

Множества на числовой прямой

§ 1. Строение замкнутых и открытых множеств

Лемма: любое множество попарно непересекающихся интервалов на числовой прямой конечно или счетно.

Доказательство: Пусть $S = \{u_\alpha\}$, $\alpha \in A$, u_α — интервал в \mathbf{R} , $u_\alpha \cap u_\beta = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$. Покажем, что A конечно или счетно. Выберем в каждом интервале по одному рациональному числу: $r_\alpha \in u_\alpha$, $r_\alpha \in \mathbf{Q}$, $\alpha \in A$. Так как $u_\alpha \cap u_\beta = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$, то все r_α различны. Значит A эквивалентно части \mathbf{Q} . Поэтому A либо счетно либо конечно.

Теорема: множество $F \subseteq \mathbf{R}$ является замкнутым тогда и только тогда, когда оно либо все \mathbf{R} , либо получено из \mathbf{R} удалением конечного или счетного множества интервалов с концами в множестве F .

Доказательство: Если $F \subseteq \mathbf{R}$, то все доказано. Пусть $F \neq \mathbf{R}$. Тогда $\exists x_0 \notin F$. Пусть $F_1 = \{x \in F : x < x_0\}$, $F_2 = \{x \in F : x > x_0\}$. Убедимся, что множества F_1 и F_2 замкнуты. Пусть y — точка прикосновения множества F_1 , тогда y — точка прикосновения $F \Rightarrow y \in F$. Так как $F_1 \subseteq (-\infty, x_0)$, то точка y является точкой прикосновения интервала $(-\infty, x_0)$. Значит $y \in \overline{(-\infty, x_0)} = (-\infty, x_0]$. Так как $x_0 \notin F$, то $y \neq x_0$. Отсюда следует, что $y \in (-\infty, x_0) \Rightarrow y \in F_1$. Следовательно F_1 — замкнуто. Аналогично показывается, что замкнуто и F_2 .

Пусть $\alpha = \sup F_1$, $\beta = \inf F_2$. Так как F_1 и F_2 замкнуты, то $\alpha \in F_1$, $\beta \in F_2$. Так как $x_0 \notin F$, то $-\infty \leq \alpha < x_0 < \beta \leq +\infty$. В интервале $(\alpha; \beta)$ нет точек из F . Другими словами, каждая точка не входящая в F не входит в него вместе с некоторым интервалом с концами в множестве F . Эти интервалы не пересекаются. Действительно. Допустим противное. $(\alpha, \beta) \cap (\alpha', \beta') \neq \emptyset$. Но тогда хотябы один конец этих интервалов лежит в другом интервале и значит не может входить в F . По лемме такая совокупность интервалов конечна или счетна.

Следствие: множество $G \subseteq \mathbf{R}$ является открытым тогда и только тогда, когда оно либо пусто, либо является объединением конечного или счетного числа непересекающихся интервалов.

Доказательство: (необходимость — очевидно)

(достаточность — предыдущая теорема) Пусть F получено из \mathbf{R} удалением конечного или счетного семейства интервалов: $F = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k \in A} G_k$, A — счетно. Так как G_k — открыты, то $\bigcup_{k \in A} G_k$ — открыто, следовательно F — замкнуто.

§2. Совершенные множества на прямой

Определение: Замкнутое множество называется совершенным, если оно не имеет изолированных точек.

Теорема: Всякое совершенное множество F на прямой есть либо все R либо получается из R удалением конечной или счетной совокупности интервалов не имеющих общих концов и с концами в F .

Доказательство: (необходимость) Пусть F — совершенное множество, тогда оно замкнуто, следовательно F либо R либо получается из R удалением конечной или счетной совокупности интервалов с концами в F . Допустим, что два интервала из этой совокупности имеют общий конец. Тогда F содержит изолированную точку, следовательно F — не совершенное, следовательно получили противоречие.

(достаточность) Пусть ни одна пара интервалов не имеет общих концов. Покажем, что F — совершенное множество. Допустим противоречие: F — не совершенное $\Rightarrow \exists x_0 \in F$, x_0 — изолированная точка; $F_1 = \{x \in F : x < x_0\}$, $F_2 = \{x \in F : x > x_0\}$. $x_0 \notin F_1$, $x_0 \notin F_2$. Допустим, что F_1 и F_2 — замкнуты на примере множества F_1 . Пусть y — точка прикосновения F_1 . Так как изолированные точки лежат в множестве, то достаточно предположить, что y — предельная точка F_1 , значит y — предельная точка F , следовательно $y \in F$ и $y \neq x_0$, значит $y \in (-\infty, x_0)$ и $y \in F_1$, следовательно F_1 — замкнуто.

Пусть $\alpha = \sup F_1$, $\beta = \inf F_2$, тогда $\alpha \in F_1$, $\beta \in F_2$. Имеем два интервала (α, x_0) и (x_0, β) с концами в F и x_0 — их общий конец. Таким образом, получили два смежных интервала, что противоречит предположению.

§3. Канторово совершенное множество

$[0,1]; \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]; \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right];$ и т.д.

Определение: Множество P полученное таким образом называется Канторовым множеством. Это множество, очевидно, совершенное.

Изучим его структуру:

1. После выбрасывания $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ мы выбросили из $[0,1]$, таким образом, все точки имеющие первый после запятой троичной дроби знак 1.
2. Выбрасывая $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ мы выбросили все троичные у которых второй знак 1. И так далее.

Значит P состоит из всех чисел, которые в троичной записи могут записываться только с помощью 0, 2, т.е. без использования единицы.

Теорема: Множество концов выброшенных интервалов счетно.

Доказательство: очевидно.

Теорема: Мощность Канторова множества равна мощности континуума.