

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.

§1. Определение интеграла Лебега.

Пусть E - измеримое ограниченное множество на прямой. Функция $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ - измерима и ограничена, следовательно: $(\exists A, B \in \mathbf{R})(\forall x \in E):$

$A < f(x) < B$. Выберем произвольное разбиение отрезка $[A; B]$:

$\tau = \{\lambda_i\}_{i=1}^n: A = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = B$, где δ_τ - ранг разбиения,

$\delta_\tau = \max_i (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$. Обозначим $e_i = E(\lambda_i \leq f < \lambda_{i+1})$, e_i - измеримы и

$\mu(E) = \sum_{i=0}^{n-1} \mu(e_i)$. Составим интегральную сумму Лебега: $\sigma_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \mu(e_i)$,

$\eta_i \in [\lambda_i, \lambda_{i+1})$.

Определение: Если существует $\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau$, и он не зависит от способа

разбиения отрезка $[A; B]$ и выбора точек $\eta_i \in [\lambda_i, \lambda_{i+1})$, то функцию $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ называют интегрируемой по Лебегу на множестве E , а сам предел называется интегралом Лебега функции f по множеству E , и обозначают: $\int_E f(x) d\mu$, или

$$(L) \int_a^b f(x) dx, \text{ когда } E = [a; b]$$

Определение интеграла на языке " $\varepsilon - \delta$ ":

$$\left(\int_E f(x) d\mu = I \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall \tau: \delta_\tau < \delta)(\forall \eta_i \in [\lambda_i, \lambda_{i+1})): |I - \sigma_\tau| < \varepsilon.$$

Пример: $f(x) \equiv 1$ на E (E - измеримо).

Пусть $A < 1 < B$. Для любого разбиения отрезка $[A; B]: \tau = \{x_i\}$. Будем иметь $l_0 = \emptyset, \dots, l_i = E, \dots, l_{n-1} = \emptyset$. Интегральная сумма Лебега будет иметь вид: $\sigma_\tau = \eta_i \mu(E)$. При стремлении $\delta_\tau \rightarrow 0$ будем иметь $\eta_i \rightarrow 1$. Значит $\int_E d\mu = \mu E$.

§2 Интегрируемость измеримой ограниченной функции.

Пусть $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ - измерима и ограничена на $E \subseteq [a, b]$; τ - разбиение отрезка $[a; b]$.

Определение: Сумма $S_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i+1} \mu(e_i)$ называется верхней суммой

Лебега, а сумма $s_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mu(e_i)$ называется нижней интегральной суммой Лебега.

Свойства S_τ и s_τ :

Свойство 1. Если $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то $s_{\tau_1} \leq s_{\tau_2}, S_{\tau_1} \geq S_{\tau_2}$.

Доказательство: Пусть τ_2 получено из τ_1 добавлением одной точки:
 $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$, $e_i = E(\lambda_i \leq f < \lambda_{i+1})$, $e_i' = E(\lambda_i \leq f < \lambda)$, $e_i'' = E(\lambda \leq f < \lambda_{i+1})$.
 Ясно, что, $e_i \cup e_i'' = e_i$, то есть $\mu(e_i) = \mu(e_i') + \mu(e_i'')$. Тогда
 $\lambda_i \mu(e_i) = \lambda_i \mu(e_i') + \lambda_i \mu(e_i'') \leq \lambda_i \mu(e_i') + \lambda \mu(e_i'')$, следовательно $s_{\tau_1} \leq s_{\tau_2}$.
 $\lambda_{i+1} \mu(e_i) = \lambda_{i+1} \mu(e_i') + \lambda_{i+1} \mu(e_i'') \geq \lambda \mu(e_i') + \lambda_{i+1} \mu(e_i'')$, следовательно $S_{\tau_1} \geq S_{\tau_2}$.

Свойство 2. Для любых разбиений τ_1, τ_2 выполняется неравенство: $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$.

Доказательство: Обозначим $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Ясно, что $\tau_1 \subseteq \tau, \tau_2 \subseteq \tau$. Из предыдущего свойства вытекает, что $s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_2}$.

Свойство 3. Для любого разбиения τ отрезка $[A; B]$ ранга δ_τ выполнено неравенство $S_\tau - s_\tau \leq \delta_\tau \mu(E)$.

Доказательство:

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{i+1} \mu(e_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mu(e_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \mu(e_i) \leq \delta_\tau \sum_{i=0}^{n-1} \mu(e_i) = \delta_\tau \mu(E).$$

Свойство 4. $\forall \tau, s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau$.

Доказательство: Данное свойство является очевидным следствием неравенства: $\lambda_i \leq \eta_i < \lambda_{i+1}$.

Теорема: Если f измерима и ограничена на $E \subseteq [a, b]$, то она интегрируема по Лебегу на множестве E , и при этом: $\int_E f(x) d\mu = \sup_\tau s_\tau - \inf_\tau S_\tau$.

Доказательство: Пусть $I_* = \sup_\tau s_\tau$, а $I^* = \inf_\tau S_\tau$. Из свойства 2. Следует: $I_* \leq I^*$, а из свойства 1: $s_\tau \leq I_* \leq I^* \leq S_\tau$, следовательно $I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau \leq \delta_\tau \mu(E) \rightarrow 0$, при $\delta_\tau \rightarrow 0$.

§3. Свойства интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции.

Свойство 1. Если $d \leq f(x) \leq c \quad \forall x \in E$, то следовательно $\int_E f(x) d\mu \leq \int_E c d\mu \leq c \mu(E)$.

Доказательство: Положим $A = d - \frac{1}{m}, B = c + \frac{1}{m}, m \in \mathbf{N}$. Тогда

$A < f(x) < B, \forall x \in E$. Отсюда следует $A \sum_{i=0}^{n-1} \mu(e_i) \leq \sigma_\tau \leq B \sum_{i=0}^{n-1} \mu(e_i)$,

следовательно $A \mu(E) \leq \sigma_\tau \leq B \mu(E)$, $A \mu(E) \leq \int_E f(x) d\mu \leq B \mu(E)$. Переходим к пределу при $m \rightarrow \infty$. Получаем, что:

Свойство 2. Если $f(x) \equiv c$ на E , то $\int_E f(x) d\mu = c \mu(E)$.

Доказательство: $c \leq f(x) \leq c$, следовательно $c\mu(E) \leq \int_E f(x)d\mu \leq c\mu(E)$.

Свойство 3. Если $f \geq 0$ на E , то $\int_E f(x)d\mu \geq 0$.

Доказательство: $\int_E f(x)d\mu \geq 0\mu(E) = 0$.

Свойство 4. Если $\mu(E) = 0$, то $\int_E f(x)d\mu = 0$.

Доказательство: $f(x)$ - ограничена, следовательно, то $A\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq B\mu(E)$, следовательно $\int_E f(x)d\mu = 0$.

Свойство 5. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k - измеримы, и $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$. Если

функция f - измерима и ограничена на множестве E , то $\int_E f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$.

Доказательство: Сначала рассмотрим случай: $E = E_1 \cup E_2$, при этом $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Пусть τ - разбиение отрезка $[A, B]$. $e_i = E(\lambda_i \leq f \leq \lambda_{i+1})$; $e_i' = E_1(\lambda_i \leq f \leq \lambda_{i+1})$; $e_i'' = E_2(\lambda_i \leq f \leq \lambda_{i+1})$. Тогда $e_i = e_i' \cup e_i''$. Следовательно,

$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mu(e_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mu(e_i') + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mu(e_i'')$, так как $s_{\tau} = s_{\tau}' + s_{\tau}''$. Переходим к пределу

при $\delta_{\tau} \rightarrow 0$. Получим $\int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$. Вернемся к общему случаю:

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ - сходится к $\mu(E)$, значит $\sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(E_k) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, то

есть $\mu(R_m) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Так как $E = (\bigcup_{k=1}^m E_k) \cup R_m$, где $R_m = \bigcup_{k=m+1}^{\infty} E_k$. Из первой

части теоремы вытекает $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^m \int_{E_k} f(x)d\mu + \int_{R_m} f(x)d\mu$. В силу первого

свойства $A\mu(R_m) \leq \int_{R_m} f(x)d\mu \leq B\mu(R_m)$, следовательно $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu$.

Свойство 6. Если $f \sim g$ на E , следовательно $\int_E f(x)d\mu = \int_E g(x)d\mu$.

Доказательство: $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 = E(f \neq g)$, $E_2 = E(f = g)$, следовательно $\mu(E_1) = 0$ и $\int_E f(x)d\mu = \int_{E_1} f(x)d\mu + \int_{E_2} f(x)d\mu = \int_{E_2} g(x)d\mu + \int_{E_1} g(x)d\mu = \int_E g(x)d\mu$.

Свойство 7. Если $\int_E |f(x)|d\mu = 0$, следовательно $f \sim 0$ (то есть $\mu E(f \neq 0) = 0$).

Доказательство: $E(|f| > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > \frac{1}{n})$. Допустим противное: f не эквивалентна 0. Так как $0 < \mu E(|f| > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu E_n$, следовательно $\exists n_0$, такое что

$\mu E_n(f > \frac{1}{n_0}) = \sigma > 0$. Тогда $E = E_{n_0} \bigcup (E \setminus E_{n_0})$, следовательно

$$\int_E |f| d\mu = \int_{E_{n_0}} |f| d\mu + \int_{E \setminus E_{n_0}} |f| d\mu \geq \frac{1}{n_0} \sigma > 0. \text{ Получили противоречие.}$$

Свойство 8. Если f и g - измеримы и ограничены на E , то $\int_E (f(x) + g(x)) d\mu = \int_E f(x) d\mu + \int_E g(x) d\mu$.

Доказательство: Пусть $A < f(x) < B, C < g(x) < D$, и $\forall x \in E$; $\tau_1 = \{\lambda_i\}_{i=0}^n$ - разбиение отрезка $[A; B]$, $\tau_2 = \{\gamma_j\}_{j=0}^m$ - разбиение отрезка $[C; D]$; $e_i = E(\lambda_i \leq f < \lambda_{i+1}), e_k' = E(\gamma_k \leq g < \gamma_{k+1}); \varepsilon_{ik} = e_i \cap e_k'$. Ясно что $E = \bigcup_i \bigcup_k \varepsilon_{ik}$,

по свойству 5. $\int_E (f + g) d\mu = \sum_i \sum_k \int_{\varepsilon_{ik}} (f + g) d\mu$. По свойству 1.

$$\sum_i \sum_k (\lambda_i + \gamma_k) \mu(\varepsilon_{ik}) \leq \int_E (f + g) d\mu \leq \sum_i \sum_k (\lambda_{i+1} + \gamma_{k+1}) \mu(\varepsilon_{ik}).$$

$s_{\tau_1} + s_{\tau_2} \leq \int_E (f + g) d\mu \leq S_{\tau_1} + S_{\tau_2}$. Переходя к пределу при $\delta_{\tau_1} \rightarrow 0$, а затем,

при $\delta_{\tau_2} \rightarrow 0$ получаем, что

Свойство 9. Если f - измерима и ограничена на E , $c \in \mathbf{R}$, то $\int_E cf(x) d\mu = c \int_E f(x) d\mu$.

Доказательство: $\int_E cf(x) d\mu = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{e_i} cf(x) d\mu$. По теореме о среднем для $c \geq 0$.

$c\lambda_i \mu(e_i) \leq \int_{e_i} cf(x) d\mu \leq c\lambda_{i+1} \mu(e_i)$. Суммируя последние неравенства по i ,

получаем: $cs_\tau \leq \int_E cf(x) d\mu \leq cS_\tau$. Затем переходим к пределу при $\delta_\tau \rightarrow 0$. Пусть

$$c < 0: 0 = \int_E (cf + (-c)f) d\mu = \int_E cf d\mu + \int_E (-c)f d\mu.$$

Свойство 10. Если $f \leq g$ на E , то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Доказательство: $\int_E f d\mu - \int_E g d\mu = \int_E (f - g) d\mu \geq 0$.

Свойство 11. Если f измерима и ограничена на E , то $\left| \int_E f(x) d\mu \right| \leq \int_E |f(x)| d\mu$.

Доказательство: $E_1 = E(f \geq 0), E_2 = E(f < 0)$, следовательно

$$\int_E = \int_{E_1} + \int_{E_2} = \int_{E_1} |f| d\mu - \int_{E_2} |f| d\mu. \text{ С другой стороны, } \int_E |f| d\mu = \int_{E_1} |f| d\mu + \int_{E_2} |f| d\mu.$$

Осталось воспользоваться неравенством: $|a - b| \leq |a| + |b|$.

§4. Интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

Теорема: (Лебега) Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на E функций сходится почти всюду на этом множестве к функции $f(x)$ и $\exists M \geq 0$ такое, что $|f_n(x)| \leq M (\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N})$, то $\int_E f_n(x) d\mu \rightarrow \int_E f(x) d\mu, n \rightarrow \infty$.

Доказательство: $f_n(x)$ - измеримы и ограничены (одной константой), следовательно f - измерима и ограничена, тогда f - интегрируема по Лебегу. В силу теоремы Егорова, $(\forall \delta > 0)(\exists E_\delta \subseteq E) : \mu(E \setminus E_\delta) < \delta$ и f_n сходится равномерно к f на E_δ , следовательно $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in E_\delta) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Имеем:

$$\left| \int_E f(x) d\mu - \int_E f_n(x) d\mu \right| = \left| \int_E (f(x) - f_n(x)) d\mu \right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)| d\mu \leq \varepsilon \mu(E_\delta) + \int_{E \setminus E_\delta} |f(x) - f_n(x)| d\mu \leq \varepsilon \mu(E_\delta) + M \mu(E \setminus E_\delta) \leq \varepsilon \mu(E_\delta) + M \delta$$

из произвольности ε и δ вытекает, что

Следствие: Пусть $u_n(x)$ - измеримы на E , ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ - сходится почти всюду на E и последовательность его частичных сумм ограничена на этом множестве, то $\int_E \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E u_n(x) d\mu$.

Доказательство: $S_n(x) = \sum_{n=0}^n u_n(x), |S_n(x)| \leq M \forall x, n, S_n(x) \rightarrow S(x), n \rightarrow \infty$ почти всюду на E , следовательно $\int_E S_n(x) d\mu \rightarrow \int_E S(x) d\mu$, и $\sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) d\mu \rightarrow \int_E \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) d\mu$. что

§5 Сравнение интегралов Римана и Лебега.

Теорема: Если f - измерима на $[a, b]$ и существует интеграл Римана

$$\int_a^b f(x) dx. \text{ Тогда } \int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство: $\tau = \{x_i\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Пусть $M_i = \sup_{\Delta x_i} f(x), m_i = \inf_{\Delta x_i} f(x)$. Тогда $m_i \leq f(x) \leq M_i, \forall x \in [x_i, x_{i+1})$. Значит $m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \int_{[x_i, x_{i+1})} f(x) d\mu \leq M_i(x_{i+1} - x_i)$. Просуммируем эти неравенства по i .

Получаем $s_\tau \leq \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{[x_i, x_{i+1})} f(x) d\mu \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = S_\tau$. Здесь s_τ, S_τ -

суммы Дарбу. Переходим к пределу при $\delta_\tau \rightarrow 0$. Так как $s_\tau, S_\tau \rightarrow \int_a^b f(x) dx$, т.к.

$$\int_{\{b\}} f(x) d\mu = 0, \text{ то } \int_{[a,b]} f(x) d\mu = \int_a^b f(x) dx.$$

§6. Восстановление первообразной функции.

Пусть f определена на отрезке $[a, b]$, f' - ее производная на этом отрезке. Если f' - непрерывна, то используя интеграл Римана можем записать:

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$. Это значит, что: если производная непрерывна, то ее первообразная восстанавливается с помощью интеграла Римана. Известно, что аналогичное верно для случая. Когда f' интегрируема по Риману.

Теорема: Пусть f дифференцируема на $[a, b]$ и f' ограничена на $[a, b]$, то f' интегрируема по Лебегу (то есть измерима на $[a, b]$) и

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) d\mu.$$

Доказательство: Рассмотрим функцию $F(x) = \begin{cases} f(x), x \in [a, b] \\ f(b) + (x - b)f'(b), x \in [b, b + 1] \end{cases}$.

Найдем производную $F'(x) = \begin{cases} f'(x), x \in [a, b] \\ f'(b), x \in [b, b + 1] \end{cases}$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$,

определим на $[a, b]$ функцию $\varphi_n(x) = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}$; ясно, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = F'(x) = f'(x)$. Так как φ_n непрерывны на $[a, b]$, то f' - измерима.

Покажем, что φ_n ограничены на $[a, b]$. По формуле Лагранжа

$\varphi_n(x) = F'(x + \frac{\theta}{n}) \leq M$ (так как f' - ограничены), следовательно, по теореме

Лебега $\int_a^b f'(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) d\mu$. Но

$$\int_a^b \varphi_n(x) d\mu = n \int_a^b F(x + \frac{1}{n}) d\mu - n \int_a^b F(x) d\mu = n \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x) dx - n \int_a^b F(x) dx =$$

$$= n \int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x) dx. \text{ По теореме о среднем}$$

$$\int_a^b \varphi_n(x) d\mu = F(b + \frac{\theta'}{n}) - F(a + \frac{\theta''}{n}). \text{ Переходим к пределу при } n \rightarrow \infty \text{ получаем}$$

$$\int_a^b f'(x) d\mu = F(b) - F(a) = f(b) - f(a).$$

§7. Интеграл Лебега от неограниченных функций.

Пусть E измеримое ограниченное множество в \mathbf{R} ; f - измеримая неотрицательная функция на E (возможно неограниченная).

Определение: k срезкой функции f (где $k \in \mathbb{N}$) называется функция

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E(f < k) \\ k, & x \in E(f \geq k) \end{cases}.$$

Определение: Интеграл Лебега функции f по множеству E называется предел $\int_E f(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) d\mu \leq +\infty$ (Если интеграл $< +\infty$, то функция называется интегрируемой).

Это определение корректно, так как из равенства $E(f_k < c) = \begin{cases} E(f < c), & c \leq k \\ E, & c > k \end{cases}$

следует, что f_k - измеримы и ограничены. А значит интегрируемы по Лебегу.

Пусть f - произвольная функция, измеримая на E ; $f_+ = \begin{cases} f, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$,

$f_- = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ -f, & f \leq 0 \end{cases}$. - f_+ - 0-срезка, следовательно f_+ - измерима и

неотрицательна на E , $f_- = (-f)_0$ - 0-срезка функции $-f$, следовательно f_- - измерима и неотрицательна. Значит существуют $\int_E (f_+)_k d\mu, \int_E (f_-)_k d\mu$ и можно говорить о $\int_E f_+ d\mu, \int_E f_- d\mu$. Они возможно бесконечны. Если оба эти интеграла конечны, то функция f называется интегрируемой по Лебегу по множеству и число называется интегралом Лебега функции по множеству E .

Пример: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [0,1] \setminus Q \\ 0, & x \in [0,1] \cap Q \end{cases}$, $f(x)$ - неотрицательна и неограничена

на $E = [0,1]$. Так как $\mu([0,1] \cap Q) = 0$, то $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[0,1]$, следовательно

$$f_k(x) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_k \text{ и } \int_E f_k(x) d\mu = \int_E \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_k d\mu; \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \left[0, \frac{1}{k^2}\right] \\ k, & x \in \left[\frac{1}{k^2}, 1\right] \end{cases}.$$

$$\int_E \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_k d\mu = \int_0^{\frac{1}{k^2}} k dx + \int_{\frac{1}{k^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = kx \Big|_0^{\frac{1}{k^2}} + 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{k^2}}^1 = \frac{1}{k} + 2 - \frac{2}{k} = 2 - \frac{1}{k}.$$

$$\int_E f(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{k}\right) = 2.$$

Пусть E - измеримое и неограниченное множество. Если $f(x) \geq 0$ на E , то $\int_E f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) d\mu$, где $E_n = E \cap [-n, n]$. При этом функция

считается интегрируемой, если существует $\int_{E_n} f(x) d\mu < +\infty$ и предел при $n \rightarrow \infty$.

Если f - измеримая (возможно и отрицательная) на E , то

$\int_E f(x) d\mu = \int_E f_+(x) d\mu - \int_E f_-(x) d\mu$, где $f_+ = \begin{cases} f, f \geq 0 \\ 0, f < 0 \end{cases}$, $f_- = \begin{cases} 0, f \geq 0 \\ -f, f \leq 0 \end{cases}$. Функция f суммируема на E , если существует каждый из этих интегралов, то есть если суммируемы f_+ и f_- .

§8. Свойства интеграла Лебега от неограниченных измеримых функций.

Свойство 1. Если $f(x) \geq 0$ на E и интегрируема на E , то $\int_E f(x) d\mu \geq 0$.

Доказательство: $f_k(x) \geq 0$ на E , следовательно $\int_E f_k(x) d\mu \geq 0$, и $\int_E f(x) d\mu \geq 0$.

Свойство 2. Если $\mu(E) = 0$, то для любой функции f верно

$$\int_E f(x) d\mu = 0.$$

Доказательство: f - измерима на E . $\int_E f_+^{+k}(x) d\mu = 0$ отсюда следует что.

Свойство 3. Если $f \sim g$ на E и f - суммируема на E , то g суммируема и $\int_E f(x) d\mu = \int_E g(x) d\mu$.

Доказательство: $f_+ \sim g_+$, $f_- \sim g_-$. Действительно $E(f_+ \neq g_+) \subseteq E(f \neq g)$ и т.д.

Аналогично $(f_+)_k \sim (g_+)_k$, $(f_-)_k \sim (g_-)_k$, следовательно $\int_E (f_+)_k d\mu = \int_E (g_+)_k d\mu$.

Переходим к пределу при $k \rightarrow \infty$. Получаем $\int_E f_+ d\mu = \int_E g_+ d\mu$. Аналогично

$$\text{получаем } \int_E f_- d\mu = \int_E g_- d\mu.$$

Свойство 4. Пусть f, g - измеримы на E , $0 \leq f \leq g$ на E . Если g суммируема на E , то f суммируема на E и $\int_E f(x) d\mu \leq \int_E g(x) d\mu$.

Доказательство: $f_k(x) \leq g_k(x)$, следовательно $\int_E (f_k(x) + g_k(x)) d\mu \geq 0$ и

$$+ \int_E f_k(x) d\mu \leq \int_E g_k(x) d\mu. \text{ Осталось перейти к пределу при } k \rightarrow \infty. \text{ Тогда,}$$

т.к. $f_{k+1} \geq f_k$. то $\int_E f_k(x) d\mu$ неубывает и ограничена, значит f интегрируема.

Свойство 5. Если $\int_E f(x) d\mu = 0$ и f - неограничена, то $f \sim 0$ на E .

Доказательство: $f_k(x) \leq f(x)$ следовательно $\int_E f_k(x) d\mu \leq \int_E f(x) d\mu = 0$ и $f_k \sim 0$ на

E . Но f_k в каждой точке тоже может принять только два значения $f(x)$ или k . Но $k \neq 0$, следовательно $f(x) = 0$ всякий раз, когда $f_k(x) = 0$, следовательно $f \sim 0$ на E .

Свойство 6. Если f и g суммируемы на E , то $f + g$ суммируема на E и $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

(без доказательства).

Свойство 7. Если f - суммируема на E , то cf , $c \in \mathbf{R}$, суммируема на E .

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(без доказательства).

Свойство 8. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $E_1 \dots E_k$ - измеримы и ограничены. Тогда при выполнении одного из двух условий:

1). $f(x)$ - суммируема на E .

2). $f(x)$ - суммируема на каждом E_k и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)| d\mu < +\infty$, выполняется

$$\text{равенство } \int_E f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) d\mu.$$

(без доказательства).

§9. Необходимое и достаточное условие интегрируемости по Лебегу.

Теорема: Для того, чтобы измеряемая функция $f(x)$ была интегрируема по множеству E (огр. Изм.), необходимо и достаточно, чтобы была

интегрируемой функция $|f(x)|$, при этом $\left| \int_E f(x) d\mu \right| \leq \int_E |f(x)| d\mu$.

Доказательство: Пусть $f(x)$ - суммируема. Тогда $\int_E f_+(x) d\mu, \int_E f_-(x) d\mu < +\infty$.

Учтем равенство $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$. Поскольку f_+, f_- - интегрируемы, то $|f(x)|$ - интегрируема и

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| d\mu &= \int_E f_+(x) d\mu + \int_E f_-(x) d\mu = \\ &= \int_E f_+(x) d\mu - \int_E f_-(x) d\mu + 2 \int_E f_-(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu + 2 \int_E f_-(x) d\mu \geq \int_E f(x) d\mu. \end{aligned}$$

Докажем теперь в другую сторону: Пусть $|f(x)|$ - суммируема. Так как

$f_+(x) \leq |f(x)|, f_-(x) \leq |f(x)|$ и $f_+(x), f_-(x) \geq 0$, то согласно свойству 4, f_+, f_- - интегрируемы, следовательно $f = f_+ - f_-$ интегрируема.

Следствие: (достаточное условие интегрируемости). Если f, g - измеримы на E (сум., огр.), $|f| \leq g$, g - интегрируема, то f - интегрируема на E .

Доказательство: $0 \leq |f| \leq g$, тогда по свойству 4, $|f|$ - интегрируема, следовательно f - интегрируема.

Замечание: Критерий интегрируемости и свойства интеграла Лебега сохраняют свою силу и на множествах измеримых и неограниченных (без обоснования).

§10. Пространство L_1 .

Пусть E измеримо по Лебегу: X - совокупность всех интегрируемых на E функций. Отношение: $f \sim g \Leftrightarrow \mu(E(f \neq g)) = 0$ является отношением эквивалентности. Оно разбивает X на классы эквивалентности. Множество классов эквивалентности называется пространством L_1 на E и обозначается $L_1(E)$. Так как интегрируемые функции можно складывать и умножать на числа, то $L_1(E)$ обладает структурой линейного пространства над полем \mathbf{R} .

В $L_1(E)$ можно ввести структуру нормированного пространства, определив норму с помощью соотношения: $\|f\| = \int_E |f(x)| d\mu$.

Проверим выполнимость аксиом нормы:
$$\begin{cases} 1. \|f\| \geq 0, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \\ 2. \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \\ 3. \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{cases}.$$

1. $\int_E |f(x)| d\mu \geq 0$ по свойству 1.; $\int_E |f(x)| d\mu = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$ по свойству 5.

2. $\int_E |\lambda f(x)| d\mu = |\lambda| \int_E |f(x)| d\mu = |\lambda| \|f\|$ по свойству 7.

3. $\int_E |f(x) + g(x)| d\mu \leq \int_E |f(x)| d\mu + \int_E |g(x)| d\mu$ по свойствам 4. и 6.

4. Как и всякое нормированное пространство, пространство L_1 можно рассматривать как метрическое с расстоянием:

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \int_E |f(x) - g(x)| d\mu.$$

Определение: Сходимость последовательности функций в смысле этого расстояния называется сходимостью в среднем.

Теорема: Пространство $L_1(E)$ полное метрическое пространство.

Теорема: Замыкание в $L_1(\langle a, b \rangle)$ множества всех непрерывных суммируемых на промежутке $\langle a, b \rangle$ функций совпадает с $L_1(\langle a, b \rangle)$, то есть множество всех непрерывных функций плотно в $L_1(\langle a, b \rangle)$. (без доказательства).

§11. Пространство L_2 .

Пусть E - измеримое по Лебегу множество; Y - множество функций из X с интегрируемым квадратом. Отношение эквивалентности: $f \sim g \Leftrightarrow \mu(E(f \neq g)) = 0$ разбивает Y на классы эквивалентности. Множество классов эквивалентности называется пространством L_2 на E и обозначается $L_2(E)$.

1. $f, g \in L_2(E) \Rightarrow fg \in L_1(E)$.

Доказательство:
$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\int_E f^2(x) d\mu + \int_E g^2(x) d\mu \right)$$

2. $L_2(E) \subseteq L_1(E)$, если $\mu(E) < \infty$.

Доказательство: $g(x) \equiv 1$, следовательно
$$\int_E |f(x)| d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\int_E f^2(x) d\mu + \mu(E) \right) < \infty.$$

3. $f, g \in L_2(E)$, следовательно, $f + g \in L_2(E)$, $\alpha f \in L_2(E)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Доказательство: $(f + g)^2 = f^2 + 2|fg| + g^2$, $\int_E (\alpha f)^2 d\mu = \alpha^2 \int_E f^2 d\mu < \infty$.

В $L_2(E)$ можно определить скалярное произведение

$(f, g) = \int_E f(x)g(x)d\mu$, то есть $L_2(E)$ - евклидово пространство. Проверим

выполнимость аксиом скалярного произведения.

1. $(f, g) = (g, f)$ - очевидно,
2. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ - очевидно,
3. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ - очевидно,
4. $(f, f) > 0$, если $f \neq 0$.

Доказательство: $(f, f) = \int_E f^2 d\mu$. Если бы $\int_E f^2 d\mu = 0$, то по свойству 5 $f \sim 0$. В

$L_2(E)$, как в любом евклидовом пространстве можно ввести норму

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_E f^2 d\mu}.$$

Неравенства Коши-Буняковского и треугольника имеют вид:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \Rightarrow \left(\int_E fg d\mu \right)^2 \leq \int_E f^2 d\mu \int_E g^2 d\mu \text{ (Коши-Буняковского),}$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \Rightarrow \left(\int_E (f + g)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_E f^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_E g^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (Гельзера)}$$

Метрика в $L_2(E)$ задается формулой $\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_E (f - g)^2 d\mu}$.

Определение: Сходимость в смысле этой метрики называется сходимостью в среднем квадратичном, а величина $\rho^2(f, g) = \int_E (f - g)^2 d\mu$ называется средне квадратичным отклонением элемента f от элемента g .

Теорема: Пространство $L_2(E)$ полное метрическое пространство. (без доказательства).