

Функции действительной переменной

Если отождествить \mathbf{R}^2 и \mathbf{C} как множества, то комплексная функция действительной переменной $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} | t \rightarrow u(t) + iv(t)$ может рассматриваться как векторная функция $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 | t \rightarrow (u(t), v(t))$ действительной переменной. При этом координатные функции u и v называются *действительной* и *мнимой* частями функции f и обозначаются $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ соответственно. Свойства комплексных функций действительной переменной, таким образом, можно считать известными. Следует лишь дополнить их новыми свойствами, связанными с наличием в \mathbf{C} дополнительной алгебраической структуры. Не на последнем месте стоит и необходимость познакомиться с новыми обозначениями и терминологией.

1. Показательная функция действительной переменной. Формула Эйлера

Примером комплексной функции действительной переменной является *показательная функция действительной переменной*:

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} | t \rightarrow e^{it},$$

где e^{it} обозначает сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$. Как известно, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!}$ при любом $t \in \mathbf{R}$ сходится и его сумма равна $e^{|t|}$. Из очевидного неравенства

$$\left| \frac{(it)^n}{n!} \right| \leq \frac{|t|^n}{n!}$$

вытекает, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$ абсолютно сходится при любом $t \in \mathbf{R}$. Это означает, что показательная функция определена на всей числовой прямой. При этом для любого $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$e^{it} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}, \quad e^{-it} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{t^n}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cos t. \\ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin t. \end{aligned}$$

Учитывая очевидное соотношение

$$e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + i \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right),$$

получаем знаменитую *формулу Эйлера*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Из этой формулы вытекает, что показательная функция действительной переменной является периодической функцией с основным периодом 2π . При этом

$$\operatorname{Re} e^{it} = \cos t, \quad \operatorname{Im} e^{it} = \sin t,$$

$$|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1, \quad \operatorname{Arg} e^{it} = \{t + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Область значений показательной функции совпадает с единичной окружностью $\{(\cos t, \sin t) : t \in \mathbf{R}\}$.

Убедимся, что для определенной таким образом показательной функции имеет место обычная *теорема сложения*

$$e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} e^{it_2}.$$

Действительно, по формуле Эйлера $e^{it_1} = \cos t_1 + i \sin t_1$, $e^{it_2} = \cos t_2 + i \sin t_2$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{it_1} e^{it_2} &= (\cos t_1 + i \sin t_1) (\cos t_2 + i \sin t_2) = \\ &= (\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2) + i (\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2) = \\ &= \cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2) = e^{i(t_1+t_2)}. \end{aligned}$$

С показательной функцией действительной переменной связана новая форма записи комплексного числа. Пусть $z \in \mathbf{C}$ и $z \neq 0$. Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, получаем

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ где } r = |z|, \varphi \in \text{Arg } z.$$

По формуле Эйлера то же самое можно переписать в виде

$$z = r e^{i\varphi}, \text{ где } r = |z|, \varphi \in \text{Arg } z.$$

Эту форму записи принято называть *показательной формой записи* комплексного числа. Свойство единственности этой формы записи повторяет свойство единственности тригонометрической формы записи комплексного числа:

$$r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2, \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \in \mathbf{Z}.$$

2. Предел и непрерывность функции действительной переменной

Основные определения для векторных функций одной действительной переменной традиционно формулируются в терминах координатных функций. Их легко переформулировать в термины функций комплексной переменной. Комплексная функция действительной переменной f ограничена на множестве $T \subseteq D_f$ ¹, если ограничены на этом множестве её действительная и мнимая части. Говорят, что комплексное число A является *пределом комплексной функции f в точке $t_0 \in \overline{D_f}$* или *функция f сходится к комплексному числу A при $t \rightarrow t_0$* (в обозначениях $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = A$ или $f(t) \rightarrow A$ при $t \rightarrow t_0$ соответственно), если $\text{Re } f(t) \rightarrow \text{Re } A$ и $\text{Im } f(t) \rightarrow \text{Im } A$ при $t \rightarrow t_0$ ². Комплексная функция f *непрерывна в точке $t_0 \in D_f$* , если непрерывны в этой точке её действительная и мнимая части³.

Важно переформулировать эти определения в термины тригонометрической (показательной) формы записи комплексных чисел.

ТЕОРЕМА 0.1. *Комплексная функция f ограничена на множестве $T \subseteq D_f$, тогда и только тогда, когда на этом множестве ограничена функция $|f| : t \rightarrow |f(t)|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всё вытекает из очевидных неравенств $\max\{|\text{Re } f(t)|, |\text{Im } f(t)|\} \leq |f(t)| \leq |\text{Re } f(t)| + |\text{Im } f(t)|$. \square

ТЕОРЕМА 0.2. *Предел функции f в точке $t_0 \in \overline{D_f}$ равен $A \neq 0$ тогда и только тогда, когда существуют действительные функции r и φ такие, что*

$$f(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$$

для любого $t \in D_f$ и $r(t) \rightarrow |A|$, $\varphi(t) \rightarrow \arg A$ при $t \rightarrow t_0$.

¹Здесь и далее D_f — область определения функции f , $\overline{D_f}$ — её замыкание.

²Другими словами, для любой последовательности $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек $t_n \in D_f$, сходящейся к t_0 , последовательности $\{\text{Re } f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\text{Im } f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к $\text{Re } A$ и $\text{Im } A$ соответственно.

³Иначе, $\text{Re } f(t_n) \rightarrow \text{Re } f(t_0)$, $\text{Im } f(t_n) \rightarrow \text{Im } f(t_0)$ при $t_n \rightarrow t_0$, $t_n \in D_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) \rightarrow A \neq 0$ при $t \rightarrow t_0$. Положим $r(t) := |f(t)|$. Тогда

$$r(t) = \sqrt{(\operatorname{Re} f(t))^2 + (\operatorname{Im} f(t))^2} \rightarrow \sqrt{(\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2} = |A|, \quad t \rightarrow t_0.$$

Положим

$$\varphi(t) := \begin{cases} \arg\{f(t)\bar{A}\} + \arg A, & \text{если } f(t) \neq 0; \\ 0, & \text{если } f(t) = 0. \end{cases}$$

Замечаем, что

$$\operatorname{Re}\{f(t)\bar{A}\} = \operatorname{Re} f(t) \operatorname{Re} A + \operatorname{Im} f(t) \operatorname{Im} A \rightarrow (\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2 = |A|^2 > 0, \quad t \rightarrow t_0,$$

$$\operatorname{Im}\{f(t)\bar{A}\} = -\operatorname{Re} f(t) \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} f(t) \operatorname{Re} A \rightarrow -\operatorname{Re} A \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} A \operatorname{Re} A = 0, \quad t \rightarrow t_0.$$

Если $t_n \rightarrow t_0$ и $t_n \in D_f$, то, начиная с некоторого номера N , выполняется неравенство $\operatorname{Re}\{f(t_n)\bar{A}\} > 0$ и, значит, $\arg\{f(t_n)\bar{A}\} = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{f(t_n)\bar{A}\}}{\operatorname{Re}\{f(t_n)\bar{A}\}} \rightarrow 0$. Следовательно, $\varphi(t_n) \rightarrow \arg A$. Это означает, что $\varphi(t) \rightarrow \arg A$ при $t \rightarrow t_0$. При этом $\varphi(t) \in \operatorname{Arg}\{f(t)\bar{A}\} + \operatorname{Arg} A = \operatorname{Arg} f(t)$. Значит, имеет место представление $f(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$.

Обратно, пусть $r(t) \rightarrow |A| \neq 0$, $\varphi(t) \rightarrow \arg A$ при $t \rightarrow t_0$ и $f(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ для любого t из D_f . Тогда $\operatorname{Re} f(t) = r(t) \cos \varphi(t) \rightarrow |A| \cos \arg A = \operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} f(t) = r(t) \sin \varphi(t) \rightarrow |A| \sin \arg A = \operatorname{Im} A$ при $t \rightarrow t_0$, а это означает, что $f(t) \rightarrow A$ при $t \rightarrow t_0$. \square

Из доказанной теоремы вытекает

ТЕОРЕМА 0.3. *Комплексная функция f , удовлетворяющая условию $f(t_0) \neq 0$, непрерывна в точке $t_0 \in D_f$ тогда и только тогда, когда существуют непрерывные в этой точке действительные функции r и φ такие, что*

$$f(t) = r(t)e^{i\varphi(t)} \quad (1)$$

для любого $t \in D_f$.

Отметим, что функция r из представления (1) определяется однозначно: $r = |f|$. Значения функции φ в каждой точке определяется с точностью до слагаемого, кратного наименьшему периоду показательной функции:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \arg\{f(t)\overline{f(t_0)}\} + \arg f(t_0) + 2\pi k(t), & \text{если } f(t) \neq 0; \\ 2\pi k(t), & \text{если } f(t) = 0. \end{cases}$$

Здесь k — произвольная функция, определённая на области определения D_f функции f , принимающая целочисленные значения. Непрерывность функции φ в точке t_0 означает непрерывность функции k в этой точке. Это, в свою очередь, означает, что сужение функции k на некоторую окрестность точки t_0 является константой.

Функция называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке области определения. Функция f называется *непрерывной на множестве* $T \subseteq D_f$, если её сужение на множество T непрерывно. Действительная и мнимая части комплексной функции f определяются однозначно. Поэтому непрерывность функции f (на множестве T) равносильна непрерывности её действительной и мнимой части (на множестве T). Комплексная функция f *равномерно непрерывна на множестве* $T \subseteq D_f$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t_1, t_2 \in T$, удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 0.4 (Кантор). *Если комплексная функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Упражнение. 1. Докажите, что предел комплексной функции f в точке $t_0 \in \overline{D_f}$ равен A тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ точек $t_n \in D_f$, сходящейся к t_0 , последовательности $\{f(t_n)\}_{n=1}^\infty$ сходится к A . 2. Докажите, что предел комплексной функции f в точке $t_0 \in \overline{D_f}$ равен A тогда и только тогда, когда

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in D_f : 0 < |t - t_0| < \delta) : |f(t) - A| < \varepsilon.$$

3. Комплексная функция f непрерывна в точке $t_0 \in D_f$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in D_f : |t - t_0| < \delta) : |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

4. Докажите, что комплексная функция f непрерывна на открытом множестве $T \subseteq D_f$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в каждой точке этого множества. 5. Докажите теорему Кантора, опираясь на её выполнимость для действительных функций одной действительной переменной.

3. Дифференцирование функций действительной переменной

Комплексная функция f дифференцируема в точке t_0 , если дифференцируемы в этой точке её действительная и мнимая части $u := \operatorname{Re} f$ и $v := \operatorname{Im} f$. При этом производной $f'(t_0)$ функции f в точке t_0 называется предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = u'(t_0) + iv'(t_0).$$

Функцию f называют *дифференцируемой*, если она дифференцируема в каждой точке области определения. Функцию f называют *дифференцируемой на множестве $T \subseteq D_f$* , если сужение функции f на множество T дифференцируемо. Дифференцируемость функции f на открытом множестве T равносильна дифференцируемости функции f в каждой точке множества T . Непосредственно из определения вытекает, что комплексная константа является дифференцируемой функцией и имеет нулевую производную.

Следует помнить, что дифференцируемость функции f в точке t_0 означает, в частности, что эта точка принадлежит области определения D_f функции f и является для неё предельной точкой. Дифференцирование функции в изолированной точке области определения лишено смысла. Таким образом, дифференцируемость функции предполагает, что её область определения не содержит изолированных точек.

Комплексная функция f дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, когда её приращение $f(t) - f(t_0)$ представляется в виде

$$f(t) - f(t_0) = A(t - t_0) + \gamma(t)(t - t_0), \quad t \in D_f \setminus \{t_0\},$$

где $A \in \mathbf{C}$, $\gamma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$. Комплексная константа A определяется однозначно и совпадает с производной $f'(t_0) = u'(t_0) + iv'(t_0)$. Действительно, функция f дифференцируема в точке $t_0 \in D_f$ тогда и только тогда, когда имеют место представления

$$u(t) - u(t_0) = a(t - t_0) + \alpha(t)(t - t_0), \quad v(t) - v(t_0) = b(t - t_0) + \beta(t)(t - t_0), \quad t \in D_f \setminus \{t_0\},$$

где $a = u'(t_0)$, $b = v'(t_0)$, $\alpha(t), \beta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$. Остаётся заметить, что $f(t) - f(t_0) = (u(t) - u(t_0)) + i(v(t) - v(t_0))$. Таким образом,

$$f(t) - f(t_0) = df(t_0) + \gamma(t)(t - t_0), \quad t \in D_f \setminus \{t_0\},$$

где $df(t_0) = du(t_0) + idv(t_0)$ — *дифференциал функции f в точке t_0* .

Множество всех точек из D_f , в которых функция f оказывается дифференцируемой является областью определения функции $t \rightarrow f'(t)$. Эта функция называется *производной*

функцией функции f и обозначается f' . Производная функция комплексной функции повторяет основные свойства производной действительной функции. Например,

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2', \quad (f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2', \quad (f_1/f_2)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}.$$

При этом области $D_{(f_1+f_2)'}$, $D_{(f_1 f_2)'}$ определения функций $(f_1 + f_2)'$ и $(f_1 f_2)'$ включают множество $D_{f_1'} \cap D_{f_2'}$, а область $D_{(f_1/f_2)'}$ определения функции $(f_1/f_2)'$ включает множество $(D_{f_1'} \cap D_{f_2'}) \setminus \{t : f_2(t) = 0\}$. Выполнимость первого соотношения очевидна. Выполнимость второго вытекает из равенств

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)' &= [(u_1 + i v_1)(u_2 + i v_2)]' = (u_1 u_2 - v_1 v_2)' + i(u_1 v_2 + v_1 u_2)' = \\ &= u_1' u_2 + u_1 u_2' - v_1' v_2 - v_1 v_2' + i(u_1' v_2 + u_1 v_2' + v_1' u_2 + v_1 u_2') = \\ &= [u_1' u_2 - v_1' v_2 + i(u_1' v_2 + u_1 v_2')] + [u_1 u_2' - v_1 v_2' + i(u_1 v_2' + v_1 u_2')] = f_1' f_2 + f_1 f_2'. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, в частности, что комплексную константу можно выносить за знак производной: $(cf)' = cf'$. Выполнимость последнего соотношения предлагается доказать читателю в качестве упражнения.

Важно сформулировать условие дифференцируемости комплексной функции действительной переменной в терминах тригонометрической формы записи комплексного числа.

ТЕОРЕМА 0.5. Если $f(t_0) \neq 0$, то дифференцируемость комплексной функции f в точке t_0 означает, что существуют дифференцируемые в этой точке действительные функции r и φ такие, что

$$f(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$$

для любого $t \in D_f$. При этом

$$f'(t_0) = (r'(t_0) + i r(t_0) \varphi'(t_0)) e^{i\varphi(t_0)} = f(t_0) \left(\frac{r'(t_0)}{r(t_0)} + i \varphi'(t_0) \right),$$

следовательно, производная функции φ в точке t_0 определяется однозначно

$$\varphi'(t_0) = \frac{1}{i} \left(\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} - \frac{r'(t_0)}{r(t_0)} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируемость функции f в точке t_0 влечёт её непрерывность в этой точке. По теореме 0.3 существуют непрерывные в точке t_0 действительные функции r и φ такие, что $f(t) = r(t)e^{i\varphi(t)} = r(t)(\cos \varphi(t) + i \sin \varphi(t))$. При этом функция $r : t \rightarrow \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$, очевидно, дифференцируема в точке t_0 . Одно из чисел $\frac{u(t_0)}{r(t_0)}$ и $\frac{v(t_0)}{r(t_0)}$ обязательно принадлежит интервалу $(-1, 1)$. Значит, из представлений

$$\varphi(t) = \arccos \frac{u(t)}{r(t)}, \quad \varphi(t) = \arcsin \frac{v(t)}{r(t)}$$

вытекает, что функция φ тоже дифференцируема в точке t_0 . Следовательно,

$$u'(t_0) = r'(t_0) \cos \varphi(t_0) - r(t_0) \varphi'(t_0) \sin \varphi(t_0),$$

$$v'(t_0) = r'(t_0) \sin \varphi(t_0) + r(t_0) \varphi'(t_0) \cos \varphi(t_0).$$

Значит, $f'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0) = (r'(t_0) + i r(t_0) \varphi'(t_0)) e^{i\varphi(t_0)}$.

Обратно. Если функции r и φ дифференцируемы в точке t_0 , то функции u и v , очевидно, дифференцируемы в точке t_0 , а это означает дифференцируемость функции f . \square

Показательная функция дифференцируема в любой точке. Найдём её производную функцию

$$(e^{it})' = (\cos t)' + i(\sin t)' = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = ie^{it}.$$

Замечаем, что $e^{ib} - e^{ia} = 0$, если $a = 0$ и $b = 2\pi$. При этом производная $(e^{it})'$ отлична от нуля на отрезке $[0, 2\pi]$. Этот пример показывает, что привычная для действительных функций теорема о среднем

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a, b)$$

не выполняется для комплексных функций. Вместе с тем оказывается справедливой следующая теорема.

ТЕОРЕМА 0.6. Пусть комплексная функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда существует $c \in (a, b)$ такое, что

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(c)|(b - a). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M := \sup_{(a,b)} |f'|$. Выберем $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, b)$. Обозначим τ точную верхнюю грань множества точек t из отрезка $[t_0, b]$, для которых выполняется неравенство

$$|f(t) - f(t_0)| \leq M(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0). \quad (3)$$

Очевидно, что $t_0 < \tau \leq b$. Предположим, что $\tau < b$. Тогда найдётся окрестность $U(\tau)$ точки τ такая, что для всех t из этой окрестности выполняется неравенство $|f(t) - f(\tau)| \leq M|t - \tau| + \varepsilon|t - \tau|$. Если $t_1 \in U(\tau)$ и $\tau < t_1$, то $|f(t_1) - f(t_0)| \leq |f(t_1) - f(\tau)| + |f(\tau) - f(t_0)| \leq M(t_1 - \tau) + \varepsilon(t_1 - \tau) + M(\tau - t_0) + \varepsilon(\tau - t_0) \leq M(t_1 - t_0) + \varepsilon(t_1 - t_0)$. Это противоречит определению точной верхней грани τ . Таким образом, остаётся допустить, что $\tau = b$. Значит, $|f(b) - f(t_0)| \leq M(b - t_0) + \varepsilon(b - t_0)$. Аналогично доказывается, что $|f(t_0) - f(a)| \leq M(t_0 - a) + \varepsilon(t_0 - a)$. Следовательно, $|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(t_0)| + |f(t_0) - f(a)| \leq M(b - a) + \varepsilon(b - a)$. Из произвольности выбора $\varepsilon > 0$ вытекает, что

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Далее, если производная функция f' является константой, то $M = |f'(c)|$ для любого $c \in (a, b)$. Если производная функция f' отлична от константы, то существуют $a_1, b_1 \in (a, b)$ такие, что $a_1 < b_1$ и $|f(b_1) - f(a_1)| < M(b_1 - a_1)$. Значит, $|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(b_1)| + |f(b_1) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(a)| < M(b - b_1) + M(b_1 - a_1) + M(a_1 - a) < M(b - a)$. Что и требовалось доказать. \square

Естественным образом определяются производные высших порядков:

$$f'' := (f')', \dots, f^{(n)} := (f^{(n-1)})', \dots$$

В частности, используя свойство $(cf)' = cf'$, получаем

$$(e^{it})'' = i^2 e^{it}, \dots, (e^{it})^{(n)} = i^n e^{it}, \dots$$

Другими словами, показательная функция действительной переменной оказывается бесконечно дифференцируемой функцией.

Если комплексные функции f, g дифференцируемы до порядка n , то для них справедлива формула Лейбница

$$(f_1 f_2)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_1^{(n-i)} f_2^{(i)}, \quad \binom{n}{i} = \frac{n(n-1) \times \dots \times (n-i+1)}{i!}.$$

Действительно, для значения $n = 1$ доказываемое равенство справедливо поскольку принимает в этом случае следующий вид $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$. Предположим, что формула верна для значения $n - 1$ и докажем ее выполнимость для значения n . Имеем

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)^{(n)} &= ((f_1 f_2)^{(n-1)})' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_1^{(n-i-1)} f_2^{(i)} \right)' = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_1^{(n-i)} f_2^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_1^{(n-i-1)} f_2^{(i+1)} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} f_1^{(n-i)} f_2^{(i)} + \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} f_1^{(n-i)} f_2^{(i)} = \\ &= f_1^{(n)} f_2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] f_1^{(n-i)} f_2^{(i)} + f_1 f_2^{(n)}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$, получаем требуемое равенство.

4. Интеграл Римана

Отображение из \mathbf{R} в \mathbf{R}^2 интегрируемо (по Риману) по отрезку $[a, b]$, если на этом отрезке интегрируемы (по Риману) его координатные функции. Таким образом, комплексная функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке интегрируемы функции $u := \operatorname{Re} f$ и $v := \operatorname{Im} f$. При этом *интегралом Римана* функции f по отрезку $[a, b]$ называется сумма

$$\int_a^b f dt := \int_a^b u dt + i \int_a^b v dt.$$

Интеграл $\int_a^b f dt$ совпадает с пределом⁴ интегральных сумм

$$\sigma_\tau(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}],$$

составленных по разбиениям $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$, при стремлении их мелкости $\delta_\tau := \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i)$ к нулю. Действительно, $\sigma_\tau(f) = \sigma_\tau(u) + i\sigma_\tau(v)$, где

$$\sigma_\tau(u) := \sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \sigma_\tau(v) := \sum_{i=0}^{n-1} v(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}],$$

— интегральные суммы функций u и v соответственно. При этом

$$\max\{|\sigma_\tau(u) - \operatorname{Re} I|, |\sigma_\tau(v) - \operatorname{Im} I|\} \leq |\sigma_\tau(f) - I| \leq |\sigma_\tau(u) - \operatorname{Re} I| + |\sigma_\tau(v) - \operatorname{Im} I|.$$

Свойства интегралов комплексных функций повторяют свойства их действительных аналогов.

ТЕОРЕМА 0.7. Если функции f , f_1 , f_2 интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $c \in \mathbf{C}$, то функции cf , $f_1 + f_2$ интегрируемы на этом отрезке и при этом

$$\int_a^b c f dt = c \int_a^b f dt, \quad \int_a^b (f_1 + f_2) dt = \int_a^b f_1 dt + \int_a^b f_2 dt.$$

⁴Как обычно, $\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f) = I$ или $\sigma_\tau(f) \rightarrow I$ при $\delta_\tau \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше δ выполняется неравенство $|\sigma_\tau(f) - I| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 0.8. Если $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ и функция f интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f dt = \int_a^c f dt + \int_c^b f dt.$$

Если функция F непрерывна на промежутке $\langle a, b \rangle$, дифференцируема на интервале (a, b) и $F' = f$ на интервале (a, b) , то её называют *первообразной функцией* для функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$.

ТЕОРЕМА 0.9. Если функция F является первообразной для функции f на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f dt = F(b) - F(a), \quad \left| \int_a^b f dt \right| \leq |f(c)|(b-a),$$

при некотором $c \in (a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение вытекает из формулы Ньютона-Лейбница, которую достаточно применить отдельно к действительной и мнимой частям функции f . Второе соотношение вытекает из первого и теоремы 0.6. \square

Если комплексная функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то *интеграл с переменным верхним пределом*

$$t \rightarrow \int_a^t f(\xi) d\xi$$

является её первообразной на этом отрезке. Следовательно, последняя теорема останется справедливой, если её посылку заменить условием: *комплексная функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, F — её первообразная функция на этом отрезке.*

ТЕОРЕМА 0.10. Если комплексная функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то действительная функция $|f|$ интегрируема на нём и при этом

$$\left| \int_a^b f dt \right| \leq \int_a^b |f| dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $f := u + iv$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функции u и v интегрируемы на этом отрезке. Значит, $S_\tau(u) - s_\tau(u)$, $S_\tau(v) - s_\tau(v) \rightarrow 0$ при $\delta_\tau \rightarrow 0$. Здесь S_τ, s_τ — суммы Дарбу указанных функций, δ_τ — мелкость разбиения τ отрезка $[a, b]$. Из очевидных неравенств

$$||f(t_1)| - |f(t_2)|| \leq |f(t_1) - f(t_2)| \leq |u(t_1) - u(t_2)| + |v(t_1) - v(t_2)|$$

вытекает, что $S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) \leq S_\tau(u) - s_\tau(u) + S_\tau(v) - s_\tau(v) \rightarrow 0$ при $\delta_\tau \rightarrow 0$. Следовательно, функция $|f|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Остальное вытекает из неравенства $|\sigma_\tau(f)| \leq \sigma_\tau(|f|)$. Здесь $\sigma_\tau(f), \sigma_\tau(|f|)$ — интегральные суммы указанных функций. \square

Упражнение. Докажите, что интеграл с переменным верхним пределом $t \rightarrow \int_a^t f(\xi) d\xi$ для непрерывной на отрезке $[a, b]$ комплексной функции f является её первообразной функцией на этом отрезке.

5. Функции ограниченной вариации

Комплексная функция f имеет *ограниченную вариацию* на отрезке $[a, b]$, если для любого разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$ сумма

$$v_\tau(f) := \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$$

ограничена одним и тем же числом. Точная верхняя грань $\sup_{\tau} v_{\tau}(f)$ этой суммы по всем разбиениям отрезка $[a, b]$ называется *вариацией* функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $V_a^b(f)$.

Из очевидных неравенств

$$\max\{v_{\tau}(\operatorname{Re} f), v_{\tau}(\operatorname{Im} f)\} \leq v_{\tau}(f) \leq v_{\tau}(\operatorname{Re} f) + v_{\tau}(\operatorname{Im} f)$$

следует, что комплексная функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ в том и только в том случае, когда каждая из действительных функций $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ имеет ограниченную вариацию на этом отрезке. При этом

$$\max\{V_a^b(\operatorname{Re} f), V_a^b(\operatorname{Im} f)\} \leq V_a^b(f) \leq V_a^b(\operatorname{Re} f) + V_a^b(\operatorname{Im} f).$$

Последние неравенства дают возможность перенести некоторые свойства вещественных функций ограниченной вариации на случай комплексных функций:

1) если комплексная функция f имеет ограниченную производную на интервале (a, b) , то она имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$;

2) комплексная функция f , имеющая ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке и её колебание на отрезке $[a, b]$ не превосходит её вариации на этом отрезке:

$$\omega_a^b(f) := \sup_{t_1, t_2 \in [a, b]} |f(t_1) - f(t_2)| \leq V_a^b(f).$$

3) если комплексная функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то её сужение на любой частичный отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ имеет на нём ограниченную вариацию;

4) если комплексная функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке не более чем счётное множество точек разрыва.

Для других свойств проведём доказательства.

ТЕОРЕМА 0.11. *Если комплексная функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ и $c \in (a, b)$, то*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное разбиение τ отрезка $[a, b]$. Пусть $\tau' := \tau \cup \{c\}$, $\tau'_1 := \tau' \cap [a, c]$, $\tau'_2 := \tau' \cap [c, b]$. Тогда

$$v_{\tau}(f) \leq v_{\tau'}(f) = v_{\tau'_1}(f) + v_{\tau'_2}(f).$$

Значит, $V_a^b(f) \leq \sup_{\tau} v_{\tau'}(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$. С другой стороны, пусть τ_1, τ_2 — произвольные разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно и $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда

$$v_{\tau_1}(f) + v_{\tau_2}(f) = v_{\tau}(f).$$

Следовательно, $V_a^c(f) + V_c^b(f) = \sup_{\tau=\tau_1 \cup \tau_2} v_{\tau}(f) \leq V_a^b(f)$. □

ТЕОРЕМА 0.12. *Если комплексная функция f непрерывна и имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то действительная функция $t \rightarrow V_a^t(f)$ непрерывна на этом отрезке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in [a, b]$ и $\Delta t > 0$. Тогда

$$|V_a^{t+\Delta t}(f) - V_a^t(f)| = V_t^{t+\Delta t}(f) \leq V_t^{t+\Delta t}(\operatorname{Re} f) + V_t^{t+\Delta t}(\operatorname{Im} f) \rightarrow 0$$

при $\Delta t \rightarrow 0 + 0$. Если $t \in (a, b]$ и $\Delta t < 0$, то

$$|V_a^{t+\Delta t}(f) - V_a^t(f)| = V_{t+\Delta t}^t(f) \leq V_{t+\Delta t}^t(\operatorname{Re} f) + V_{t+\Delta t}^t(\operatorname{Im} f) \rightarrow 0$$

при $\Delta t \rightarrow 0 - 0$. □

ТЕОРЕМА 0.13. Если комплексные функции f_1 и f_2 имеют ограниченные вариации на отрезке $[a, b]$, то функции $f_1 + f_2$ и $f_1 f_2$ имеют ограниченные вариации на этом отрезке и

$$V_a^b(f_1 + f_2) \leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2), \quad V_a^b(f_1 f_2) \leq M_1 V_a^b(f_2) + M_2 V_a^b(f_1),$$

где $M_1 := \sup_{[a,b]} |f_1|$, $M_2 := \sup_{[a,b]} |f_2|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$ имеем

$$v_\tau(f_1 + f_2) \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f_1(t_{j+1}) - f_1(t_j)| + \sum_{j=0}^{n-1} |f_2(t_{j+1}) - f_2(t_j)| = v_\tau(f_1) + v_\tau(f_2),$$

$$v_\tau(f_1 f_2) \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f_1(t_{j+1})| |f_2(t_{j+1}) - f_2(t_j)| + \sum_{j=0}^{n-1} |f_2(t_j)| |f_1(t_{j+1}) - f_1(t_j)| = M_1 v_\tau(f_2) + M_2 v_\tau(f_1).$$

□

6. Интеграл Римана-Стилтьеса

Пусть на промежутке $[a, b]$ определены комплексные функции f и λ . Выберем произвольное разбиение $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ и составим интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f, \lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)), \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$$

Если существует предел $\lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f, \lambda)$ ⁵ и он не зависит от выбора точек ξ_j , то функцию f называют *интегрируемой по функции λ* , а упомянутый предел называют *интегралом Римана-Стилтьеса* функции f по функции λ и обозначают $\int_a^b f(t) d\lambda(t)$.

Условия существования интеграла Римана-Стилтьеса можно извлечь из условий существования его действительного аналога. Эту возможность даёт очевидное представление

$$\int_a^b f(t) d\lambda(t) = \int_a^b u(t) d\alpha(t) - \int_a^b v(t) d\beta(t) + i \int_a^b v(t) d\alpha(t) + i \int_a^b u(t) d\beta(t),$$

где $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, $\alpha := \operatorname{Re} \lambda$, $\beta := \operatorname{Im} \lambda$. Из этого представления вытекает, например, что интеграл Римана-Стилтьеса существует, если функция f является непрерывной, а функция λ имеет ограниченную вариацию. Если предположить дополнительно, что функция λ , а значит, и функции α и β , непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то вычисление интеграла Римана-Стилтьеса сводится к вычислению интеграла Римана. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) d\lambda(t) &= \int_a^b u(t) d\alpha(t) - \int_a^b v(t) d\beta(t) + i \int_a^b v(t) d\alpha(t) + i \int_a^b u(t) d\beta(t) = \\ &= \int_a^b u(t) \alpha'(t) dt - \int_a^b v(t) \beta'(t) dt + i \int_a^b v(t) \alpha'(t) dt + i \int_a^b u(t) \beta'(t) dt = \int_a^b f(t) \lambda'(t) dt. \end{aligned}$$

По той же схеме можно перенести на комплексный случай и другие свойства интеграла Римана-Стилтьеса:

$$\int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) d\lambda(t) = \int_a^b f_1(t) d\lambda(t) + \int_a^b f_2(t) d\lambda(t),$$

⁵ $\sigma_\tau(f, \lambda) \rightarrow I$ при $\delta_\tau \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше δ выполняется неравенство $|\sigma_\tau(f, \lambda) - I| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)d(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)) &= \int_a^b f(t)d\lambda_1(t) + \int_a^b f(t)d\lambda_2(t), \\
\int_a^b kf(t)d\lambda(t) &= kl \int_a^b f(t)d\lambda(t), \quad k, l \in \mathbf{C}, \\
\int_a^c f(t)d\lambda(t) + \int_c^b f(t)d\lambda(t) &= \int_a^b f(t)d\lambda(t), \quad c \in [a, b], \\
\int_a^b f(t)d\lambda(t) &= f\lambda|_a^b - \int_a^b \lambda(t)df(t)
\end{aligned}$$

(во всех случаях существование интегралов в правой части влечёт существование интегралов в левой части, а для последней формулы верно и обратное). Вместе с тем, каждое из этих свойств проще и полезней доказать независимо. В качестве примера докажем три свойства интеграла Римана-Стилтьеса.

Во-первых, если функция f непрерывна, а функция λ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(t)d\lambda(t) \right| \leq \int_a^b |f(t)|dV_a^t(\lambda) \leq M V_a^b(\lambda),$$

где $V_a^t(\lambda)$, $V_a^b(\lambda)$ — вариации функции λ на отрезках $[a, t]$ и $[a, b]$ соответственно, $M := \sup_{[a, b]} |f|$. Действительно, с одной стороны, для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$|\sigma_\tau(f, \lambda)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\xi_j)| |\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\xi_j)| V_{t_j}^{t_{j+1}}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} |f(\xi_j)| (V_a^{t_{j+1}}(\lambda) - V_a^{t_j}(\lambda)).$$

С другой стороны,

$$\sigma_\tau(|f|, V_a^t(\lambda)) := \sum_{j=0}^{n-1} |f(\xi_j)| (V_a^{t_{j+1}}(\lambda) - V_a^{t_j}(\lambda)) \leq M \sum_{j=0}^{n-1} V_{t_j}^{t_{j+1}}(\lambda) = M V_a^b(\lambda).$$

Во-вторых, покажем, что интегрируемость функции f по функции λ влечёт интегрируемость функции $f^* := f \circ \varphi$ по функции $\lambda^* := \lambda \circ \varphi$, где φ — непрерывная не убывающая функция, отображающая отрезок $[c, d]$ на отрезок $[a, b]$, и

$$\int_a^b f(t)d\lambda(t) = \int_c^d f^*(t)d\lambda^*(t).$$

Действительно, выберем произвольное разбиение $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $c = t_0 < \dots < t_n = d$ отрезка $[c, d]$. Этому разбиению отвечает интегральная сумма

$$\sigma_\tau(f^*, \lambda^*) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\varphi(\xi_j)) (\lambda(\varphi(t_{j+1})) - \lambda(\varphi(t_j))), \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}],$$

которая совпадает с интегральной суммой

$$\sigma_{\tau'}(f, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi'_j) (\lambda(t'_{j+1}) - \lambda(t'_j)), \quad \xi'_j \in [t'_j, t'_{j+1}],$$

отвечающей разбиению $\tau' = \{t'_j\}_{j=0}^n$, $a = t'_0 \leq \dots \leq t'_n = b$ отрезка $[a, b]$. Здесь $\xi'_j = \varphi(\xi_j)$, $t'_j := \varphi(t_j)$, $j = 0, \dots, n$. Остаётся заметить, что функция φ является равномерно непрерывной

⁶Совпадающие точки в перечислении t'_0, \dots, t'_n точек разбиения τ' можно удалить и, тем самым, добиться полного соответствия определению разбиения отрезка.

на отрезке $[c, d]$, поэтому мелкость разбиения τ' стремится к нулю при стремлении к нулю мелкости разбиения τ .

В-третьих, докажем, что интегрируемость функции f по функции λ влечёт интегрируемость функции $f^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} | t \rightarrow f(a + b - t)$ по функции $\lambda^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} | t \rightarrow \lambda(a + b - t)$ и

$$\int_a^b f(t) d\lambda(t) = - \int_a^b f^-(t) d\lambda^-(t).$$

Для этого выберем произвольное разбиение $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. Этому разбиению отвечает интегральная сумма

$$\sigma_\tau(f, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)), \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}],$$

которая отличается лишь знаком от интегральной суммы

$$\sigma_{\tau'}(f^-, \lambda^-) = \sum_{j=0}^{n-1} f(a + b - \xi'_j)(\lambda(a + b - t'_{j+1}) - \lambda(a + b - t'_j)), \quad \xi'_j \in [t'_j, t'_{j+1}],$$

отвечающей разбиению $\tau' = \{t'_j\}_{j=0}^n$, $a = t'_0 < \dots < t'_n = b$ отрезка $[a, b]$. Здесь $\xi'_j = a + b - \xi_{n-j-1}$, $j = 0, \dots, n-1$ и $t'_j := a + b - t_{n-j}$, $j = 0, \dots, n$. Действительно,

$$\sigma_{\tau'}(f^-, \lambda^-) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_{n-j-1})(\lambda(t_{n-j-1}) - \lambda(t_{n-j})) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(\lambda(t_j) - \lambda(t_{j+1})) = -\sigma_\tau(f, \lambda).$$

При этом мелкость разбиения τ совпадает с мелкостью разбиения τ' .

7. Комплексные меры. Измеримые функции

Непустое семейство \mathfrak{R} множеств называется *кольцом множеств*, если оно замкнуто относительно операций объединения, пересечения и теоретико-множественной разности. Множество $E \in \mathfrak{R}$ называется *единицей* кольца множеств \mathfrak{R} , если для любого $A \in \mathfrak{R}$ выполняется равенство $A \cap E = A$. Если кольцо множеств содержит единицу, то его называют *алгеброй множеств*. Кольцо множеств называется *σ -кольцом*, если оно замкнуто относительно образования счётных объединений. Алгебра множеств, являющаяся σ -кольцом, называется *σ -алгеброй*. Кольцо (σ -кольцо, алгебра, σ -алгебра) *порождается семейством множеств* Σ , если оно совпадает с пересечением всех колец (σ -колец, алгебр, σ -алгебр), включающих Σ . Элементы σ -алгебры \mathfrak{B} , порождаемой совокупностью всех интервалов на прямой, называются *борелевскими множествами*. По теореме о строении открытых множеств на прямой все открытые и замкнутые множества на прямой являются борелевскими.

Мерой на кольце множеств \mathfrak{R} называется действительная неотрицательная функция μ , определённая на \mathfrak{R} и обладающая свойством *аддитивности*:

$$A, B \in \mathfrak{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Если предположить, что функция μ принимает произвольные действительные значения, то её называют *знакопеременной мерой* или *зарядом*. Если функция μ принимает комплексные значения, то её называют *комплексной мерой*. Мера (заряд, комплексная мера) μ называется *σ -аддитивной*, если она обладает следующим свойством:

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}, \quad A_j \in \mathfrak{R}, \quad A_k \cap A_s = \emptyset, \quad k \neq s \implies \mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Множество $A \in \mathfrak{A}$ называется *положительным* (*отрицательным*) относительно знакопеременной меры μ , определённой на σ -алгебре \mathfrak{A} , если для любого $B \in \mathfrak{A}$ выполняется неравенство $\mu(B \cap A) \geq 0$ (≤ 0). По свойствам знакопеременных мер, для каждой из них единица E σ -алгебры \mathfrak{A} может быть представлена в виде (*разложение Хана*)

$$E = E_+ \cap E_-,$$

где множества E_+ , E_- принадлежат \mathfrak{A} , не пересекаются и являются положительным и отрицательным соответственно. Известно, что функции множества μ_+ и μ_- , определённые на σ -алгебре \mathfrak{A} с помощью соотношений

$$\mu_+(A) := \mu(A \cap E_+), \quad \mu_-(A) := \mu(A \cap E_-),$$

и называемые *верхней* и *нижней* вариациями знакопеременной (σ -аддитивной) меры μ соответственно, являются (σ -аддитивными) мерами. Представление заряда в виде разности верхней и нижней вариаций

$$\mu = \mu_+ - \mu_-$$

называется *разложением Жордана* этого заряда. Всякая комплексная (σ -аддитивная) мера, определённая на σ -алгебре \mathfrak{A} , допускает представление

$$\mu = \mu'_+ - \mu'_- + i\mu''_+ - i\mu''_-,$$

где $\mu' := \operatorname{Re} \mu$, $\mu'' := \operatorname{Im} \mu$ — знакопеременные (σ -аддитивные) меры на σ -алгебре \mathfrak{A} , $\mu' = \mu'_+ - \mu'_-$, $\mu'' = \mu''_+ - \mu''_-$ — их разложения Жордана.⁷

Действительная функция f , определённая на фиксированном множестве из σ -алгебры \mathfrak{A} , называется *\mathfrak{A} -измеримой*, если прообраз $f^{-1}(B)$ любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}$ принадлежит \mathfrak{A} . Комплексная функция f , определённая на фиксированном множестве из σ -алгебры \mathfrak{A} , называется *\mathfrak{A} -измеримой*, если действительные функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются \mathfrak{A} -измеримыми. Из известных свойств измеримых действительных функций вытекают свойства измеримых комплексных функций:

- 1) если комплексная функция f \mathfrak{A} -измерима, то функция $|f|$ \mathfrak{A} -измерима;
- 2) если комплексные функции f и g \mathfrak{A} -измеримы, то функции $f + g$ и fg \mathfrak{A} -измеримы.

8. Интеграл Лебега

Пусть E — единица σ -алгебры \mathfrak{A} , μ — σ -аддитивная мера на \mathfrak{A} , f — ограниченная неотрицательная \mathfrak{A} -измеримая функция на E , $A \in \mathfrak{A}$, $[a, b]$ — произвольный полуинтервал, включающий множество $f(A)$. Выберем произвольное разбиение $\tau := \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ и составим интегральную сумму Лебега

$$\sigma_\tau(f, \mu) := \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mu(e_j).$$

Здесь $\eta_j \in [t_j, t_{j+1})$, $e_j := \{x \in A : f(x) \in [t_j, t_{j+1})\} = f^{-1}([t_j, t_{j+1})) \cap A$. Известно, что при измельчении разбиения τ интегральные суммы Лебега стремятся к конечному пределу. Этот

⁷Меры μ'_+ , μ'_- , μ''_+ , μ''_- допускают и независимые от разложения Хана определения:

$$\begin{aligned} \mu'_+(A) &:= \sup_{B \subseteq A, B \in \mathfrak{A}} \mu'(B), \quad \mu'_-(A) := \sup_{B \subseteq A, B \in \mathfrak{A}} (-\mu'(B)), \\ \mu''_+(A) &:= \sup_{B \subseteq A, B \in \mathfrak{A}} \mu''(B), \quad \mu''_-(A) := \sup_{B \subseteq A, B \in \mathfrak{A}} (-\mu''(B)). \end{aligned}$$

предел называется *интегралом Лебега* (по мере μ) функции f на множестве A и обозначается $\int_A f d\mu$. Если опустить требование ограниченности функции f , то интеграл Лебега определяется так

$$\int_A f d\mu := \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu, \quad (4)$$

где

$$f_k(t) := \begin{cases} f(t) & \text{при } f(t) < k, \\ k & \text{при } f(t) \geq k. \end{cases}$$

Если предел (4) существует, то функцию f называют *интегрируемой* на множестве A . Если опустить требование неотрицательности, то

$$\int_A f d\mu := \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu, \quad (5)$$

где

$$f_+(t) := \begin{cases} f(t) & \text{при } f(t) > 0, \\ 0 & \text{при } f(t) \leq 0, \end{cases} \quad f_-(t) := \begin{cases} -f(t) & \text{при } f(t) < 0, \\ 0 & \text{при } f(t) \geq 0. \end{cases}$$

При этом функция f называется *интегрируемой* на множестве A , если интегрируемы на множестве A функции f_+ и f_- .

9. Интеграл Лебега-Стилтьеса

10. Кривые в комплексной плоскости

Кривые в комплексной плоскости занимают особое место в теории функций комплексной переменной. Проблема заключается в том, что существуют различные подходы к определению кривой, которые рожают различные терминологические базы и различные круги вопросов. Для нас важно определиться и обозначить конкретную терминологию и используемую далее символику.

10.1. Определение кривой. Множество называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов x и y определено отношение строгого порядка " \prec ", то есть некоторое отношение, удовлетворяющее следующим условиям: $x \prec y$ исключает $x = y$; если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$. Два элемента частично упорядоченного множества *сравнимы*, если имеет место одно из трех соотношений $x \prec y$, $y \prec x$, $x = y$. Частично упорядоченное множество называется *упорядоченным*, если любые два его элемента сравнимы. Частично упорядоченное множество с отношением порядка " \prec " может рассматриваться как частично упорядоченное множество с *обратным отношением* порядка " \succ ": $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $y \prec x$. При переходе к обратному порядку запас сравнимых элементов не меняется, в частности, упорядоченное множество таковым и остаётся.

Частично упорядоченное множество $l \subseteq \mathbf{C}$ называется *кривой* (точнее, *кривой Жордана*), если задана непрерывная на некотором промежутке $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbf{R}$, $a \neq b$, комплексная функция λ , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) образ промежутка $\langle a, b \rangle$ при отображении λ совпадает с l ;
- 2) если $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ и $\lambda(t_1) \prec \lambda(t_2)$, то $t_1 < t_2$.

Кривая l называется *простой*, если выполняется дополнительное условие:

- 3) функция λ осуществляет *изотонное* отображение, то есть из условий $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ и $t_1 < t_2$ вытекает, что $\lambda(t_1) \prec \lambda(t_2)$.

Условия 2) и 3) в совокупности означают, что λ является *порядковым изоморфизмом*: $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ и $t_1 < t_2$ тогда и только тогда, когда $\lambda(t_1) \prec \lambda(t_2)$. В частности, простая кривая не имеет самопересечений. Другими словами, если $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$ и $t_1 \neq t_2$, то $\lambda(t_1) \neq \lambda(t_2)$.

Таким образом, кривая в комплексной плоскости определяется как упорядоченная пара (l, λ) . Первый элемент этой пары называется *носителем* кривой, а второй элемент — *параметризацией* кривой. Переменная t , принимающая значения в области определения функции λ , называется *параметром кривой*.

В облегченной терминологии, которую мы будем использовать наряду с введенной, кривая (l, λ) , с одной стороны, отождествляется с её носителем l , при этом уравнение $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ называется *параметрическим уравнением кривой l* . С другой стороны, всякая непрерывная на промежутке $\langle a, b \rangle$ комплексная функция λ определяет некоторую кривую, для которой полный образ $\{\lambda(t) : t \in \langle a, b \rangle\}$, с индуцированным из $\langle a, b \rangle$ порядком, выступает в роли носителя, а сама функция λ в роли её параметризации. Про эту кривую говорят, что она *задана параметрическим уравнением*

$$z = \lambda(t), \quad t \in \langle a, b \rangle$$

или, в действительной терминологии, задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

где $x := \operatorname{Re} \lambda$ и $y := \operatorname{Im} \lambda$.

Замена переменной $t \rightarrow -t$ *переориентирует кривую*, то есть замещает отношение порядка на ней его обратным отношением. Переориентированная кривая задается параметрическим уравнением $z = \lambda(-t)$, $t \in \langle -b, -a \rangle$. Если желательно переориентировать кривую без изменения области изменения параметра, то следует задать переориентированную кривую с помощью уравнения $z = \lambda(a + b - t)$, $t \in \langle a, b \rangle$.

Кривая l , заданная параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, называется *непрерывно дифференцируемой*, если функция λ имеет непрерывную на промежутке $\langle a, b \rangle$ производную функцию. Если к тому же производная функция λ' не обращается в ноль, то кривая l называется *гладкой*. Если для любого отрезка $[a', b'] \subseteq \langle a, b \rangle$ существует разбиение $a' = t_0 < \dots < t_n = b'$, при котором частичные кривые l_k , $k = 0, \dots, n-1$, задаваемые уравнениями $z = \lambda(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, являются непрерывно дифференцируемыми (гладкими), то кривая называется *кусочно непрерывно дифференцируемой* (*кусочно гладкой*). Кривая l называется *спрямляемой*, если функция λ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[a', b'] \subseteq \langle a, b \rangle$.

10.2. Замена параметра. Кривые (l_1, λ_1) и (l_2, λ_2) объявляются *тождественными*, если $l_1 = l_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2 \circ \varphi$, где φ — непрерывная не убывающая функция, отображающая промежуток $\langle a_1, b_1 \rangle := D_{\lambda_1}$ на промежуток $\langle a_2, b_2 \rangle := D_{\lambda_2}$. Переход от кривой (l_1, λ_1) к тождественной кривой (l_2, λ_2) называют *заменой параметра* и обозначают $t \rightarrow \varphi(t)$. Если условие $l_1 = l_2$ заменено условием $l_1 \supset l_2$, то говорят о тождественности кривой (l_2, λ_2) и части кривой (l_1, λ_1) и соответственно о *локальной замене параметра*. Если кривая (l_1, λ_1) является дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой или спрямляемой, то тождественная кривая (l_2, λ_2) будет таковой же, если предположить дополнительно, что функция φ является дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой или абсолютно непрерывной соответственно.

Рассмотрим конкретный пример: l_1 — кривая, заданная уравнением $z = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$; l_2 — кривая, заданная уравнением $z = -\sqrt{r^2 - t^2} - it$, $t \in [-r, r]$. Носитель кривой l_1 совпадает с окружностью радиуса r с центром в начале, носитель кривой l_2 совпадает с частью этой окружности, лежащей в левой полуплоскости. Функция $\varphi : t \rightarrow -r \sin t$ непрерывна и возрастает на отрезке $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$. Область её значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[-r, r]$. При этом $-\sqrt{r^2 - \varphi^2(t)} - i\varphi(t) = -\sqrt{r^2 - (-r \sin t)^2} - i(-r \sin t) = re^{it}$. Таким образом, кривая l_2 тождественна части кривой l_1 . Переход от кривой l_1 к кривой l_2 осуществляется

локальной заменой параметра $t \rightarrow -r \sin t$, $t \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$. При этом кривая l_1 является гладкой, так как функция $t \rightarrow re^{it}$ является непрерывно дифференцируемой на промежутке $[0, 2\pi)$ и $(re^{it})' = ire^{it} \neq 0$. В то же время, кривая l_2 не является даже дифференцируемой, так как функция $t \rightarrow -\sqrt{r^2 - t^2}$ не дифференцируема в точках $-r$ и r .

10.3. Касательная к кривой. Пусть кривая l задана параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Предположим, что в некоторой точке $t_0 \in \langle a, b \rangle$ существует производная $\lambda'(t_0)$ и эта производная отлична от нуля. Это предположение означает, что функции $t \rightarrow x(t)$ и $t \rightarrow y(t)$, определяемые соотношениями

$$x(t) := \operatorname{Re} \lambda(t), \quad y(t) := \operatorname{Im} \lambda(t), \quad t \in \langle a, b \rangle,$$

дифференцируемы в точке t_0 как функции действительной переменной и их производные в этой точке не обращаются в нуль одновременно. Как известно из действительного анализа, при этих условиях кривая l в окрестности точки $z_0 := \lambda(t_0)$ совпадает с графиком некоторой действительной функции (функции, задаваемой с помощью параметрических уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$), имеющим касательную в точке z_0 . Эта касательная называется *касательной к кривой l в точке z_0* . Она задаётся параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + x'(t_0)(t - t_0), \quad y = y_0 + y'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbf{R},$$

где $x_0 := \operatorname{Re} z_0$, $y_0 := \operatorname{Im} z_0$. Эти уравнения можно заменить одним комплексным уравнением

$$z = z_0 + \lambda'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Касательная к кривой l сама рассматривается как кривая и поэтому является ориентированной по возрастанию параметра t . Угол α , который она образует с действительной осью — это наименьший по абсолютной величине угол, на который надо повернуть действительную ось до её совпадения с касательной как по положению, так и по ориентации. Если $t > t_0$, то угол α совпадает с полярным углом точки, изображающей комплексное число $z - z_0 = \lambda'(t_0)(t - t_0)$, то есть совпадает с $\arg(\lambda'(t_0)(t - t_0)) = \arg \lambda'(t_0)$. Это означает, что касательная к кривой (l, λ) в точке z_0 образует угол $\arg \lambda'(t_0)$ с действительной осью. В этом состоит *геометрический смысл производной комплексной функции действительной переменной*.

С более общих позиций касательная к кривой l , задаваемой уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, в точке $z_0 := \lambda(t_0)$, $t_0 \in \langle a, b \rangle$, определяется как предельное положение секущей, другими словами, *касательная в точке z_0* — ориентированная прямая, проходящая через точку z_0 , единичный вектор которой совпадает с пределом единичного вектора секущей

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\pm \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{|\lambda(t) - \lambda(t_0)|} \right)$$

Здесь стоит знак "+", если $t > t_0$, и знак "−", если $t < t_0$. Существование этого предела и означает существование касательной. Условие $\lambda'(t_0) \neq 0$ является достаточным условием существования касательной. Действительно, при этом условии

$$\pm \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{|\lambda(t) - \lambda(t_0)|} = \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{|\lambda(t) - \lambda(t_0)|} \rightarrow \frac{\lambda'(t_0)}{|\lambda'(t_0)|}, \quad t \rightarrow t_0.$$

Пусть в некоторой точке $t_0 \in \langle a, b \rangle$ существует производная $\lambda'(t_0)$ и она равна нулю. Существует ли касательная к кривой l в точке $\lambda(t_0)$? Иногда, ответить на этот вопрос позволяет локальная замена параметра. Точнее, если удаётся подобрать дифференцируемую возрастающую в окрестности точки t_0 функцию φ так, что производная функции $\lambda_1 = \lambda \circ \varphi$ в точке

$t_0 = \varphi^{-1}(\tau_0)$ отлична от нуля, то ответ на поставленный вопрос положителен⁸. Действительно,

$$\frac{|t - t_0|}{t - t_0} \frac{|\lambda(t) - \lambda(t_0)|}{|\lambda(t) - \lambda(t_0)|} = \frac{|\varphi^{-1}(\tau) - \varphi^{-1}(\tau_0)|}{\varphi^{-1}(\tau) - \varphi^{-1}(\tau_0)} \frac{|\lambda_1(\varphi^{-1}(\tau)) - \lambda_1(\varphi^{-1}(\tau_0))|}{|\lambda_1(\varphi^{-1}(\tau)) - \lambda_1(\varphi^{-1}(\tau_0))|} \rightarrow \frac{\lambda'_1(t_0)}{|\lambda'_1(t_0)|}, \quad \tau \rightarrow \tau_0.$$

В частности, если одна из функций $\operatorname{Re} \lambda$ или $\operatorname{Im} \lambda$ возрастает в окрестности точки t_0 , то, вопрос решает локальная замена параметра $t \rightarrow \tau = \varphi(t)$, где φ — обратная функция к сужению функции $\operatorname{Re} \lambda$ или $\operatorname{Im} \lambda$ на окрестность точки t_0 .

Например, пусть l — кривая, заданная уравнением $z = t^5 + it^3 + 1$, $t \in [-1, 1]$. Так как $\lambda(0) = 1$, то кривая l проходит через точку $z_0 = 1$. При этом в точке $t_0 = 0$ производная функции $\lambda' : t \rightarrow 5t^4 + 3it^2$ функции $\lambda : t \rightarrow t^5 + it^3 + 1$ равна нулю. Покажем, что она имеет касательную в этой точке. Замечаем, что функция $\operatorname{Im} \lambda : t \rightarrow t^3$ дифференцируема и возрастает на отрезке $[-1, 1]$. Её обратная на этом отрезке функция φ может быть определена следующим образом

$$\varphi(t) := t^{\frac{1}{3}} \Big|_{[-1, 1]} = \begin{cases} -\sqrt[3]{-t}, & \text{если } t \in [-1, 0) \\ \sqrt[3]{t}, & \text{если } t \in [0, 1] \end{cases}$$

Осуществим замену параметра $t \rightarrow \varphi(t)$. Тожественная кривая l_1 задаётся уравнением $z = \lambda_1(t)$, $t \in [-1, 1]$, где $\lambda_1(t) = \lambda(\varphi(t)) = t \left(t^{\frac{2}{3}} + i \right) + 1$. Учитывая, что производная $\lambda'_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(t^{\frac{2}{3}} + i \right)$ функции λ_1 в точке 0 равна i , заключаем, что исходная кривая имеет касательную в точке $z_0 = 1$, составляющую с действительной осью угол равный $\arg \frac{\lambda'_1(0)}{|\lambda'_1(0)|} = \arg \lambda'_1(0) = \arg i = \frac{\pi}{2}$.

11. Компактные кривые

Если область изменения $\langle a, b \rangle$ параметра кривой является отрезком $[a, b]$, то кривую называют *компактной*. Непрерывный образ компакта является компактом, значит, носитель компактной кривой, в свою очередь, является компактом.

11.1. Длина кривой. Пусть кривая l , задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, является спрямляемой, то есть функция λ имеет ограниченную вариацию $V_{a'}^{b'}(\lambda)$ на любом отрезке $[a', b'] \subseteq \langle a, b \rangle$. Если эта кривая компактна, то конечную вариацию $V_a^b(\lambda)$ называют длиной кривой l и обозначают $|l|$. Таким образом, для компактной спрямляемой кривой

$$|l| := V_a^b(\lambda) = \sup_{\tau} \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)| > 0,$$

где точная грань берётся по всевозможным разбиениям $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$. Если спрямляемая кривая l не является компактной, то её длина определяется формулой

$$|l| := \sup_{k \in \mathbb{N}} |l_k| \leq +\infty,$$

где l_k — компактная кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a_k, b_k] \subseteq \langle a, b \rangle$, $a_k \rightarrow a$, $b_k \rightarrow b$. Длина $|L|$ конечного или счётного семейства L спрямляемых кривых l_j определяется как сумма $\sum |l_j|$ длин кривых, составляющих это семейство. Если одна из кривых l_j имеет бесконечную длину или ряд $\sum |l_j|$ расходится, то длина семейства L объявляется бесконечной.

⁸Здесь φ^{-1} — обратная функция для функции φ и переход к тождественной кривой осуществляется с помощью замены параметра $t \rightarrow \tau = \varphi^{-1}(t)$.

Если кривая l является непрерывно дифференцируемой, то, как известно, она является спрямляемой. Формула для вычисления длины $|l|$ непрерывно дифференцируемой кривой в комплексных обозначениях имеет вид

$$|l| = \int_a^b |\lambda'(t)| dt.$$

При этом интеграл в правой части понимается в несобственном смысле:

$$\int_a^b |\lambda'(t)| dt := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{a_k}^{b_k} |\lambda'(t)| dt,$$

$[a_k, b_k] \subseteq \langle a, b \rangle$, $a_k \rightarrow a$, $b_k \rightarrow b$. Если кривая l является непрерывно дифференцируемой и производная λ' её параметризации ограничена на промежутке $\langle a, b \rangle$, то её длина не превосходит

$$\sup_k (b_k - a_k) \sup_{\langle a, b \rangle} |\lambda'|.$$

В частности, всякая непрерывно дифференцируемая компактная кривая имеет конечную длину.

Из свойств функций ограниченной вариации вытекает, что:

1) длина компактной спрямляемой кривой обладает свойством аддитивности: если компактную спрямляемую кривую разбить на две кривые, то её длина совпадёт с суммой длин частичных кривых;

2) если кривая l , задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$ является спрямляемой, то переменная длина $|l(s)|$ — длина кривой $l(s)$, задаваемой уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, s]$, является непрерывной возрастающей функцией на отрезке $[a, b]$.

11.2. Площадь кривой. Зафиксируем $\delta > 0$ и обозначим Δ объединение всех замкнутых квадратов

$$\Delta_{k,m} := \{z : \delta k \leq \operatorname{Re} z \leq \delta(k+1), \delta m \leq \operatorname{Im} z \leq \delta(m+1)\}, \quad k, m \in \mathbf{Z},$$

пересекающихся с носителем кривой l .

ТЕОРЕМА 0.14. *Если компактная кривая l является спрямляемой, то число квадратов N , составляющих множество Δ , не превосходит $4 \left(\frac{|l|}{\delta} + 1 \right)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|l| < \delta$, то утверждение теоремы выполнено, так как N в этом случае не превосходит 4. Поэтому будем считать, что $|l| \geq \delta$. Переменная длина $|l(s)|$ кривой l является непрерывной и возрастающей функцией на отрезке $[a, b]$. Обозначим t_j точку из отрезка $[a, b]$, в которой функция $|l(s)|$ принимает значение $\frac{|l|}{n} j$, где натуральное n выбрано из условия: $\frac{|l|}{n} < \delta \leq \frac{|l|}{n-1}$. Точки $a = t_0, \dots, t_n = b$ образуют разбиение отрезка $[a, b]$. Этому разбиению соответствует разбиение кривой l на n частичных кривых. Длина каждой из частичных кривых равна $\frac{|l|}{n} < \delta$. Поэтому каждой из этих кривых касаются не более чем четыре квадрата из числа тех, что составляют множество Δ . Значит, число N не превосходит $4n \leq 4 \left(\frac{|l|}{\delta} + 1 \right)$. \square

Площадь множества Δ равна $N\delta^2$. Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что для любой компактной спрямляемой кривой $N\delta^2 \rightarrow 0$, если $\delta \rightarrow 0$. Это означает, что носитель любой компактной спрямляемой кривой измерим по Жордану и имеет нулевую площадь.

11.3. Продолжение аргумента вдоль кривой. Предположим, что компактная кривая l , задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$, не проходит через начало, то есть $\lambda(t) \neq 0$ для любого $t \in [a, b]$. По теореме 0.3 для любого $t' \in [a, b]$ найдётся непрерывная в точке t' действительная функция $\varphi_{t'}$, определённая на всём отрезке $[a, b]$, такая, что

$$\lambda(t) = r(t)e^{i\varphi_{t'}(t)}, \quad t \in [a, b],$$

где $r = |\lambda|$. Для определённости считаем, что $\varphi_{t'}(t) = \arg\{\lambda(t)\overline{\lambda(t')}\} + \arg \lambda(t')$. Воспользуемся непрерывностью функции $\varphi_{t'}$ в точке t' и выберем окрестность $U(t') = \{t : |t - t'| < \delta_{t'}\}$ этой точки так, чтобы для всех $t \in U(t') \cap [a, b]$ выполнялось неравенство $|\varphi_{t'}(t) - \varphi_{t'}(t')| < \frac{\pi}{2}$. Далее выберем произвольное разбиение $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$, любые два соседних элемента t_j, t_{j+1} которого лежат в пределах одной окрестности из семейства $\{U(t') : t' \in [a, b]\}$. Сумма

$$\arg l := \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi_{t'}(t_{j+1}) - \varphi_{t'}(t_j)) \quad (6)$$

не меняется при последующем измельчении разбиения τ и называется *изменением аргумента* вдоль кривой l .

Данное определение требует некоторых разъяснений. Во-первых, любое разбиение отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше некоторого положительного числа, обладает свойством: любые две его соседние точки лежат в пределах одной окрестности из семейства $\{U(t') : t' \in [a, b]\}$. Действительно, окрестности $\frac{1}{2}U(t')$, $t' \in [a, b]$ покрывают отрезок $[a, b]$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\frac{1}{2}U(t'_s)$, $s = 1, \dots, N$. Пусть r — минимальный радиус выбранных окрестностей, $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше r . Тогда, если $t_j \in \frac{1}{2}U(t'_s) \subset U(t'_s)$, то, очевидно, $t_{j-1}, t_{j+1} \in U(t'_s)$.

Во-вторых, разность $\varphi_{t'}(t_{j+1}) - \varphi_{t'}(t_j)$ не зависит от выбора t' , то есть не меняется при замене t' с условием $t_j, t_{j+1} \in U(t')$ на t'' с условием $t_j, t_{j+1} \in U(t'')$. Действительно, значения функций $\varphi_{t'}$ и $\varphi_{t''}$ в произвольной точке $t \in [a, b]$ принадлежат $\text{Arg } \lambda(t)$ и, следовательно, отличаются на слагаемое вида $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Значит,

$$\varphi_{t'}(t_{j+1}) - \varphi_{t'}(t_j) - \varphi_{t''}(t_{j+1}) + \varphi_{t''}(t_j) = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Если же окрестности $U(t')$ и $U(t'')$ пересекаются и $t_j, t_{j+1} \in U(t') \cap U(t'')$, то $|\varphi_{t'}(t_{j+1}) - \varphi_{t'}(t_j) - \varphi_{t''}(t_{j+1}) + \varphi_{t''}(t_j)| \leq |\varphi_{t'}(t_{j+1}) - \varphi_{t'}(t')| + |\varphi_{t'}(t') - \varphi_{t'}(t_j)| + |\varphi_{t''}(t_{j+1}) - \varphi_{t''}(t'')| + |\varphi_{t''}(t'') - \varphi_{t''}(t_j)| < 4\frac{\pi}{2} = 2\pi$. Следовательно, $k = 0$.

В-третьих, сумма (6) не зависит от выбора разбиения τ отрезка $[a, b]$, любые два соседних элемента которого лежат в пределах одного элемента $U(t')$. Действительно, пусть τ_1, τ_2 — два таких разбиения, $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. Разбиение τ можно получить измельчением разбиения τ_1 и измельчением разбиения τ_2 . Следовательно, сумма (6), составленная по разбиениям τ_1 и τ_2 , совпадёт с этой суммой, но составленной по разбиению τ .

Изменение аргумента вдоль произвольной кривой l , не проходящей через начало, определяется с помощью соотношения

$$\arg l := \lim \arg l_k,$$

где l_k — компактная кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a_k, b_k] \subseteq \langle a, b \rangle$, $a_k \rightarrow a$, $b_k \rightarrow b$ (при условии, что указанный предел существует и не зависит от выбора отрезков $[a_k, b_k]$).

В качестве примера рассмотрим кривую l , задаваемую уравнением $z = t + i \ln t$, $t \in (0, +\infty)$. Носитель этой кривой совпадает с графиком натурального логарифма. Изменение аргумента вдоль кривой l_k , задаваемой уравнением $z = t + i \ln t$, $t \in [a_k, b_k] \subseteq (0, +\infty)$, $a_k \rightarrow 0$, $b_k \rightarrow +\infty$, равно $\arg(b_k + i \ln b_k) - \arg(a_k + i \ln a_k) = \arctg \frac{\ln b_k}{b_k} - \arctg \frac{\ln a_k}{a_k}$. Значит, изменение аргумента вдоль кривой l равно $\lim \left(\arctg \frac{\ln b_k}{b_k} - \arctg \frac{\ln a_k}{a_k} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Если кривая l задаётся уравнением $z = \lambda(\xi)$, $\xi \in [a, b]$, то действительная функция

$$\arg l(t) := \arg \lambda(a) + \arg l_t, \quad t \in [a, b],$$

где l_t — кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(\xi)$, $\xi \in [a, t] \subseteq [a, b]$, называется *продолжением аргумента* вдоль кривой l . Продолжение аргумента вдоль кривой является непрерывной⁹ на промежутке $[a, b]$ функцией. При этом

$$\lambda(t) = r(t)e^{i \arg l(t)}, \quad t \in [a, b].$$

Если кривая l является непрерывно дифференцируемой, то по теореме 0.5 производная функция φ' является непрерывной на интервале (a, b) и определяется однозначно

$$\varphi' = \frac{1}{i} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{r'}{r} \right).$$

Поэтому аргумент точки $\lambda(t)$ кривой l может быть представлен значением непрерывной действительной функции φ , определяемой с помощью интеграла с переменным верхним пределом $\varphi(t) := \frac{1}{i} \int_a^t \left(\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)} - \frac{r'(\xi)}{r(\xi)} \right) d\xi$. Значит,

$$\begin{aligned} \arg l &= \frac{1}{i} \int_a^b \left(\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} - \frac{r'(t)}{r(t)} \right) dt, \\ \arg l(t) &= \arg \lambda(a) + \frac{1}{i} \int_a^t \left(\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)} - \frac{r'(\xi)}{r(\xi)} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Если непрерывно дифференцируемая кривая l является компактной и производная λ' её параметризации ограничена на интервале (a, b) , то

$$\begin{aligned} \arg l &= \frac{1}{i} \int_a^b \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} dt - \frac{1}{i} \ln \frac{r(b)}{r(a)}, \\ \arg l(t) &= \arg \lambda(a) + \frac{1}{i} \int_a^t \frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi - \frac{1}{i} \ln \frac{r(t)}{r(a)}. \end{aligned}$$

При этом несобственные интегралы в правых частях сходятся и изменение аргумента вдоль этой кривой конечно и не превосходит

$$\frac{b-a}{\rho(0, l)} \sup_{(a, b)} |\lambda'| + \left| \ln \frac{r(b)}{r(a)} \right|.$$

Здесь $\rho(0, l) := \inf_{(a, b)} |\lambda|$ — расстояние от начала комплексной плоскости до носителя кривой l .

Пусть кривая l задаётся уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ и $z_0 \notin l$. Кривая $l - z_0$, задаваемая уравнением $z = \lambda(t) - z_0$, $t \in \langle a, b \rangle$, не проходит через начало комплексной плоскости. Изменение аргумента вдоль кривой $l - z_0$ называется *изменением аргумента относительно точки z_0* вдоль кривой l и обозначается $\arg_{z_0} l$. Осталось заметить, что все проведённые выше рассуждения относятся к случаю $z_0 = 0$. Обнаружить изменения, связанные с переходом к общему случаю, предоставляем читателю.

⁹Для всех t из $U(t') \cap [a, b]$ имеет место представление $\arg l(t) = \varphi_{t'}(t) + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$ и является одним и тем же для всех t из $U(t') \cap [a, b]$.

11.4. Аппроксимация компактной кривой. Далее нам потребуется описать некоторые топологические свойства замкнутых кривых. Эти свойства извлекаются из свойств замкнутых ломанных линий, которые мы будем считать известными читателю. Основную роль в этой процедуре будут играть следующие две теоремы.

Пусть l — компактная кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$; $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$; l_τ — ломанная линия, с вершинами в точках $\lambda(t_j)$, $t_j \in \tau$, отождествляемая нами с кривой, задаваемой уравнением $z = \lambda_\tau(t)$, $t \in [a, b]$, где

$$\lambda_\tau(t) := \frac{\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)}{t_{j+1} - t_j}(t - t_j) + \lambda(t_j), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Точки $\lambda(t_j)$, $t_j \in \tau$, в свою очередь, разбивают кривые l и l_τ на n частичных кривых l_j и $l_{\tau j}$ соответственно. Уравнения частичных кривых l_j и $l_{\tau j}$ определяются сужениями функций λ и λ_τ на соответствующий отрезок $[t_j, t_{j+1}]$.

В качестве примера рассмотрим кривую l , задаваемую уравнением $z = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Носитель этой кривой совпадает с отрезком $[-1, 1]$ действительной оси. Однако, кривая l не является гладкой и даже кусочно гладкой, но является непрерывно дифференцируемой. Упорядоченное множество $\tau = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ разбивает отрезок $[0, 2\pi]$. Этому разбиению соответствует ломанная линия l_τ (имеющая 4 звена), задаваемая уравнением

$$z = \begin{cases} \frac{2t}{\pi} & \text{при } t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\frac{2t}{\pi} + 2 & \text{при } t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ \frac{2t}{\pi} - 4 & \text{при } t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

Кривая l_τ не является непрерывно дифференцируемой, но является кусочно гладкой (может, например, быть разбита на три гладкие кривые); её носитель совпадает с носителем кривой l . Вместе с тем, если в качестве разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ взять множество $\tau = \{0, \pi, 2\pi\}$, то соответствующая ломанная линия (имеющая два звена) задаётся уравнением $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Эта кривая является непрерывно дифференцируемой, её носитель содержит лишь одну точку 0.

ТЕОРЕМА 0.15. *Если открытое в \mathbb{C} множество G включает носитель компактной кривой l , то для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого положительного δ , ломанная линия l_τ лежит в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — расстояние между носителем кривой l и границей ∂G множества G . Носитель компактной кривой является компактом, а граница ∂G является замкнутым множеством (как дополнение открытого множества $\text{int } G \cup \text{ext } G$), значит, $\varepsilon > 0$. С другой стороны, по теореме Кантора существует $\delta > 0$ такое, что $|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)| < \varepsilon$, если $t_1, t_2 \in [a, b]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$. Выберем произвольное разбиение $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше δ . Для любого $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеем

$$|\lambda_\tau(t) - \lambda(t_j)| = \left| \frac{\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)}{t_{j+1} - t_j}(t - t_j) \right| \leq |\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)| < \varepsilon$$

Значит, ломанная линия l_τ лежит в объединении кругов $U_\varepsilon(\lambda(t_j))$, $j = 1, \dots, n$. Но каждый из этих кругов включён в G . \square

ТЕОРЕМА 0.16. *Если компактная кривая l не проходит через начало комплексной плоскости, то для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого положительного δ выполняется равенство*

$$\arg l = \arg l_\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что начало комплексной плоскости лежит вне носителя кривой l . Множество $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ является открытым и включает носитель кривой l . Значит, для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого положительного δ ломанная линия l_τ лежит в множестве $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, то есть не проходит через 0. Это позволяет говорить о продолжении аргумента вдоль кривой l_τ . По формуле (6) $\arg l = \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi_\nu(t_{j+1}) - \varphi_\nu(t_j))$, где $\varphi_\nu(t) := \arg\{\lambda(t)\overline{\lambda(t')}\} + \arg \lambda(t')$. Остаётся заметить, что разницы $\varphi_\nu(t_{j+1}) - \varphi_\nu(t_j)$ не меняются, если функцию $\varphi_\nu(t)$ заменить функцией $\varphi_{\tau, \nu}(t) := \arg\{\lambda_\tau(t)\overline{\lambda_\tau(t')}\} + \arg \lambda_\tau(t')$, так как $\lambda(t_j) = \lambda_\tau(t_j)$ для всех $t_j \in \tau$. Это означает, что $\arg l = \arg l_\tau$. \square

11.5. Замкнутые кривые. Компактная кривая l , задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$, называется *замкнутой*, если $\lambda(a) = \lambda(b)$. Замкнутая кривая называется *контуром*, если она не имеет внутренних самопересечений, другими словами, кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in (a, b)$, является простой. *Индексом* замкнутой кривой l относительно точки $z_0 \notin l$, в обозначениях $\text{ind}_{z_0} l$, называется отношение $\frac{1}{2\pi} \arg_{z_0} l$, где $\arg_{z_0} l$ — изменение аргумента относительно точки z_0 вдоль кривой l . Точка $z_0 \notin l$ называется *внешней* (соотв. *внутренней*) точкой замкнутой кривой l , если индекс кривой l относительно точки z_0 равен 0 (соотв. не равен 0). Совокупность всех внешних (внутренних) точек замкнутой кривой l называется *внешностью* (соотв. *внутренностью*) этой кривой и обозначается $\text{ext } l$ (соотв. $\text{int } l$).

Пусть l — компактная кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$; $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$; l_τ — ломанная линия, с вершинами в точках $\lambda(t_j)$, $t_j \in \tau$. Легко заметить, что внутренность $\text{int } l_\tau$ замкнутой ломанной линии l_τ совпадает с объединением конечного числа открытых пугольников ($n \geq 3$), а внешность $\text{ext } l_\tau$ совпадает с дополнением конечного числа замкнутых пугольников ($n \geq 2$).

Упражнение. Используя теорему о промежуточных значениях непрерывной действительной функции, докажите, что всякая кривая, носитель которой содержит внутренние и внешние точки пугольника не может не пересекаться с границей этого пугольника.

ТЕОРЕМА 0.17. Если кривая l является замкнутой, то

$$\text{int } l = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{int } l_\tau, \quad \text{ext } l = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{ext } l_\tau. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l — компактная кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$ и $z_0 \in \text{int } l$ (соотв. $z_0 \in \text{ext } l$). В силу теоремы (0.16) для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого $\delta > 0$, имеет место равенство $\arg_{z_0} l = \arg_{z_0} l_\tau$. Значит, $\text{ind}_{z_0} l = \text{ind}_{z_0} l_\tau$. Отсюда вытекает, что $z_0 \in \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{int } l_\tau$ (соотв. $z_0 \in \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{ext } l_\tau$), где $k \geq \frac{1}{\delta}$. Верно и обратное. Действительно, если при некотором $k \in \mathbf{N}$ выполняется включение $z_0 \in \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{int } l_\tau$ (соотв. $z_0 \in \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{ext } l_\tau$), то обязательно $z_0 \notin l$, так как $z_0 \notin l_\tau$ и не может являться вершиной ломанной линии l_τ . При этом в силу теоремы (0.16) $\arg_{z_0} l = \arg_{z_0} l_\tau$, если мелкость δ_τ разбиения τ меньше некоторого $\delta > 0$, следовательно, $z_0 \in \text{int } l$ (соотв. $z_0 \in \text{ext } l$). \square

Множество G называется *связным* (точнее, *линейно связным*), если для любых двух точек из этого множества существует кривая с концами в этих точках, носитель которой лежит в G . Открытое связное множество называется *областью*. Всякое открытое множество в \mathbf{R}^2 (значит, и в \mathbf{C}) представляет собой объединение не более чем счётной совокупности попарно не пересекающихся областей (называемых *компонентами связности* этого множества). Замыкание области называется *замкнутой областью*.

ТЕОРЕМА 0.18. *Если связное множество не пересекается с носителем замкнутой кривой, то оно либо включается во внутренность кривой, либо включается во внешность кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l — замкнутая кривая, задаваемая уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$; G — связное множество и $G \cap l = \emptyset$. Выберем произвольную точку $z_0 \in G$. Будем считать, что $z_0 \in \text{Int } l$ (соотв. $z_0 \in \text{Ext } l$). Пусть $z \in G$ и l_0 — кривая с концами в точках z_0 и z , носитель которой лежит в G . Так как $l \cap l_0 = \emptyset$, то $\rho(l, l_0) =: 2\varepsilon > 0$. Обозначим $U_\varepsilon(l)$ объединение ε -окрестностей $U_\varepsilon(z)$ точек $z \in l$. Множество $U_\varepsilon(l)$ является открытым и включает носитель кривой l . По теореме 0.15 для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого положительного δ , замкнутая ломанная линия l_τ лежит в $U_\varepsilon(l)$ и, значит, не пересекается с l_0 . Отсюда вытекает, что $l_0 \subset \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{Int } l_\tau$ (соотв. $l_0 \subset \bigcap_{\delta_\tau < \frac{1}{k}} \text{ext } l_\tau$), где $k > \frac{1}{\delta}$. По теореме 0.17 $l_0 \subset \text{Int } l$ (соотв. $l_0 \subset \text{Ext } l$). Следовательно, $G \subseteq \text{Int } l$ (соотв. $G \subseteq \text{Ext } l$). \square

Упражнение. 1. Докажите, что внутренность и внешность каждой замкнутой кривой являются открытыми множествами. 2. Докажите, что индекс замкнутой кривой l относительно точки z имеет одно и то же целое значение для всех z из связной компоненты внутренности кривой l . 3. Докажите, что внутренность всякой замкнутой кривой является ограниченным множеством, а внешность замкнутой кривой является неограниченным множеством. 4. Докажите, что любой луч $[z_0, \infty)$ с началом в точке $z_0 \in \text{Int } l$ пересекается с l .

ТЕОРЕМА 0.19. *Если кривая l является замкнутой и некоторое открытое множество G включает носитель l и внутренность $\text{Int } l$ этой кривой, то для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого положительного δ выполняется включение $l_\tau \cup \text{Int } l_t \subset G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 0.15 для любого разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$, мелкость δ_τ которого меньше некоторого положительного δ , ломанная линия l_τ лежит в G . Зафиксируем одно из таких разбиений τ . Пусть $z_0 \in \text{Int } l_\tau$. Если $z_0 \in l \cup \text{Int } l$, то по условию теоремы $z_0 \in G$. Поэтому считаем, что $z_0 \notin l \cup \text{Int } l$. Но тогда изменение аргумента относительно точки z_0 вдоль некоторой частичной кривой l_j и замыкающего её звена ломанной $l_{\tau j}$ будут различными. Это означает, что точка z_0 принадлежит внутренности кривой $l_j \cup l_{\tau j}^{10}$, где $l_{\tau j}^-$ — переориентированная кривая $l_{\tau j}$. В силу ограниченности внутренности кривой $l_j \cup l_{\tau j}^-$ луч $[z_0, \infty)$, лежащий на прямой $(\lambda(t_j), z_0)$ и не проходящий через точку $\lambda(t_j)$, пересекается с кривой l_j . Точка пересечения $\lambda(t')$, $t' \in (t_j, t_{j+1})$ не совпадает с точками $\lambda(t_j)$ и $\lambda(t_{j+1})$. Обозначим τ' разбиение τ дополненное точкой t' . Мелкость разбиения τ' меньше δ и $z_0 \in l_{\tau'}$. Значит, $z_0 \in G$. \square

12. Производная по кривой

13. Интеграл по кривой

Всякая комплексная функция f , определенная на носителе кривой l , задаваемой параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, может быть отождествлена с комплексной функцией действительной переменной $F := f \circ \lambda$, определённой на промежутке $\langle a, b \rangle$. В точках промежутка $\langle a, b \rangle$, в которых функция λ принимает одинаковые значения, функция F тоже принимает одинаковые значения. С другой стороны, всякая комплексная функция F ,

¹⁰Эта кривая может быть задана уравнением

$$z = \begin{cases} \lambda(t) & \text{при } t \in [t_j, t_{j+1}], \\ \lambda_\tau(2t_{j+1} - t) & \text{при } t \in [t_{j+1}, 2t_{j+1} - t_j]. \end{cases}$$

определённая на промежутке $\langle a, b \rangle$, может рассматриваться как многозначная комплексная функция $z \rightarrow \{F(t) : t \in \lambda^{-1}(z)\}$, определённая на носителе кривой l . В точках самопересечения кривой l эта функция принимает множественные значения.

Пусть на носителе компактной кривой l , задаваемой параметрическим уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b]$, определена комплексная функция f . Если существует интеграл $\int_a^b f(\lambda(t))d\lambda(t)$ Римана-Стилтьеса функции $f \circ \lambda$ по функции λ , то функцию f называют *интегрируемой* по кривой l , а упомянутый интеграл Римана-Стилтьеса называют *интегралом* функции f по кривой l и обозначают $\int_l f(z)dz$. Из определения интеграла Римана-Стилтьеса вытекает, что интеграл $\int_l f(z)dz$ совпадает с пределом интегральной суммы

$$\sigma_\tau(f, l) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(\xi_j))(\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)), \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$$

при стремлении мелкости разбиения $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$, $a = t_0 < \dots < t_n = b$ к нулю.

Если предположить, что компактная кривая l является спрямляемой, а функция $f \circ \lambda$ является непрерывной то функция f является интегрируемой по кривой l . При этом

$$\left| \int_l f(z)dz \right| \leq M|l|, \quad (8)$$

где M — произвольная мажоранта функции $|f|$, $|l|$ — длина кривой l . Действительно, существование интеграла $\int_l f(z)dz$ обеспечено существованием совпадающего с ним интеграла Римана-Стилтьеса $\int_a^b f(\lambda(t))d\lambda(t)$, а неравенство (8) вытекает из оценок

$$|\sigma_\tau(f, l)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\lambda(\xi_j))| |\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)| \leq M \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)|.$$

Если предположить дополнительно, что кривая l является непрерывно дифференцируемой, то

$$\int_l f(z)dz = \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)dt.$$

Из этой формулы, в частности, вытекает формула

$$\arg l = \frac{1}{i} \int_l \frac{dz}{z} - \frac{1}{i} \ln \frac{|\lambda(b)|}{|\lambda(a)|}$$

для вычисления изменения аргумента вдоль непрерывно дифференцируемой кривой и формула

$$\text{ind}_\zeta l = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{dz}{z - \zeta}$$

для вычисления индекса замкнутой непрерывно дифференцируемой кривой l относительно точки $\zeta \notin l$.

Из рассмотренных ранее свойств интеграла Римана-Стилтьеса вытекают свойства интеграла по кривой:

- 1) $\int_l (f_1(z) + f_2(z))dz = \int_l f_1(z)dz + \int_l f_2(z)dz$;
 - 2) $\int_l k f(z)dz = k \int_l f(z)dz$, $k \in \mathbf{C}$;
 - 3) $\int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz = \int_l f(z)dz$, l_1, l_2 — частичные кривые, полученные путём разбиения области изменения параметра кривой l на два промежутка;
 - 4) $\int_{l^*} f(z)dz = \int_l f(z)dz$, l^* — тождественная кривая;
 - 5) $\int_{l^-} f(z)dz = - \int_l f(z)dz$, l^- — переориентированная кривая
- (во всех случаях существование интегралов в правой части влечёт существование интегралов в левой части).

Если кривая l не является компактной, то интеграл $\int_l f(z)dz$ определяется по формуле

$$\int_l f(z)dz := \lim \int_{l_k} f(z)dz.$$

Здесь кривая l_k задаётся уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a_k, b_k] \subseteq \langle a, b \rangle$ и $a_k \rightarrow a$, $b_k \rightarrow b$.

Понятие интеграла по кривой лежит в основе понятия *интеграла по семейству кривых*. Пусть задано семейство L кривых l_j , $j = 1, \dots, n$, и на объединении носителей этих кривых определена комплексная функция f . Тогда

$$\int_L f(z)dz := \sum_{j=1}^n \int_{l_j} f(z)dz.$$

При этом существование интегралов в правой части может быть гарантировано требованием компактности и спрямляемости кривых из семейства L и требованием непрерывности сужений функции f на каждую такую кривую. Если семейство кривых L получено из одной кривой l путем разбиения области изменения параметра на конечное множество промежутков, то имеет место формула

$$\int_L f(z)dz = \int_l f(z)dz$$

(существование интеграла в правой части влечёт существование интеграла в левой части).