

§5. Теорема Кантора—Бернштейна

Теорема: если существует биекция f множества A на множество $B_0 \subseteq B$ и биекция g множества B на множество $A_0 \subseteq A$, то $A \sim B$.

Доказательство:

Выберем $x \in A$ и составим последовательность $\{x_n\}$ поэлементно: $x_0 = x$, $x_1 = g^{-1}(x_0) \in B$, $x_2 = f^{-1}(x_1) \in A$ и т.д. Последовательность $\{x_n\}$ может состоять из конечного числа элементов или из бесконечного.

Число элементов в последовательности $\{x_n\}$ называется порядком элемента $x \in A$. Разобьем множество A на три подмножества: A_1 , A_2 , A_∞ где A_1 — совокупность всех элементов из A нечетного порядка, A_2 — совокупность всех элементов из A четного порядка, A_∞ — совокупность всех элементов из A бесконечного порядка. Аналогично разбиваем множество B на B_1, B_2, B_∞ . Оказывается $f(A_2) = B_1$, $f(A_\infty) = B_\infty$, $g(B_2) = A_1 \Leftrightarrow g^{-1}(A_1) = B_2$.

$$F(x) = \begin{cases} g^{-1}(x), x \in A_1 \subseteq A_0 \\ f(x), x \in A_2 \\ f(x), x \in A_\infty \end{cases} \quad \text{есть биекция } A \text{ на } B.$$

Следствие: $[0,1]^2 \sim [0,1]$, т.е. $m([0,1]^2) = m(R) = \aleph$.

§6. Сравнение мощностей

Для мощностей конечных множеств имеют место понятия «больше» и «меньше». Распространим эти понятия и на бесконечные множества.

Пусть A и B — два произвольных множества, $m(A)$ и $m(B)$ — их мощности. Логически возможны 4 ситуации:

1. $A \sim B_1 \subseteq B$, $B \sim A_1 \subseteq A$;
2. $A \sim B_1 \subseteq B$, $\overline{B \sim A_1 \subseteq A}$ (т.е. множество A эквивалентно части множества B , но во множестве A нет части эквивалентной множеству B);
3. $\overline{A \sim B_1 \subseteq B}$, $B \sim A_1 \subseteq A$;
4. $\overline{A \sim B_1 \subseteq B}$, $\overline{B \sim A_1 \subseteq A}$.

По теореме Кантора—Бернштейна в первом случае естественно $m(A) = m(B)$. Во втором случае принято говорить, что $m(A) > m(B)$, в третьем — $m(A) < m(B)$. В четвертом случае следовало бы считать, что множества A и B не сравнимы по мощности. Однако этот случай оказывается невозможен, т.е. справедлива теорема.

Теорема: любые два множества A и B либо эквивалентны и тогда, $m(A) = m(B)$, либо $m(A) < m(B)$, либо $m(A) > m(B)$. Другими словами — любые два множества сравнимы по мощности.

Доказать эту теорему можно основываясь на теорему Цермела, которая утверждает, что любое множество может быть вполне упорядоченно (теорема Цермела эквивалентна аксиоме выбора).

Теорема 1: если A и B — произвольные множества, то соотношения $m(A) = m(B)$, $m(A) < m(B)$ и $m(A) > m(B)$ несовместимы.

Доказательство: Отношение $m(A) = m(B)$ исключает отношения $m(A) < m(B)$ и $m(A) > m(B)$.

Убедимся, что $m(A) < m(B)$ и $m(A) > m(B)$ тоже несовместимы: допустим, что и то, и другое отношения выполняются для множеств A и B . Таким образом, $A \sim B_1 \subseteq B$, $A \not\sim B$ и $B \sim A_1 \subseteq A$, $A \not\sim B$. Но по теореме Кантора–Бернштейна $A \sim B$. Пришли к противоречию, которое доказывает несовместимость отношений «меньше» и «больше».

Теорема 2: если $m(A) < m(B)$ и $m(B) < m(C)$, то $m(A) < m(C)$.

Доказательство: $m(A) < m(B) < m(C) \Rightarrow A \sim B_1 \subseteq B$, $B \sim C_1 \subseteq C \Rightarrow A \sim C_2 \subseteq C$. Допустим, что $C \sim A_1 \subseteq A \Rightarrow C \sim A$, т.е. $B \sim A_1 \subseteq A \Rightarrow B \sim A$, т.е. $m(B) = m(A)$, что противоречит $m(A) < m(B)$.

§7. Булеан множеств

Остается открытым вопрос существования мощностей сколь угодно больших. Рассмотрение этого вопроса начнем с конечных множеств.

Определение Множество всех подмножеств данного множества A называется булеаном множества A и обозначается $\beta(A)$.

Примеры:

1. $A_1 = \{a\}$, следовательно $\beta(A_1) = \{\{a\}, \{\emptyset\}\}$ и $m(\beta(A_1)) = 2^1$.
2. $A_2 = \{a, b\}$, следовательно $\beta(A_2) = \{\{a\}, \{\emptyset\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ и $m(\beta(A_2)) = 2m(\beta(A_1)) = 4 = 2^2$.
3. $m(\beta(A \cup \{b\})) = 2m(\beta(A))$, где A — конечное множество, $b \notin A$. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, тогда $m(\beta(A)) = 2^n$. Если A — бесконечное множество, то $m(\beta(A))$ обозначают как $2^{m(A)}$.

Теорема: $2^{m(A)} > m(A)$, т.е. мощность булеана множества A больше мощности самого множества A .

Доказательство: Так как $\beta(A)$ содержит часть эквивалентную множеству A (эта часть состоит из одноэлементных множеств), то либо $2^{m(A)} > m(A)$ либо $2^{m(A)} = m(A)$. Остается показать, что последнее невозможно. Предположим противное. Пусть $\beta(A) \sim A$. Установим взаимно однозначное соответствие: $x \leftrightarrow X$, $y \leftrightarrow Y$, $z \leftrightarrow Z$, ... Обозначим через M множество всех элементов из A не входящих в множества, которые соответствуют. Так как $M \subseteq A$, то $\exists m \in A$: $m \leftrightarrow M$.

Возможны две ситуации:

- 1). $m \in M$, но тогда по определению $M \quad m \leftrightarrow M$;
- 2). $m \notin M$, но тогда $m \in M$.

Это противоречие и доказывает теорему.

§8. Булеан множества натуральных чисел

Теорема: $2^{\aleph_0} = \aleph$. Мощность булеана $\beta(N)$ равна мощности континуума.

Доказательство: Разобьем $\beta(N)$ на 2 подмножества S и T , где S состоит из подмножеств N с конечным дополнением; T состоит из подмножеств N с бесконечным дополнением.

- 1). Множество S счетное, т.к. эквивалентно подмножеству множества с натуральными коэффициентами.
- 2). Покажем, что T имеет мощность континуума. Каждому элементу $X \in T$ ($X \subseteq N$) ставим в соответствие бесконечную двоичную дробь $x = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$, где $\varepsilon_k = 1$, если $k \in X$ и $\varepsilon_k = 0$, если $k \notin X$. Например множеству $X = \{1, 3, 5\}$ соответствует дробь 0,10101 (в десятичной записи это число $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = 0,65625$).

Множество всех этих дробей охватывает полуинтервал $[0,1)$. Значит $T \sim [0,1) \sim R$. Так как $\beta(N) = S \cup T$, то по свойствам счетных множеств $\beta(N) \sim R$.

Теорема: множество всех последовательностей натуральных чисел эквивалентно множеству действительных чисел.

Доказательство: Последовательности n_1, n_2, \dots ставим в соответствие последовательность $n_1, n_1 + n_2, n_1 + n_2 + n_3, \dots$. Это соответствие взаимно однозначно отображает множество всех последовательностей натуральных чисел на множество всех возрастающих последовательностей. Обозначим последнее множество M . Оно эквивалентно части $\beta(N)$. С другой стороны $\beta(N) \sim T$. Но T эквивалентно части N . По теореме Кантора–Бернштейна $M \sim \beta(N) \sim R$.