

Мера Лебега на прямой

§1. Длина элементарных множеств

Одноточечные множества, интервалы, отрезки, полуинтервалы и пустое множество будем называть *промежутками*. Длиной промежутка $P = \langle a, b \rangle$ называем число $m(P) = b - a \geq 0$. Длины одноточечного множества и пустого множества по определению равны нулю. Множество $A \subseteq \mathbf{R}$ называем *элементарным*, если оно представляется в виде объединения конечного множества попарно непересекающихся промежутков. Длиной элементарного множества $A = \bigcup_{k=1}^n P_k$ называем число $m(A) = \sum_{k=1}^n m(P_k) \geq 0$.

Длина элементарного множества определена корректно и не зависит от способа разбиения элементарного множества на промежутки. Действительно, пусть $A = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigcup_{i=1}^m Q_i$. Тогда

$$m(A) = \sum_{k=1}^n m(P_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m m(P_k \cap Q_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n m(P_k \cap Q_i) = \sum_{i=1}^m m(Q_i).$$

Теорема 1. *Совокупность элементарных множеств образует кольцо множеств, то есть объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств являются элементарными множествами.*

Пусть $A = \bigcup_{k=1}^n P_k, B = \bigcup_{i=1}^m Q_i$ - элементарные множества. Тогда $A \cap B = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^m (P_k \cap Q_i)$ - элементарное множество, так как пересечение двух промежутков есть промежуток. Выберем промежуток P так, чтобы $A \subseteq P$. Тогда $P \setminus A = P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigcap_{k=1}^n (P \setminus P_k)$ - элементарное множество, так как $P \setminus P_k$ - элементарные множества. Остальное следует из легко проверяемых соотношений

$$A \cup B = P \setminus ((P \setminus A) \cap (P \setminus B)), \quad A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \square$$

Теорема 2. *Длина элементарных множеств, как функция множества, определенная на совокупности всех элементарных множеств является мерой.*

Нам достаточно показать что длина *аддитивна*. Пусть A_1, \dots, A_n - элементарные, попарно непересекающиеся, множества и $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Тогда

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^{m(k)} P_{ki}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{m(k)} m(P_{ki}) = \sum_{k=1}^n m(A_k) \quad \square$$

Из аддитивности длины элементарных множеств следует ее *полуаддитивность*. Убедимся в этом.

Теорема 3. *Если $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k$ и A, A_k - элементарные множества, то*

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^n m(A_k).$$

Пусть $B_1 = A_1, B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k, C_i = B_i \cap A \subseteq A_i$. Из аддитивности длины вытекает, что $m(A_i) = m(C_i) + m(A_i \setminus C_i) \geq m(C_i)$. Так как C_i попарно не пересекаются и $A = \bigcup_{i=1}^n C_i$, то $m(A) = \sum_{i=1}^n m(C_i) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i) \quad \square$

Теорема 4. *Если A, B - элементарные множества, то*

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B).$$

Из равенств $m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(B)$, $m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$ вытекает $m(A \cap B) = m(A) - m(A \setminus B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$ ─

§2. Счетная аддитивность длины элементарных множеств

Прежде всего, убедимся, что длина элементарных множеств обладает свойством *счетной полуаддитивности*.

Теорема 1. Если $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и A, A_k - элементарные множества, то

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^n P_i$, $A_k = \bigcup_{i=1}^{n(k)} P_{ki}$. Заменяя промежуток P_i отрезком $\bar{P}_i \subseteq P_i$, имеющим длину $m(\bar{P}_i) \geq m(P_i) - \frac{\varepsilon}{2n}$, получим компакт $\bar{A} = \bigcup_{i=1}^n \bar{P}_i$. При этом $m(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n m(\bar{P}_i) \geq m(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Заменяя промежуток P_{ki} интервалом $\tilde{P}_{ki} \supseteq P_{ki}$, имеющим длину $m(\tilde{P}_{ki}) \leq m(P_{ki}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}n(k)}$, получим открытое множество $\tilde{A}_k = \bigcup_{i=1}^{n(k)} \tilde{P}_{ki}$. При этом $m(\tilde{A}_k) \leq \sum_{i=1}^{n(k)} m(\tilde{P}_{ki}) \leq m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Так как $\bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$, то по свойствам компактов найдется N такое, что $\bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^N \tilde{A}_k$. Следовательно, $m(\bar{A}) \leq \sum_{k=1}^N m(\tilde{A}_k)$. Поэтому

$$\begin{aligned} m(A) &\leq m(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^N m(\tilde{A}_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\tilde{A}_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Осталось отметить, что $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно ─

Теорема 2. Если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и A, A_k - элементарные множества, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ сходится и его сумма равна $m(A)$.

В силу аддитивности длины при любом N имеем

$$m(A) \geq m\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N m(A_k).$$

Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A)$. Из счетной полуаддитивности длины вытекает обратное неравенство ─

§3. Внешняя и внутренняя меры Лебега. Их свойства

Зафиксируем отрезок $E = [a, b]$ и определим на его булеане $\beta(E)$ функцию множества

$$\mu^*(A) = \inf \sum_k m(P_k),$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества $A \subseteq E$ конечными или счетными совокупностями промежутков. Число $\mu^*(A)$ называется *внешней мерой Лебега* множества A . Внутренней мерой Лебега множества A называется число

$$\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A) = (b - a) - \mu^*(E \setminus A).$$

Свойство 1. Если $A \subseteq E$ - элементарное множество, то $\mu^*(A) = m(A)$.

┐ Система промежутков $\{P_k\}_{k=1}^n$, составляющих A , образует покрытие этого множества, значит, $m(A) = \sum_{k=1}^n m(P_k) \geq \mu^*(A)$. Если $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$ - произвольное покрытие A промежутками, то в силу счетной полуаддитивности длины имеем $m(A) \leq \sum_{i=1}^\infty m(Q_i)$, значит, $m(A) \leq \mu^*(A)$ ┘

Свойство 2. Если $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, $A, A_k \subseteq E$, то $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k)$ (счетная полуаддитивность внешней меры).

┐ Для каждого A_k найдется покрытие $\{P_{ki}\}_{i=1}^\infty$ удовлетворяющее условию $\sum_{i=1}^\infty m(P_{ki}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Значит, $A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty P_{ki}$ и

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty m(P_{ki}) \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k) + \varepsilon \quad \text{┘}$$

Свойство 3. Если $A \subseteq E$ - элементарное множество, то $\mu_*(A) = m(A)$.

┐ $E \setminus A$ - элементарное множество, значит, $\mu^*(E \setminus A) = m(E \setminus A)$. В силу аддитивности длины $m(E) = m(A) + m(E \setminus A)$. Следовательно, $\mu_*(A) = m(A)$ ┘

Свойство 4. Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E$, то $\mu_*(A_1) \leq \mu_*(A_2)$ (изотонность внутренней меры).

┐ Так как $E \setminus A_1 \supseteq E \setminus A_2$, то в силу аддитивности внешней меры имеем $\mu^*(E \setminus A_1) \geq \mu^*(E \setminus A_2)$. Следовательно, $m(E) - \mu^*(E \setminus A_1) \leq m(E) - \mu^*(E \setminus A_2)$ ┘

Свойство 5. Если $A \subseteq E$, то $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq b - a$.

┐ Так как $E \setminus A \subseteq E$, $E \subseteq A \cup (E \setminus A)$, $A \subseteq E$, то в силу аддитивности внешней меры имеем:

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E) = b - a, \quad \mu^*(E) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A), \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(E).$$

Значит,

$$0 \leq (b - a) - \mu^*(E \setminus A) = \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq b - a \quad \text{┘}$$

§4. Измеримые по Лебегу множества

Множество $A \subseteq E$ называется *измеримым (по Лебегу)*, если имеет место равенство $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, при этом, общее значение $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ называется *мерой Лебега* множества A и обозначается символом $\mu(A)$. Мера Лебега, как функция множества, является сужением внешней меры Лебега на совокупность всех измеримых по Лебегу множеств.

Из свойств внутренней и внешней мер Лебега вытекает, что все элементарные множества измеримы по Лебегу и их мера Лебега совпадает с длиной.

Покажем далее, что тем же свойством обладают измеримые по Жордану множества.

Выберем $n \in \mathbf{N}$ и разобьем \mathbf{R} точками $\frac{k}{2^n}, k \in \mathbf{Z}$, на отрезки длины $\frac{1}{2^n}$.

Будем называть эти отрезки отрезками ранга n . Пусть A - произвольное подмножество E ; s_n - объединение всех отрезков ранга n , лежащих во внутренней части множества A (внутренняя «ступенчатая» фигура ранга n); S_n - объединение всех отрезков ранга n , пересекающихся с замыканием множества A (внешняя «ступенчатая» фигура ранга n). По определению верхней и нижней мер Жордана множества A имеем:

$m_*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(s_n) = \sup_n m(s_n)$ - нижняя мера Жордана множества A ;

$m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(S_n) = \inf_n m(S_n)$ - верхняя мера Жордана множества A .

Теорема. Для любого подмножества A промежутка E справедливо

$$m_*(A) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq m^*(A).$$

┐ Так как $s_n \subseteq A$, то $\mu_*(s_n) = m(s_n) \leq \mu_*(A)$, значит, $m_*(A) \leq \mu_*(A)$. Так как $A \subseteq S_n$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(S_n) = m(S_n)$. Значит, $\mu^*(A) \leq m^*(A)$ ┘

Из этой теоремы вытекает, что равенство $m_*(A) = m^*(A)$ влечет равенство $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. Другими словами, всякое измеримое по Жордану множество $A \subseteq E$ измеримо по Лебегу.

Пример. Пусть $A = \mathbf{Q} \cap E$. Для удобства будем считать, что $E = [a, b]$ и $a, b \in \mathbf{N}$. Тогда $S_n = E$, $s_n = \emptyset$. Значит, $m^*(A) = m(S_n) = b - a$, $m_*(A) = m(s_n) = 0$. Следовательно, если $a \neq b$, то множество A не измеримо по Жордану. С другой стороны, множество $A = \{a_k : k \in \mathbf{N}\}$ - счетное. Покроем A счетной системой интервалов

$P_k = (a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}), k \in \mathbf{N}$. Тогда $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Из произвольности ε вытекает $\mu^*(A) = 0$. Значит, $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$, т.е. множество A измеримо по Лебегу и имеет нулевую меру Лебега.

§5. Критерий измеримости множества по Лебегу

Теорема. Для того чтобы множество $A \subseteq E$ было измеримым по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало элементарное множество $B \subseteq E$ такое, что $\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon$.

┐ **Необходимость.** Если множество $A \subseteq E$ измеримо, то

$$\mu_*(E \setminus A) = m(E) - \mu^*(A) = m(E) - \mu_*(A) = \mu^*(E \setminus A).$$

Значит, множество $E \setminus A$ измеримо. Найдутся покрытия $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ множеств A и $E \setminus A$ промежутками такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) \leq \mu(A) + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) \leq \mu(E \setminus A) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) + \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) \leq \mu(A) + \varepsilon + \mu(E \setminus A) + \varepsilon = m(E) + 2\varepsilon.$$

Обозначим

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, P_{k < N} = \bigcup_{k=1}^{N-1} P_k, P_{k \geq N} = \bigcup_{k=N}^{\infty} P_k,$$

$$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, Q_{i < N} = \bigcup_{i=1}^{N-1} Q_i, Q_{i \geq N} = \bigcup_{i=N}^{\infty} Q_i,$$

где N выбрано из условий $\sum_{k=N}^{\infty} m(P_k) \leq \varepsilon, \sum_{i=N}^{\infty} m(Q_i) \leq \varepsilon$. Из очевидных включений $P \cap Q \subseteq (P_{k < N} \cap Q_{i < N}) \cup P_{k \geq N} \cup Q_{i \geq N}, E \subseteq (P_{k < N} \cup Q_{i < N}) \cup P_{k \geq N} \cup Q_{i \geq N}$ и полуаддитивности внешней меры вытекают неравенства

$$\mu^*(P \cap Q) \leq m(P_{k < N} \cap Q_{i < N}) + \mu^*(P_{k \geq N}) + \mu^*(Q_{i \geq N}),$$

$$m(E) \leq m(P_{k < N} \cup Q_{i < N}) + \mu^*(P_{k \geq N}) + \mu^*(Q_{i \geq N}).$$

Так как множества $P_{k < N}, Q_{i < N}$ элементарные, то

$$m(P_{k < N} \cap Q_{i < N}) = m(P_{k < N}) + m(Q_{i < N}) - m(P_{k < N} \cup Q_{i < N}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu^*(P \cap Q) &\leq m(P_{k < N}) + m(Q_{i < N}) - m(P_{k < N} \cup Q_{i < N}) + \mu^*(P_{k \geq N}) + \mu^*(Q_{i \geq N}) \leq \\ &\leq m(P_{k < N}) + m(Q_{i < N}) - m(E) + 2\mu^*(P_{k \geq N}) + 2\mu^*(Q_{i \geq N}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} m(P_k) + \sum_{i=1}^{N-1} m(Q_i) - m(E) + 2\mu^*(P_{k \geq N}) + 2\mu^*(Q_{i \geq N}) \leq \\ &\leq m(E) + 2\varepsilon - m(E) + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 6\varepsilon. \end{aligned}$$

Наконец, так как $A \setminus P_{k < N} \subseteq P_{k \geq N}$ и $P_{k < N} \setminus A \subseteq P \setminus A \subseteq P \cap Q$, то

$$\mu^*(A \Delta P_{k < N}) \leq \mu^*(A \setminus P_{k < N}) + \mu^*(P_{k < N} \setminus A) \leq \mu^*(P_{k \geq N}) + \mu^*(P \cap Q) \leq 7\varepsilon.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $A, B \subseteq E$, B - элементарное множество и $\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon$. Так как $E \setminus A \subseteq (E \setminus B) \cup (A \Delta B)$, $A \subseteq B \cup (A \Delta B)$, то

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E \setminus B) + \mu^*(A \Delta B), \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B).$$

Значит, $-\mu^*(E \setminus A) \geq -\mu^*(E \setminus B) - \varepsilon$, $\mu^*(B) \geq \mu^*(A) - \varepsilon$ и

$$\begin{aligned} \mu_*(A) &= m(E) - \mu^*(E \setminus A) \geq m(E) - \mu^*(E \setminus B) - \varepsilon = \\ &= \mu_*(B) - \varepsilon = \mu^*(B) - \varepsilon \geq \mu^*(A) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε имеем $\mu_*(A) \geq \mu^*(A)$. Значит, $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. \square

\square