)|$. Отсюда

вытекает, что для любого $t \in [a, b]$ числовая последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в \mathbf{R} . Следовательно, она сходится. Обозначим ее предел $x(t)$ и рассмотрим функцию $x = x(t)$, $t \in [a, b]$. Покажем, что она непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, является элементом пространства $C[a, b]$. Пусть $t_0 \in [a, b]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого, для всех $p \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство $\sup_{[a, b]} |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon/4$. Переходя в левой части этого неравенства к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем $\sup_{[a, b]} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon/4 < \varepsilon/3$. Функция $x_N = x_N(t)$ непрерывна в точке t_0 . Значит,

найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in U_{\delta}(t_0)$ выполнено неравенство $|x_N(t) - x_N(t_0)| < \varepsilon/3$.

Отсюда вытекает, что для всех $t \in U_{\delta}(t_0)$ будут выполнены неравенства

$$|x(t) - x(t_0)| \leq |x(t) - x_N(t)| + |x_N(t) - x_N(t_0)| + |x_N(t_0) - x(t_0)| < \varepsilon.$$

Таким образом, функция $x = x(t)$, $t \in [a, b]$, является элементом пространства $C[a, b]$. Осталось воспользоваться предельным переходом (по $p \rightarrow \infty$) в условии Коши и заключить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к элементу x в пространстве $C[a, b]$ ■

§10. Принцип сжимающих отображений

Пусть X - метрическое пространство. Отображение $F : X \mapsto X$ называется сжимающим отображением, если существует $\alpha \in (0; 1)$ такое, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство $\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2)$. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения $F : X \mapsto X$, если выполняется равенство $F(x) = x$.

Лемма. *Всякое сжимающее отображение является непрерывным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $F : X \mapsto X$ - сжимающее отображение, $x \in X$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - произвольная последовательность точек из X , сходящаяся к x . Последнее означает, что $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Из определения сжимающего отображения вытекает, что

$$\rho(F(x_n), F(x)) \leq \alpha \rho(x_n, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

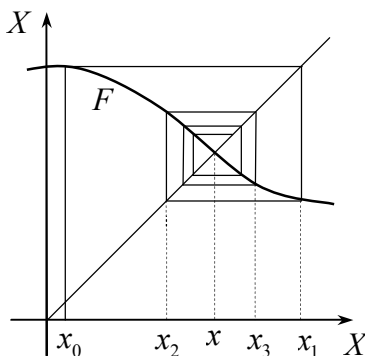
Следовательно, $F(x_n) \rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Это и означает, что отображение F непрерывно в точке x ■

Теорема (принцип сжимающих отображений). *В полном метрическом пространстве всякое сжимающее отображение имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $F : X \mapsto X$ - сжимающее отображение, $x_0 \in X$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = F(x_{n-1}) = F^2(x_{n-2}) = \dots = F^n(x_0)$. Убедимся, что эта последовательность является фундаментальной.

Прежде всего, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &= \rho(F^n(x_0), F^n(x_p)) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_p) \leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{p-1}, x_p)) \leq \\ &\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \alpha \rho(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{p-1} \rho(x_0, x_1)) = \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1}) \leq \frac{\alpha^n \rho(x_0, x_1)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$



Так как $\alpha \in (0;1)$, то $\alpha^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Следовательно, найдется номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого, для всех $p \in \mathbb{N}$, будет выполнено неравенство $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной. Поскольку пространство X предполагается полным, она сходится. Пусть $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. В силу непрерывности отображения F имеем $F(x_n) \rightarrow F(x), n \rightarrow \infty$. Но $F(x_n) = x_{n+1} \rightarrow x, n \rightarrow \infty$. Следовательно, $F(x) = x$. Таким образом, существование неподвижной точки доказано. Убедимся, что она единственная, предположив противное. Пусть $x' \neq x$ - еще одна неподвижная точка отображения F . Тогда $\rho(x, x') = \rho(F(x), F(x')) \leq \alpha \rho(x, x')$. Но это возможно только при условии, что $x = x'$ ■