

## Мера Лебега на прямой

### § 1. Длина элементарного множества

Определение: Одноточечное множество, отрезки, интервалы, полуинтервалы и пустое множество будем называть промежутками. Обозначается:  $\emptyset, \langle a, b \rangle$  – промежуток.

Определение: Длиной промежутка  $P = \langle a, b \rangle$  называется число  $m(P) = b - a \geq 0$ , так как в  $\langle a, b \rangle$  всегда  $b \geq a$ . К тому же  $m(\emptyset) = 0$ .

Определение: Множество  $A \subset R$  называется элементарным, если оно представляется в виде объединения конечной совокупности попарно непересекающихся промежутков, то есть

$$A = \bigcup_{k=1}^n P_k, \quad P_i \cap P_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Определение: Длиной элементарного множества называют сумму длин, составляющих промежуток, то есть  $m(A) = \sum_{k=1}^n m(P_k) \geq 0$ .

Утверждение: Длина элементарного множества определена корректно и независима от способа разбиения элементарного множества на промежутки.

Доказательство: Пусть  $A = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigcup_{i=1}^m Q_i$ , тогда  $m(A) = \sum_{k=1}^n m(P_k) \cdot (*)$

При этом  $P_k = \bigcup_{i=1}^m P_{ki}$ , где  $P_{ki} = P_k \cap Q_i$ ,  $P_{ki}$  – попарно не пересекаются, значит

$$m(P_k) = \sum_{i=1}^m m(P_{ki}). \quad \text{Итак, } (*) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m m(P_{ki}) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n m(P_{ki}) = \sum_{i=1}^m m(Q_i).$$

Если найти  $Q_i = \bigcup_{k=1}^n P_{ki}$ , то выполнится (\*).

Теорема: Длина элементарного множества как функция множества, определенная на совокупности всех элементарных множеств является мерой.

Доказательство: Достаточно убедиться в аддитивности множеств (из которых состоит функция множества)

Пусть  $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ ,  $A_1 \dots A_k$  –элементарные множества и

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow m(A) = \sum_{k=1}^n m(A_k).$$

Т.к.  $A_k$  –элементарные, то их можно представить так:  $A_k = \bigcup_{i=1}^{n(k)} P_{ki}$ ,  $P_{ki}$  –попарно не пересекаются.

$$\text{Поэтому } A = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^{n(k)} P_{ki} \Rightarrow m(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n(k)} m(P_{ki}) = \sum_{k=1}^n m(A_k)$$

Аддитивность влечет свойство полуаддитивности.

Прежде чем сформулировать свойство полуаддитивности, сформулируем и докажем следующее свойство:

Совокупность элементарных множеств образует кольцо множеств, то есть объединение, пересечение, разность, симметрическая разность двух элементарных множеств есть снова элементарное множество.

Доказательство: Пусть  $A, B$  –элементарные множества,  $A = \bigcup_{k=1}^n P_k$ ,  $B = \bigcup_{i=1}^m Q_i$ .

Докажем что  $A \cap B$  –есть множество элементарное.

1.  $A \cap B = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^m (P_k \cap Q_i)$  - это проверяется вхождением элемента в левую часть, а

затем в правую часть равенства.

Таким образом,  $A \cap B$  - есть элементарное множество, то есть  $(P_k \cap Q_i)$  попарно не пересекаются. Итак, доказали, что А и В относительно пересечения замкнуто.

2.  $P \supseteq A$ .

Рассмотрим  $P \setminus A = P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k =$  (по закону де Моргана)  $= \bigcap_{k=1}^n (P \setminus P_k)$  - это элементарное

множество, так как  $P \setminus P_k$  - элементарное множество. Итак, доказали замкнутость элементарных множеств относительно объединения.

3.  $A \cup B = P \setminus ((P \setminus A) \cap (P \setminus B))$  (Закон де Моргана),

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B),$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

СВОЙСТВО ПОЛУАДДИТИВНОСТИ.

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k, A_1, \dots, A_k \text{-элементарные множества} \Rightarrow m(A) = \sum_{k=1}^n m(A_k)$$

Доказательство: Рассмотрим  $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ .

Введем  $C_k = A \cap B_k$  тогда из определения следует, что  $A = \bigcup C_k$ . Согласно доказанному свойству  $C_k$  - элементарное множество, значит, в виду аддитивности длины:

$$m(A) = \sum_{k=1}^n m(C_k). A_k = C_k \cup (A_k \setminus C_k), \text{ следовательно}$$

$$m(A_k) = m(C_k) + m(A_k \setminus C_k) \geq m(C_k), \text{ поэтому } m(A) = \sum_{k=1}^n m(C_k) \leq \sum_{k=1}^n m(A_k).$$

§2. Счетная аддитивность длины элементарных множеств.

Утверждение: Пусть  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_1, \dots, A_k$  -элементарные множества,

$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , тогда  $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ . Убедимся, что длина множества обладает

свойством полуаддитивности:  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_1, \dots, A_k$  - элементарные множества. Следовательно

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Доказательство:  $A = \bigcup_{n=1}^N P_n, A_k = \bigcup_{n=1}^{N(k)} P_{kn}$ . Заменим  $P_n$  на отрезок  $\bar{P}_n$ , причем

$$\bar{P}_n \subseteq P_n, m(\bar{P}_n) \geq m(P_n) - \varepsilon / 2N. \text{ Меняем } P_{kn} \text{ на интервал } \tilde{P}_{kn}, \text{ причем}$$

$$\tilde{P}_{kn} \supseteq P_{kn}, m(\tilde{P}_{kn}) \leq m(P_{kn}) + \varepsilon / 2^k 2N(k). \text{ От } A \text{ перешли к компакту } \bar{A} = \bigcup_{n=1}^N \bar{P}_n \subseteq A. \text{ От}$$

$$A_k \text{ перешли к } \tilde{A}_k = \bigcup_{n=1}^{N(k)} \tilde{P}_{kn} \supseteq A_k. \bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k, \text{ по свойствам компакта из любого открытого}$$

покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Следовательно  $\bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^m \tilde{A}_k$ . (\*) По

свойству полуаддитивности длины  $m(\bar{A}) \leq \sum_{k=1}^m m(\tilde{A}_n)$ .

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{n=1}^N m(P_n) \leq \sum_{n=1}^N (m(\bar{P}_n) + \varepsilon / 2N) = \sum_{n=1}^N m(\bar{P}_n) + \varepsilon / 2 = m(\bar{A}) + \varepsilon / 2 \leq no(*) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m m(\tilde{A}_k) + \varepsilon / 2 = \sum_{k=1}^m (\sum_{n=1}^{N(k)} m(\tilde{P}_{kn})) + \varepsilon / 2 \leq \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{N(k)} (m(P_{kn}) + \varepsilon / 2^k 2N(k)) + \varepsilon / 2 = \\ &= \sum_{k=1}^m (\sum_{n=1}^{N(k)} m(P_{kn}) + \varepsilon / 2^k 2) + \varepsilon / 2 = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{N(k)} m(P_{kn}) + \sum_{k=1}^m \varepsilon / 2^k 2 + \varepsilon / 2 = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{N(k)} m(P_{kn}) + \\ &+ \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Счетная полуаддитивность множеств доказана в силу произвольности  $\varepsilon$ .

Докажем теперь, что длина множеств обладает счетной аддитивностью.

Пусть  $A_1, A_k$  - элементарные множества,  $A_k$  - попарно не пересекаются.  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  нужно

показать, что  $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ . Заменяем  $A \supseteq \bigcup_{k=1}^N A_k, m(A) \geq m(\bigcup_{k=1}^N A_k) = \sum_{k=1}^N m(A_k)$ .

Устремляем  $N \rightarrow \infty$ , получим  $m(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ . Обратное неравенство есть следствие счетной аддитивности.

### §3 Внутренняя и внешняя меры Лебега.

Определение: Выделим произвольный промежуток и зафиксируем его  $E \langle a, b \rangle, \beta(E)$ .

Пусть  $A \in \beta(E)$ , (или  $A \subseteq E$ ), внешней мерой Лебега множества  $A$  называется число  $\mu^*(A) = \inf \sum_k m(P_k)$ , где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества  $A$

конечными или счетными совокупностями промежутка.

Пример: Рассмотрим в качестве  $A = Q \cap E$ . Вычислить внешнюю меру.

Пусть  $E = [0, 1]$ .  $Q$ -счетное, следовательно  $A$ -счетное. Значит можем записать в виде:

$A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Точке  $a_1$  ставим в соответствие интервал:  $p_1 = (a_1 - \varepsilon / 2, a_1 + \varepsilon / 2)$ ,

длина  $m(p_1) = \varepsilon$ ,

$a_2$  ставим в соответствие интервал:  $p_2 = (a_2 - \varepsilon / 4, a_2 + \varepsilon / 4)$ ,

длина  $m(p_2) = \varepsilon / 2$ ,

.....

$a_k$  ставим а соответствие интервал:  $p_k = (a_k - \varepsilon / 2^k, a_k + \varepsilon / 2^k)$ ,

длина  $m(p_k) = \varepsilon / 2^{k-1}$ .

Совокупность интервалов  $p_1, p_2, \dots$ , образует покрытие множества  $A$ . Подсчитаем

длину этого покрытия.  $\sum_{k=1}^{\infty} m(p_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon / 2^{k-1} = 2\varepsilon$ . Так как  $\varepsilon$  выбрано произвольно, то

отсюда следует вывод, что  $\mu^*(A) = \mu^*([0, 1] \cap Q) = 0$ .

Определение: Внутренней мерой Лебега множества  $A \subseteq E$  называется число

$$\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A).$$

Рассмотрим некоторые свойства :

1. Если множество  $A \subseteq E$  является элементарным, то  $\mu^*(A) = m(A)$ .

Доказательство: Так как  $A$ -элементарное, то  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$  – объединение попарно не пересекающихся промежутков.  $\{P_k\}$ -покрытие  $A$ . По определению внешней меры множества  $A$ ,  $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) = m(A)$ , таким образом получили что  $\mu^*(A) \leq m(A)$ . Длина множества  $A$  обладает свойством счетной полуаддитивности. Значит для  $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$  - любого покрытия множества  $A$  (то есть  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ ) в силу счетной полуаддитивности длины будет выполняться неравенство:  $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i)$ . Это условие выполняется для любого покрытия множества  $A$ . Следовательно  $m(A) \leq \mu^*(A), m(A) = \mu^*(A)$ .

2. (Счетная полуаддитивность внешней меры). Если  $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, где A_1, \dots, A_k \in \beta(E)$ , то

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Доказательство: На основании определения верхней меры множества  $A_k$ , найдется покрытие множества  $A_k : \{P_{ki}\}_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} m(P_{ki}) \leq \mu^*(A_k) + \varepsilon / 2^k$ . Совокупность промежутков  $\{P_{ki}\}_{k,i=1}^{\infty}$  образует покрытие множества  $A$ . То есть

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{ki} . \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(P_{ki}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu^*(A_k) + \varepsilon / 2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon .$$

В силу произвольности выбора  $\varepsilon$ , получим что  $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ .

3. Если множество  $A \subseteq E$  является элементарным, то  $\mu^*(A) = m(A)$ .

Доказательство:  $A$ -элементарное, следовательно  $E \setminus A$  - элементарное, по первому свойству можем записать:  $\mu^*(E \setminus A) = m(E \setminus A)$ .  $E = A \cup (E \setminus A)$  на основании аддитивности длины:  $m(E) = m(A) + m(E \setminus A)$ ,

следовательно  $m(A) = m(E) - m(E \setminus A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A) = \mu_*(A)$ .

4. (Изотонность внутренней меры).

Если  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E$ , то  $\mu_*(A_1) \leq \mu_*(A_2)$ .

Доказательство: Если  $A_1 \subseteq A_2$ , то  $(E \setminus A_1) \supseteq (E \setminus A_2)$ . Воспользуемся полуаддитивностью внешней меры, получим

$$\mu^*(E \setminus A_1) \geq \mu^*(E \setminus A_2) \Rightarrow -\mu^*(E \setminus A_1) \leq -\mu^*(E \setminus A_2) \Rightarrow m(E) - \mu^*(E \setminus A_1) \leq m(E) - \mu^*(E \setminus A_2) \Rightarrow \mu_*(A_1) \leq \mu_*(A_2).$$

5. Если  $A \subseteq E$ , то выполняется  $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq b - a$  (длина множества  $E$ ).

Доказательство: 1).  $(E \setminus A) \subseteq E$ . В силу изотонности внешней меры:

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E) = m(E) \Rightarrow m(E) - \mu^*(E \setminus A) \geq 0 \Rightarrow \mu_*(A) \geq 0.$$

2).  $E = A \cup (E \setminus A)$  используя полуаддитивность внешней меры, получим:

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) \Rightarrow m(E) - \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(A) \Rightarrow \mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

3).  $A \subseteq E$ , в силу полуаддитивности:  $A \subseteq E \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(E) = m(E) = b - a$ .

Определение: множество  $A \subseteq E$  называется измеримым по Лебегу, если  $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$ . Из доказанного ранее следует, что все элементы множества измеримы по Лебегу. Если множество измеримо по Лебегу, то число  $\mu(A)$  называется мерой Лебега множества  $A$ . Таким образом мера Лебега – это функция множества, определенная на совокупности всех измеримых по Лебегу множеств.

Для элементарных множеств мера Лебега совпадает с длиной множества. Убедимся, что множества, измеримые по Жордану, измеримы и по Лебегу и их меры Жордано совпадают с мерой Лебега.

Разобьем прямую  $\mathbf{R}$  точками вида:  $k/2^n$ , где  $n$  – натуральное число – ранг разбиения,  $k \in \mathbf{Z}$ . Так прямая разбивается на отрезки. Выберем множество  $A \subseteq E, S_n$  – внутренняя “ступенчатая” фигура;  $S_n$  – внешняя “ступенчатая” фигура. Согласно определению, нижняя мера Жордано множества  $A$ :  $m_*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(s_n) = \sup_n m(s_n)$ , а верхняя:

$$m^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(S_n) = \inf_n m(S_n).$$

Теорема: Для любого множества  $A \subseteq E$  справедливы неравенства:  
 $m_*(A) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq m^*(A)$ .

Доказательство: Множество  $s_n \subseteq A$  (по построению), изотонность внутренней меры Лебега позволяет сделать вывод: так как  $s_n$  – элементарное,

$\mu_*(s_n) \leq \mu_*(A) \Rightarrow m(s_n) \leq \mu_*(A)$  отсюда следует выполнение доказываемого неравенства:  
 $m_*(A) \leq \mu_*(A)$ .

$A \subseteq S_n$ , аналогично по изотонности,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(S_n) \Rightarrow \mu^*(A) \leq m(S_n)$ . Это верно для любого  $n$ , отсюда следует выполнение неравенства:  $\mu^*(A) \leq m^*(A)$ . Из этого предложения вытекает, что всякое множество, измеримое по Жордану, будет измеримо по Лебегу.

Пример: Множество, измеримое по Лебегу, но не измеримое по Жордану.  
 $A = Q \setminus E, \mu^*(A) = 0, \mu_*(A) = 0. \mu^*(A) = \mu_*(A) \Rightarrow A$  – измеримо по Лебегу, его мера Лебега равна 0. Так как  $\text{int } A = \emptyset$ , то  $s_n = \emptyset$ .  $m(s_n) = m(\emptyset) = 0$ ,  $m_*(A) = 0$ , замыкание  $\overline{A} = \overline{E}$   $S_n \supseteq \overline{E}$ ,  $m(S_n) \geq b - a \Rightarrow m^*(A) \geq b - a \neq 0$ . Таким образом,  $A$  – неизмеримо по Жордану.