

§5. Сходящиеся последовательности в метрическом пространстве

Последовательностью в метрическом пространстве R называют отображение, определенное на \mathbf{N} и принимающее значения в самом метрическом пространстве R . В частности, числовые последовательности могут рассматриваться как последовательности в одномерном арифметическом пространстве \mathbf{R} . Для последовательностей в метрических пространствах используются обычная терминология и стандартные обозначения.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из метрического пространства R сходится к элементу $a \in R$ (в обозначениях: $x_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbf{N}$, начиная с которого выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$. При этом элемент $a \in R$ называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Приведенное определение предела сходящейся последовательности называется определением на языке « $\varepsilon - \delta$ ». На практике удобна его символическая запись:

$$(x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N): \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Полезна и формулировка этого определения и на языке «окрестностей», символическая запись которого имеет следующий вид

$$(x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (\forall U_\varepsilon(a))(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N): x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов метрического пространства R сходится к элементу $a \in R$ тогда и только тогда, когда числовая последовательность $\{\rho(x_n, a)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю.

Теорема. Последовательность может иметь только один предел.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов метрического пространства R , $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же самому пределу.

Теорема. Если x - точка прикосновения множества $M \subseteq R$, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$, сходящаяся к x .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть x - точка прикосновения множества M . Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ найдется точка $x_n \in U_{1/n}(x) \cap M$. Из неравенств $0 \leq \rho(x_n, x) < 1/n$, $n \in \mathbf{N}$, вытекает, что числовая последовательность $\{\rho(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x ■

Сходимость последовательности элементов пространства \mathbf{R}^n означает ее покоординатную сходимость, точнее справедлива следующая

Теорема. Последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \mathbf{R}^n$, сходится к элементу $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности (называемые координатными) $\{x_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, \dots, n$, сходятся к соответствующим координатам a .

Н е о б х о д и м о с т ь . Пусть $x^{(m)} \rightarrow a$, $m \rightarrow \infty$. Тогда $\rho(x^{(m)}, a) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как $0 \leq |x_i^{(m)} - a_i| \leq \sqrt{(x_1^{(m)} - a_1)^2 + \dots + (x_n^{(m)} - a_n)^2} = \rho(x^{(m)}, a)$, то $|x_i^{(m)} - a_i| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $x_i^{(m)} \rightarrow a_i$, $m \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, n$. Обратно, пусть $x_i^{(m)} \rightarrow a_i$, $m \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда $\rho(x^{(m)}, a) = \sqrt{(x_1^{(m)} - a_1)^2 + \dots + (x_n^{(m)} - a_n)^2} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $x^{(m)} \rightarrow a$ при $m \rightarrow \infty$ ■

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства $C[a, b]$ - это знакомая нам функциональная последовательность, элементы которой есть функции $x_n = x_n(t)$, определенные на отрезке $[a, b]$. Сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C[a, b]$ означает равномерную сходимость функциональной последовательности $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[a, b]$.

§6. Предел отображения. Непрерывные отображения

Пусть $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$ - метрические пространства, $x_0 \in X$, $a \in Y$, $U(x_0)$ - некоторая окрестность точки x_0 . Рассмотрим произвольное отображение $F: X \rightarrow Y$, определенное в «проколотовой» окрестности $\dot{U}(x_0) = \{x \in U(x_0) : x \neq x_0\}$ точки x_0 .

Определение. Говорят, что отображение $F: X \rightarrow Y$ сходится к $a \in Y$ при $x \rightarrow x_0$ (в обозначениях: $F(x) \rightarrow a$, $x \rightarrow x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < \rho_X(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_Y(F(x), a) < \varepsilon$. При этом элемент $a \in Y$ называется пределом отображения F в точке x_0 и обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$.

Приведенное определение предела отображения называется определением на языке « $\varepsilon - \delta$ » (или определением по Коши). На практике используется следующая символическая запись этого определения:

$$(F(x) \rightarrow a, x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X : 0 < \rho_X(x, x_0) < \delta) : \rho_Y(F(x), a) < \varepsilon.$$

Приведем символическую запись этого определения на языке «окрестностей»:

$$(F(x) \rightarrow a, x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (\forall U_\varepsilon(a))(\exists U_\delta(x_0)) : F(\dot{U}_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(a).$$

Наряду с этим определением широко используется и определение предела отображения на языке «последовательностей» (определение по Гейне):

$$(F(x) \rightarrow a, x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow (x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty, x_n \in \dot{U}(x_0) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow a, n \rightarrow \infty).$$

Доказательство эквивалентности этих определений повторяет известное доказательство эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне для действительных функций.

Допустим, далее, что отображение $F: X \rightarrow Y$ определено в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$. Отображение F называется *непрерывным в точке x_0* , если существует предел отображения F в точке x_0 и этот предел совпадает со значением функции в точке x_0 . Определение отображения, непрерывного в точке, допускает ряд эквивалентных формулировок. Приведем самые распространенные из них, в удобных для использования и запоминания, символических формах записи:

(F - непрерывно в

$$x_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X : \rho_X(x, x_0) < \delta) : \rho_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon ;$$

$$(F \text{ - непрерывно в } x_0) \Leftrightarrow (\forall U_\varepsilon(F(x_0))) (\exists U_\delta(x_0)) : F(U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(F(x_0));$$

$$(F \text{ - непрерывно в } x_0) \Leftrightarrow (x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty, x_n \in U(x_0) \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x_0), n \rightarrow \infty).$$

Отображение $F: X \rightarrow Y$, определенное всюду на X , называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X . Отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным на множестве $M \subseteq X$* , если непрерывно сужение отображения F на множество M , трактуемое как отображение из подпространства $M \subseteq X$ в пространство Y . Отображение $F: X \rightarrow Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно на области определения. Последние определения следует пояснить конкретным примером. Действительная функция

$y = \sqrt{x}$, трактуемая как отображение из \mathbf{R} в \mathbf{R} , определена в нуле, но не является непрерывной в этой точке, так как она не определена в ее окрестности. Однако, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна, так как она непрерывна на области определения $[0; +\infty)$, как отображение из подпространства $[0; +\infty) \subset \mathbf{R}$ в пространство \mathbf{R} . При этом непрерывность этого отображения в точке 0 означает непрерывность справа функции $y = \sqrt{x}$ в этой точке.

Теорема. *Отображение $F: X \mapsto Y$, определенное всюду на X , является непрерывным тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого множества при этом отображении открыт.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Выберем произвольное открытое в Y множество G и произвольную точку $x \in F^{-1}(G) = \{x \in X : F(x) \in G\}$. Нужно показать, что x – внутренняя точка для множества $F^{-1}(G)$. Так как $y = F(x) \in G$, то найдется окрестность $U_\varepsilon(y)$ в Y , вложенная в G . Отображение F непрерывно и определено на X , значит, найдется окрестность $U_\delta(x)$ в X , удовлетворяющая условию $F(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(y) \subseteq G$. Отсюда вытекает, что $U_\delta(x) \subseteq F^{-1}(G)$. Значит, x – внутренняя точка множества $F^{-1}(G)$.

Обратно. Предположим, что прообраз каждого открытого множества при отображении $F: X \mapsto Y$, определенном всюду на X , является открытым множеством. Докажем, что отображение F непрерывно. Пусть $x \in X$, $y = F(x) \in Y$. Выберем произвольную окрестность $U_\varepsilon(y)$ точки y . По предположению множество $F^{-1}(U_\varepsilon(y))$ является открытым в X и $x \in F^{-1}(U_\varepsilon(y))$. Следовательно, найдется окрестность $U_\delta(x)$ такая, что $U_\delta(x) \subseteq F^{-1}(U_\varepsilon(y))$. Отсюда вытекает, что $F(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(y)$. Значит, отображение F непрерывно в точке x ■

У п р а ж н е н и е . 1. Доказать, что отображение $F: X \mapsto Y$, определенное всюду на X , является непрерывным тогда и только тогда, когда прообраз каждого замкнутого множества при этом отображении замкнут.

2. Доказать, что композиция непрерывных отображений непрерывна.