

Функции с ограниченными изменениями §1. Функции с ограниченными изменениями

Определение: Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Выберем разбиение отрезка: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и составим сумму $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$. Если существует $M > 0$ такое, что для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $\sigma_\tau \leq M$, то функция $y = f(x)$ называется функцией с ограниченным изменением, а точная верхняя грань $\sup \sigma_\tau$ называется полным изменением или полной вариацией функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $V_a^b f$.

Примеры:

1. Монотонная на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию. Действительно, пусть $y = f(x)$ не убывает. Тогда

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a). \text{ Значит } V_a^b f = f(b) - f(a)$$

2. $y = f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{x}, x \in (0, 1]; \\ 0, x = 0 \end{cases}; \cos \frac{\pi}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2k}; \cos \frac{\pi}{x} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2k}.$

Теорема: $W^0[a; b]$ – бляхово: $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная $\Rightarrow \{f_n\}_{n=1}^\infty$ – сходится.

Доказательство:

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \text{ — фундаментальная } \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \geq N) (\forall p \in \mathbb{N}): \|f_n - f_{n+p}\| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Пусть } x \in [a; b],$$

$$\tau = \{a, x, b\}. \text{ Тогда}$$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x) - f_n(a) + f_{n+p}(a)| +$$

$$|f_n(b) - f_{n+p}(b) - f_n(x) + f_{n+p}(x)| \leq$$

$$\leq \|f_n - f_{n+p}\| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Это означает, что функциональная}$$

последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится равномерно на $[a; b]$ к некоторой функции $f(x)$.

1. Убедимся, что $f(x) \in W^0[a; b]$.

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1}) - f_n(x_i) + f_n(x_{i-1})| \leq \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f_k(x_i) - f_k(x_{i-1})| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f_k(x_i)| + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i-1}) - f_k(x_{i-1})| \leq V_a^b f_k + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} + \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} = V_a^b f_k + 2, \quad k \geq k_0, \quad V_a^b f_k = \|f_k\| \leq M.\end{aligned}$$

2. Убедимся, что $f_k \rightarrow f$ по норме $\|f - f_k\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(f - f_k) &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f_k(x_i) - f(x_{i-1}) + f_k(x_{i-1})| \leq \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f_{k+p}(x_i) - f(x_{i-1}) + f_{k+p}(x_{i-1})| + \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f_{k+p}(x_i) - f_k(x_i) - f_{k+p}(x_{i-1}) + f_k(x_{i-1})| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2n} + V_a^b(f_{k+p} - f_k) = \frac{\varepsilon}{2} + \|f_k - f_{k+p}\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Теорема: Если функции f и g имеют ограниченные изменения на $[a; b]$, то функции $f + g$ и fg имеют ограниченные изменения на $[a; b]$.

Доказательство: Величина $f + g \in W[a, b]$ уже доказана.

Докажем второе включение.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| &= \\ &= \sum_{i=1}^n |f(x_i)g(x_0) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \leq \\ &= \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| |f(x_i)| + \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| |g(x_{i-1})| \leq M_1 V_a^b g + M_2 V_a^b f\end{aligned}$$

Теорема: Если $|g(x)| > \varepsilon > 0$ для $\forall x \in [a; b]$, $g(x) \in W[a, b]$, то

$$\frac{1}{g(x)} \in W[a, b].$$

$$\text{Доказательство: } \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{g(x_i)} - \frac{1}{g(x_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^n \frac{|g(x_i) - g(x_{i-1})|}{|g(x_i)g(x_{i-1})|} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V_a^b g.$$

Теорема: Если функция $f \in W[a, b]$ и $c \in [a; b]$, то $f \in W[a, c]$, $f \in W[c, b]$ и при этом $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$.

Доказательство: Пусть τ — произвольное разбиение $[a; b]$, $c \in \tau$.

$$\tau_1 = \tau \cap [a; c], \quad \tau_2 = \tau \cap [c; b]. \quad \sigma_1 = \sum_{\tau_1} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

$$\sigma_2 = \sum_{\tau_2} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \text{Тогда } \sigma_\tau = \sigma_{\tau_1} + \sigma_{\tau_2} = \sum_{\tau} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_a^b f,$$

$$\text{отсюда } V_a^c f + V_c^b f \leq V_a^b f.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть τ — произвольное разбиение $[a; b]$. Создадим два других разбиения: τ_1 для $[a; c]$, τ_2 для $[c; d]$. $\tau_1 = (\tau \cap [a; c]) \cup \{c\}$, $\tau_2 = (\tau \cap [c; b]) \cup \{c\}$. Имеем три суммы σ_τ , σ_{τ_1} , σ_{τ_2} . Пусть $c \in (x_{k-1}, x_k)$, тогда

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sigma_{\tau_1} + \sigma_{\tau_2}$$

, т.к. $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|$. Отсюда вытекает $V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f$.

Теорема: $W^0[a; b]$ — нормированное пространство с нормой $\|f\| = V_a^b f$.

Доказательство: Убедимся в выполнении 3-х аксиом:

1. $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $y = f(x) = 0$.
2. $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

1. Вариация f всегда неотрицательна. Пусть $V_a^b f = 0$, $\tau = \{a, x, b\}$, $\sigma_\tau = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(a)| \leq V_a^b f = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = f(a) = 0$.

$$2. \sigma_\tau(\lambda f) = \sum_{i=1}^n |\lambda f(x_i) - \lambda f(x_{i-1})| = |\lambda| \sigma_\tau(f)$$

$$3. \sigma_\tau(f + g) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| \leq \sigma_\tau(f) + \sigma_\tau(g)$$

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b f + V_a^b g.$$

Теорема: пространство $W^0[a; b]$ — полное.