

§ 3. Функции ограниченной вариации и монотонные функции

Теорема: Для того чтобы $f \in W[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $y = f(x)$ могла быть представлена в виде разности двух неубывающих функций.

Доказательство: (необходимость) Пусть $f \in W[a, b]$. Обозначим $\pi(x)$ функцию $V_a^x f$, а $g(x)$ функцию $\pi(x) - f(x)$. Ясно, что $f(x) = \pi(x) - g(x)$. Покажем, что функции $\pi(x)$ и $g(x)$ неубывающие.

1. $\pi(x + \delta) = \pi(x) + V_x^{x+\delta} f \geq \pi(x)$, значит $\pi(x)$ неубывает.
2. $g(x + \delta) = \pi(x + \delta) - f(x + \delta) = \pi(x) + V_x^{x+\delta} f - f(x) - (f(x) - f(x + \delta))$
 $\geq g(x) + f(x + \delta) - f(x) = g(x)$, значит $g(x)$ неубывает.

(достаточность) Пусть $f(x) = \pi(x) - g(x)$, где $\pi(x)$ и $g(x)$ неубывают, значит $\pi(x), \pi(x) \in W[a, b]$ по свойствам функций с ограниченными изменениями $\pi(x) - (-g(x)) \in W[a, b]$.

Теорема: Множество точек разрыва функции из $W[a, b]$ не более чем счетно.

Доказательство: Достаточно показать, что множество точек разрыва линейной функции не более чем счетно. Пусть $y = f(x)$ не убывает на $[a, b]$. Пусть x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$. Обозначим $f(x_0 - 0)$ число $f(a)$, если $x_0 = a$ и число $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (которое существует по теореме о пределах монотонной функции), если $x_0 \neq a$, а $f(x_0 + 0)$ обозначим $f(b)$, если $x_0 = b$ и $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, если $x \neq b$. Число $h_0 = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции в точке x_0 . Пусть X_1 – множество точек разрыва со скачком равным

1, X_2 – множество точек разрыва со скачком равным $\frac{1}{2}$ и т.д. Ясно, что

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Каждое из множеств X_k является конечным, значит множество X не более чем счетно.

Теорема: Всякая функция с ограниченным изменением интегрируема по Риману.

§ 4. Геометрический смысл функции с ограниченным изменением

Определение: Пусть $y = f(x)$ – непрерывна, $x \in [a, b]$, $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Рассмотрим ломанную $A_0 \dots A_n$,

$$p_\tau = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Если существует конечный предел

$$\lim p_\tau = p,$$

то дуга $AB = A_0 A_n$ называется спрямляемой.

Определение: (на языке « $\varepsilon - \delta$ »):

$$(p = \lim p_\tau) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \tau : \delta_\tau < \delta) : |p - p_\tau| < \varepsilon.$$

Свойства p_τ :

1. если $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то $p_{\tau_1} \leq p_{\tau_2}$

Доказательство: Достаточно рассмотреть случай, когда τ_2 получено из τ_1 путем добавления единственной точки и притом на одном слагаемом из суммы, но это является очевидным следствием неравенства треугольника в R^2 .

2. если $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то $p_{\tau_2} \leq p_{\tau_1} + 2k(\delta_{\tau_1} + \omega_{\tau_1})$, где δ_{τ_1} — ранг разбиения τ_1 , $\omega_{\tau_1} = \max w_i$, w_i — колебание функции на отрезках разбиения τ_1 , k — число новых точек в разбиении τ_2 по отношению к разбиению τ_1 .

Доказательство:

$$\begin{aligned} p_{\tau_2} - p_{\tau_1} &= \sqrt{(x_i - c)^2 + (f(x_i) - f(c))^2} + \sqrt{(c - x_{i-1})^2 + (f(c) - f(x_{i-1}))^2} - \\ &\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \leq |x_i - c| + |f(x_i) - f(c)| + |c - x_{i-1}| + |f(c) - f(x_{i-1})| \\ &\leq 2|x_i - x_{i-1}| + 2w_i \leq 2(\delta_{\tau_1} + w_{\tau_1}). \text{ Здесь мы воспользовались неравенством} \\ &\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

Теорема: (критерий спрямляемости) Дуга AB спрямляема тогда и только тогда, когда $\{p_\tau\}$ ограничена сверху, при этом $p = \sup_\tau \{p_\tau\}$.

Доказательство: (необходимость)

$\exists \lim_{\delta_\tau} p_\tau = p \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \tau: \delta_\tau < \delta): |p - p_\tau| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть τ —

произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и добавим к нему точки так, чтобы у вновь полученного разбиения τ_1 ранг разбиения δ_{τ_1} был бы меньше δ . Тогда $p_\tau \leq p_{\tau_1} < p + \varepsilon$, т.е. множество $\{p_\tau\}$ ограничено числом p . Ясно, что $p = \sup_\tau \{p_\tau\}$.

(достаточность) пусть $s = \sup_\tau \{p_\tau\}$. Покажем, что $\exists \lim_{\delta_\tau} p_\tau = p$ и

$p = s$ Выберем $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \tau^*: s \geq p_{\tau^*} \geq s - \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $y = f(x)$ — равномерно непрерывна на $[a, b]$, следовательно $(\exists \delta_1 > 0) (\forall x', x'': |x' - x''| < \delta_1)$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{8k}$, где k — число точек разбиения τ^* . Выберем

$\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{8k} \right\}$ и рассмотрим разбиение $\tau: \delta_\tau < \delta$. Тогда для разбиения

$\bar{\tau} = \tau \cup \tau^*$ имеем $p_{\bar{\tau}} \leq p_\tau + 2k(\delta_\tau + \omega_\tau) \leq p_\tau + 2k \left(\frac{\varepsilon}{8k} + \frac{\varepsilon}{8k} \right) = p_\tau + \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно

$$s \geq p_\tau \geq p_{\bar{\tau}} - \frac{\varepsilon}{2} \geq s - \varepsilon$$

Следствие: Дуга AB спрямляема тогда и только тогда, когда $y = f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$.

Доказательство: (необходимость) Так как $\forall \tau$ выполняются неравенства $\sigma_\tau \leq p_\tau \leq p$, то необходимость доказана.

(достаточность) С другой стороны

$$p_\tau \leq \sum_{i=1}^n \left\{ |x_i - x_{i-1}| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\} = b - a + \sigma_\tau \leq b - a + V_a^b f.$$