

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ.

§1. Определение измеримой функции.

Пусть E - измеримое по Лебегу множество на прямой; $\sigma(E)$ - совокупность всех измеримых по Лебегу множеств, лежащих в E .

Определение: Функция $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ называется измеримой (по Лебегу), если для всякого борелевского множества $A \subseteq \mathbf{R}$ множество $f^{-1}(A) \in \sigma(E)$

Здесь $f^{-1}(A) = \{x \in E : f(x) \in A\}$.

Теорема: Для того чтобы функция $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ (E - измеримо) была измерима, необходимо и достаточно, чтобы при любом $c \in \mathbf{R}$ множество $E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\}$ - было измеримым по Лебегу.

Доказательство: Необходимость. Множество $A = (-\infty; c)$ - открыто, значит, борелевское. $E(f < c) = f^{-1}(A) \Rightarrow E(f < c)$ - измеримо по Лебегу.

Достаточность: Любой интервал можно представить в виде:
 $(a, b) = (-\infty, b) \cap (\mathbf{R} \setminus (-\infty; a])$; $(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right)$.

Значит любое открытое множество может быть получено из лучей вида: $(-\infty; c)$ путем конечных или счетных объединений, пересечений и дополнений. То же можно сказать и о замкнутых множествах. Значит любое борелевское множество A может быть получено из лучей вида $(-\infty; c)$ применением этих операций.

Учитывая, что $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. Получаем, что прообраз любого борелевского множества может быть получен из измеримых по Лебегу множеств взятием этих операций и, следовательно, измерим.

Следствие 1. Если $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ ($E = [a, b]$), монотонна, то она измерима.

Доказательство: $E(f < c) = \begin{cases} (-\infty, d) \cap E \\ (-\infty, d] \cap E \end{cases}$, если f - неубывает. Если это множество неограничено, то $E(f < c) = E$. $d = \sup\{x \in E : f(x) < c\}$ ю. Если $f(d) \geq c$, то $E(f < c) = (-\infty, d) \cap E$; если же $f(d) < c$, то $E(f < c) = (-\infty, d] \cap E$.

Следствие 2. Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывна, то она измерима.

Доказательство: $E(f < c)$ - открыто, значит измеримо по Лебегу. Действительно, пусть $x_0 \in E(f < c) \Rightarrow f(x_0) < c \Rightarrow$ существует $u(x_0): f(u(x_0)) < c$.

Следствие 3. Если f измерима на E , и $E_1 \subseteq E$, E_1 - измеримо по Лебегу, то f измерима на E_1 .

Доказательство: $E_1(f < c) = E(f < c) \cap E_1$.

Определение: Функции $f: E \rightarrow \mathbf{R}$, $g: E \rightarrow \mathbf{R}$ называют эквивалентными ($f \sim g$) если множество $E(f \neq g)$ измеримо и имеет меру ноль.

Теорема. Если $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ измерима и $(f \sim g)$ на E , то g измерима.

Доказательство: $E(g < c)$, $E(f < c)$ отличаются на множество меры ноль. Значит измеримы или неизмеримы одновременно.

§2. Свойства измеримых функций.

Свойство1. Если $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ измерима, то функции $f(x) + c$, $cf(x)$, $|f(x)|$, $f^2(x)$ измеримы на E , причем, если $f \neq 0$ на E , то $\frac{1}{f(x)}$ измерима на E .

Доказательство: 1. $F(x) = f(x) + c$ измерима, так как $E(F < a) = E(f < a - c)$.

$$2. F(x) = cf(x) \text{ измерима, так как } E(F < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{c}), \text{ если } c > 0 \\ E(f > \frac{a}{c}), \text{ если } c < 0 \\ \emptyset \text{ или } E, \text{ если } c = 0 \end{cases}.$$

$$3. F(x) = |f(x)| \text{ измерима, так как } E(F < a) = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } a \leq 0 \\ E(f < a) \cap E(f > -a), \text{ если } a > 0 \end{cases}.$$

$$4. F(x) = f^2(x) \text{ измерима, т.к. } E(F < a) = \begin{cases} \emptyset, \text{ если } a \leq 0 \\ E(f < \sqrt{a}) \cap E(f > -\sqrt{a}), \text{ если } a > 0 \end{cases}.$$

$$5. F(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ измерима, так как } E(F < a) = \begin{cases} E(f < 0) \cap E(f > \frac{1}{a}), \text{ если } a < 0, \\ E(f < 0) \cup E(f > \frac{1}{a}), \text{ если } a > 0, \\ E(f < 0), \text{ если } a = 0. \end{cases}$$

Свойство2. Если f и g измеримы на E , то множество $E(f > g)$ измеримо по Лебегу.

Доказательство: Представим \mathbf{Q} в виде последовательности $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда

$$E(f > g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E(f > r_k) \cap E(r_k > g)). \text{ Пусть } x \in E(f > g) \Rightarrow, \text{ следовательно}$$

$$f(x) > g(x) \Rightarrow \exists r_k: f(x) > r_k > g(x). \text{ Обратно аналогично.}$$

Свойство3. Если f и g - измеримы на E , то $f + g$; fg ; $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0 \forall x \in E$)

измеримы на E .

Доказательство: 1. $F(x) = f(x) + g(x)$. Тогда $E(F < a) = E(f < a - g)$ - измеримо.

$$2. F(x) = f(x)g(x). \text{ Тогда } f(x)g(x) = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2] - \text{измерима.}$$

$$3. \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)} - \text{измерима.}$$

§3. Сходимость почти всюду.

Определение: Последовательность $\{f_n(x)\}$ функций сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, если $E = E_1 \cup E_2$, $\mu(E_2)=0$ и для любого $x \in E_1$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ и он равен $f(x)$.

Теорема: Если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на E , то $f(x)$ измерима.

Доказательство: Докажем сначала, что $f(x)$ измерима на E_1 .

$$E_1(f < a) = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} E_1(f_m < a - \frac{1}{k}). \text{ Пусть}$$

$$x \in E_1(f < a) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) : f(x) < a - \frac{2}{k}. \quad \text{Так как } f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$$

$$\text{следовательно } (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m > n) : f_m(x) < a + \frac{2}{k} + \frac{1}{k} = a - \frac{1}{k}.$$

$$\text{Обратно Пусть } x \in \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} E_1(f_m < a - \frac{1}{k}), \quad \text{следовательно}$$

$$(\exists k, n)(\forall m \geq n) : f_m(x) < a - \frac{1}{k}. \text{ Перейдем к пределу при } m \rightarrow \infty. \text{ Получаем:}$$

$$f(x) \leq a - \frac{1}{k}, \text{ следовательно } f(x) < a. \text{ Докажем теперь, что } f(x) \text{ измерима на}$$

E . Действительно, $E(f < a) = E_1(f < a) \cup E_2(f < a)$: $E_1(f < a)$ - измеримо по Лебегу в силу первой части доказательства, $E_2(f < a)$ измеримо, так как $E_2(f < a) \subseteq E_2$ и $\mu(E_2)=0$.

§4. Теорема Егорова.

Теорема: Пусть E - измеримое множество в \mathbf{R} и $\mu(E) < \infty$; последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на E к $f(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое $E_\delta \subseteq E$ такое, что:

1. $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;
2. $\{f_n\}$ -сходится равномерно к f на E_δ .

Доказательство: Из §3 следует, что f - измерима на E . Обозначим E_n^m - множество $E(|f_i - f| < \frac{1}{m}, \forall i \geq n)$; $E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$. Из определения E_n^m следуют включения: $E_1^m \subseteq E_2^m \subseteq \dots \subseteq E_n^m \subseteq \dots$. Из непрерывности меры Лебега вытекает, что

$$\mu(E^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n^m), \quad \text{следовательно}$$

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(m) \in \mathbb{N}) : \mu(E^m) - \mu(E_{n_0(m)}^m) = \mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

$$\text{Положим } E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m.$$

Покажем сначала, что f_n сходится равномерно к f на E_δ . Для этого нужно показать, что: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(\forall x \in E_\delta) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем

$\varepsilon > 0$. Пусть m выбрано из условия: $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Тогда достаточно положить

$N = n_0(m)$. Действительно $\forall x \in E_\delta$ будет верно $x \in F_{n_0(m)}^m$, значит $(\forall i \geq N = n_0(m)) : |f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon$.

Оценим теперь меру множества $E \setminus E_\delta$. Имеем $\mu(E \setminus E_\delta) = \mu(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m) = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{n_0(m)}^m)) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m)$. Покажем, что $\mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}$. Действительно,

$\mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) \leq \mu(E \setminus E^m) + \mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < (E \setminus E^m) + \frac{\delta}{2^m}$. Осталось показать, что $\mu(E \setminus E^m) = 0$. Действительно, если $x \in E \setminus E^m$, то для любых m, n и $x \notin E_n^m : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{m}$ и $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$. Так как $\{f_n\}$ сходится почти всюду на E к $f(x)$, то $\mu(E \setminus E^m) = 0$.

Таким образом $\mu(E \setminus E_\delta) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta$. Теорема доказана.

Замечание: Теорема Егорова показывает, что сходимость почти всюду, а, значит и просто сходимость незначительно отличается от равномерной сходимости.

Теорема: (Лузин) Для того, чтобы функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы $(\forall \delta > 0)$ существовала непрерывная на $[a, b]$ функция φ такая, что $\mu(E(f \neq \varphi)) < \delta$. (без доказательства).

Замечание: Теорема Лузина показывает, что измеримые функции незначительно отличаются от непрерывных функций.

Пример1: $f_n(x) = x^n, x \in [-1; 1]$.

$x^n \rightarrow \begin{cases} 0, |x| < 1, \\ 1, x = 1, \\ \text{расх.}, x = -1 \end{cases}$, следовательно x^n сходится почти всюду к $f \equiv 0$. При этом

на интервале $(-\delta, \delta)$ сходимость равномерна.

Пример2: Монотонная функция измерима, значит выполняется теорема Лузина.