

Метрические пространства

§1 Определение метрического пространства

Математическое пространство – одно из важнейших понятий современной математики, представляющее собой упорядоченную пару, первый элемент которой – некоторое множество, второй – структура, наведенная в этом множестве (топология, отношение порядка, бинарная операция и т.п.). *Метрическое пространство* $R := (R, \rho)$ – множество R с заданной в нем метрикой ρ .

Определение. Метрикой в множестве R называется неотрицательная действительная функция $\rho = \rho(x, y)$, определенная на декартовом произведении $R \times R$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Элементы метрического пространства обычно называют *точками*. Значение метрики $\rho(x, y)$ принято называть *расстоянием* между точками x и y .

Примеры метрических пространств

Рассмотрим примеры часто используемых метрических пространств. Проверка выполнения аксиом метрики будет осуществлена позднее.

1. Произвольное множество M в метрическом пространстве $R := (R, \rho(x, y))$ само является метрическим пространством с индуцированной метрикой $\rho|_{M \times M}$. Это метрическое пространство принято называть *подпространством* метрического пространства R .

2. Пространство \mathbf{R}^n (n -мерное арифметическое пространство) – декартова степень множества действительных чисел с евклидовой метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

3. Пространство \mathbf{R}_∞^n – декартова степень множества действительных чисел с *sup-метрикой*

$$\rho(x, y) = \sup \{ |x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n| \}.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

4. Пространство $C[a, b]$ (*пространство непрерывных функций*) – множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с *sup-метрикой*

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$.

5. Пространство $C_2[a, b]$ – множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с *квадратичной метрикой*

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$.

У п р а ж н е н и е . Попробуйте самостоятельно убедиться в выполнении аксиом метрики в пространствах \mathbf{R}^n , \mathbf{R}_∞^n , $C[a, b]$, $C_2[a, b]$.

§2. Внутренность, замыкание и граница множества

Пусть R - метрическое пространство, $x_0 \in R$. Множество

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in R : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}, \varepsilon > 0,$$

называется *открытым шаром* с центром в точке x_0 радиуса ε , или просто, ε -*окрестностью* точки x_0 . Множество

$$U_\varepsilon[x_0] := \{x \in R : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon\}, \varepsilon \geq 0,$$

называется *замкнутым шаром* с центром в точке x_0 радиуса ε . Открытый шар $U \subseteq R$, произвольного радиуса с произвольным центром, содержащий точку x_0 , называется *окрестностью* точки x_0 и обозначается $U(x)$.

У п р а ж н е н и е . Если $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $U_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq U_{\varepsilon_1}[x_0] \subseteq U_{\varepsilon_2}(x_0) \subseteq U_{\varepsilon_2}[x_0]$. Построить пример метрического пространства, в котором существует замкнутый шар, вложенный в открытый шар меньшего радиуса.

Точка x называется точкой *прикосновения* множества $M \subseteq R$, если всякая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку из M . Точка x называется *предельной* точкой множества M , если всякая ее окрестность содержит бесконечное множество точек из M . Точка $x \in M$ называется *изолированной* точкой множества M , если найдется окрестность этой точки, не содержащая точек из M , отличных от x .

Предельные и изолированные точки множества M являются точками прикосновения этого множества. Верно и обратное.

Теорема. *Всякая точка прикосновения множества M является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть x - точка прикосновения множества M . Возможны две ситуации:

1) существует окрестность точки x , в которой нет точек из M , отличных от x ;

2) любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M , отличную от x .

В первом случае точка x является изолированной точкой множества M . Покажем, что во втором случае точка x является предельной точкой множества M . Пусть $U_\varepsilon(x)$ - произвольная ε -окрестность точки x . Нужно показать, что окрестность она содержит бесконечное множество точек из M . Допустим, что $U_\varepsilon(x)$ содержит лишь конечное множество $\{y_1, \dots, y_n\}$ точек из M , отличных от x . Положим $\delta = \min\{\rho(x, y_1), \dots, \rho(x, y_n)\} > 0$ и рассмотрим δ -окрестность $U_\delta(x)$ точки x . По предположению любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M , отличную от x , значит, существует точка $y \neq x$, принадлежащая пересечению $M \cap U_\delta(x)$. При этом $\rho(x, y_i) \leq \rho(x, y) + \rho(y, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Значит, $\rho(y, y_i) \geq \rho(x, y_i) - \rho(x, y) \geq \delta - \rho(x, y) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Отсюда вытекает, что $y \notin \{y_1, \dots, y_n\}$. С другой стороны, $\delta \leq \rho(x, y_1) < \varepsilon$. Следовательно, $\rho(x, y) < \delta < \varepsilon$, то есть $y \in U_\varepsilon(x)$. Это противоречит предположению, что пересечение $(M \setminus \{x\}) \cap U_\varepsilon(x)$ совпадает с множеством $\{y_1, \dots, y_n\}$ ■

Операция *замыкания* множества $M \subseteq R$ заключается в присоединении к этому множеству всех его точек прикосновения. Результат операции замыкания множества M обозначается \overline{M} . Точка x называется *внутренней* точкой множества M , если существует окрестность этой точки, вложенная в M . Совокупность всех внутренних точек множества M называется *внутренностью* множества M и обозначается $\text{int } M$. Точка $x \in R$ называется *граничной* точкой множества M , если любая окрестность этой точки пересекается с M и с его дополнением $R \setminus M$. Совокупность всех граничных точек называется *границей* множества

M и обозначается ∂M . Легко видеть, что для всякого множества $M \subseteq R$ выполняется соотношение $\partial M = \partial(R \setminus M)$.

У п р а ж н е н и е . 1. Доказать, что для любого множества M в метрическом пространстве R справедливы соотношения: $\overline{M} = M \cup \partial M$, $\text{int } M = M \setminus \partial M$.

2. Убедиться в выполнимости следующих свойств операции замыкания:

1) $M \subseteq \overline{M}$;

2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;

3) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \overline{M_1} \subseteq \overline{M_2}$;

4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

§3. Открытые и замкнутые множества

Определение. Множество в метрическом пространстве называется открытым, если оно состоит лишь из внутренних точек. Множество в метрическом пространстве называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Все метрическое пространство R и пустое множество \emptyset являются открытыми и замкнутыми множествами, одновременно. Такие множества принято называть открыто-замкнутыми. Попробуйте построить пример метрического пространства, в котором есть и другие (т.е. собственные) открыто-замкнутые подмножества.

У п р а ж н е н и е . 1. Доказать, что множество G в метрическом пространстве R открыто тогда и только тогда, когда $G \cap \partial G = \emptyset$.

2. Доказать, что множество F в метрическом пространстве R замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial F \subseteq F$.

Теорема. Множество G в метрическом пространстве R открыто тогда и только тогда, когда множество $F = R \setminus G$ замкнуто.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $G \subseteq R$ – открытое множество. Тогда $G \cap \partial G = \emptyset$. Следовательно, $\partial F = \partial G \subseteq R \setminus G = F$, т.е. F – замкнуто. Обратно, пусть $F \subseteq R$ – замкнутое множество. Тогда $\partial G = \partial F \subseteq F = R \setminus G$. Следовательно, $G \cap \partial G = \emptyset$, т.е. G – открыто. ■

Примеры

Множество $U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$, является открытым. Действительно, пусть $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Покажем, что x является внутренней точкой множества $U_\varepsilon(x_0)$. Обозначим $\delta = \varepsilon - \rho(x, x_0)$ и рассмотрим δ -окрестность $U_\delta(x)$ точки x . Нам достаточно показать, что $U_\delta(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$. Пусть $y \in U_\delta(x)$. По аксиоме треугольника $\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \delta + \rho(x, x_0) = \varepsilon$. Следовательно, $y \in U_\varepsilon(x_0)$, т.е. $U_\delta(x) \subseteq U_\varepsilon(x_0)$.

Множество $U_\varepsilon[x_0]$, $\varepsilon \geq 0$, является замкнутым. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что множество $R \setminus U_\varepsilon[x_0]$ является открытым. Пусть $x \in R \setminus U_\varepsilon[x_0]$. Покажем, что x является внутренней точкой этого множества. Обозначим $\delta = \rho(x, x_0) - \varepsilon$ и рассмотрим δ -окрестность $U_\delta(x)$ точки x . Убедимся, что $U_\delta(x) \subseteq R \setminus U_\varepsilon[x_0]$. Пусть $y \in U_\delta(x)$. По аксиоме треугольника $\rho(y, x_0) \geq \rho(x, x_0) - \rho(x, y) > \rho(x, x_0) - \delta = \varepsilon$. Следовательно, $y \in R \setminus U_\varepsilon[x_0]$, т.е. $U_\delta(x) \subseteq R \setminus U_\varepsilon[x_0]$.

У п р а ж н е н и е . Пусть X – метрическое пространство, M – его подпространство. Доказать, что множество $m \subseteq M$ является открытым (замкнутым) в M тогда и только тогда, когда существует открытое (замкнутое) в X множество m_0 такое, что $m = m_0 \cap M$.

§4. Свойства открытых и замкнутых множеств

Теорема. Объединение любой совокупности открытых множеств открыто.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $G_\alpha, \alpha \in A$, - открытые множества. Покажем, что множество $G := \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ является открытым. Пусть $x \in G$. Значит, найдется $\alpha \in A$ такое, что $x \in G_\alpha$. Множество G_α является открытым. Следовательно, найдется окрестность $U(x)$ точки x , удовлетворяющая условию $U(x) \subseteq G_\alpha \subseteq G$. Это означает, что множество G является открытым ■

Теорема. Пересечение конечной совокупности открытых множеств открыто.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть G_1, \dots, G_k - открытые множества. Покажем, что их пересечение $G := G_1 \cap \dots \cap G_k$ открыто. Пусть $x \in G$. Следовательно, $x \in G_n, n = 1, \dots, k$. Так как множества G_n открыты, то найдутся $\varepsilon_n > 0, n = 1, \dots, k$, такие, что $U_{\varepsilon_n}(x) \subseteq G_n, n = 1, \dots, k$. Выберем $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$. Легко видеть, что $U_\varepsilon(x) \subseteq G_n, n = 1, \dots, k$. Значит, $U_\varepsilon(x) \subseteq G$. Это означает, что точка x является внутренней для множества G , т.е. G - открытое множество ■

У п р а ж н е н и е . 1. Убедиться, что для произвольной совокупности $G_\alpha, \alpha \in A$, подмножеств множества R выполняется теоретико-множественный принцип двойственности:

$$R \setminus \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (R \setminus G_\alpha), \quad R \setminus \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (R \setminus G_\alpha).$$

2. Привести пример бесконечной совокупности открытых множеств в \mathbf{R}^n , пересечение которых замкнуто.

Теорема. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $F_\alpha, \alpha \in A$, - замкнутые множества. Покажем, что их пересечение $F := \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ замкнуто. Достаточно показать, что множество $R \setminus F$ открыто. В силу известного принципа двойственности $R \setminus F = R \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (R \setminus F_\alpha)$. Осталось учесть, что множества $R \setminus F_\alpha, \alpha \in A$, являются открытыми ■

Теорема. Объединение конечной совокупности замкнутых множеств замкнуто.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть F_1, \dots, F_k - замкнутые множества. Покажем, что их объединение $F := F_1 \cup \dots \cup F_k$ замкнуто. Достаточно показать, что множество $R \setminus F$ открыто. В силу принципа двойственности $R \setminus F = R \setminus F_1 \cap \dots \cap R \setminus F_k = (R \setminus F_1) \cap \dots \cap (R \setminus F_k)$. Осталось учесть, что множества $R \setminus F_1, \dots, R \setminus F_k$ являются открытыми ■