

Элементарные функции комплексной переменной

1. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $z \rightarrow az + b$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Эта функция определена на всей комплексной плоскости и имеет в произвольной точке $z_0 \in \mathbb{C}$ производную $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a\Delta z}{\Delta z} = a \neq 0$. Это значит, что линейная функция является целой. С другой стороны линейная функция является взаимно однозначной. Обратная функция $w \rightarrow \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$ тоже является линейной функцией и, следовательно, определенной на всей комплексной плоскости. Таким образом, всякая линейная функция осуществляет взаимно однозначное конформное отображение комплексной плоскости на себя.

При $a = 1$, $b = x_0 + iy_0$ имеем $az + b = x + iy + x_0 + iy_0 = x + x_0 + i(y + y_0)$. Значит, в этом случае линейная функция осуществляет параллельный перенос на вектор (x_0, y_0)

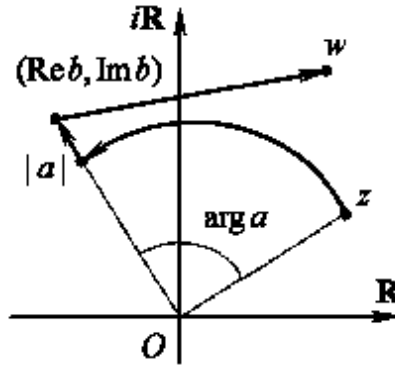
$$\begin{cases} u = x + x_0 \\ v = y + y_0 \end{cases}$$

При $a = e^{i\varphi}$, $b = 0$ имеем $az + b = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(x + iy) = x \cos \varphi - y \sin \varphi + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi)$. Значит, линейная функция осуществляет поворот вокруг начала на угол φ

$$\begin{cases} u = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ v = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

При $a > 0$, $b = 0$ имеем $az + b = a(x + iy) = ax + iay$. Значит, линейная функция осуществляет гомотетию с центром в начале и коэффициентом гомотетии a

$$\begin{cases} u = ax \\ v = ay \end{cases}$$



В общем случае $az + b = |a|e^{i \arg a} z + b$. Таким образом, линейная функция осуществляет последовательно поворот плоскости на угол $\arg a$, гомотетию с центром в начале и коэффициентом гомотетии $|a|$ и последующий параллельный перенос на вектор $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$.

2. Дробно-линейная функция

Дробно-линейной функцией называется функция $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, где $\Delta = ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. Эта функция определена всюду в \mathbb{C} кроме точки $z_0 := -\frac{d}{c}$. Обратная функция $w \rightarrow \frac{dw-b}{-cw+a}$ тоже является дробно-линейной. Она определена в области $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$, где $w_0 := \frac{a}{c}$. Дробно-линейная функция имеет отличную от нуля производную $\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2}$ в каждой точке области определения. Значит, эта функция является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ и осуществляет ее конформное отображение на область $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$.

Дробно-линейную функцию часто рассматривают как отображение из $\bar{\mathbb{C}}$ в $\bar{\mathbb{C}}$. При этом ее значение в точке z_0 считают равным ∞ . Обратная функция тоже определена всюду на $\bar{\mathbb{C}}$. Она равна ∞ в точке w_0 . Таким образом дробно-линейная функция осуществляет взаимно однозначное отображение $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$. Это отображение является непрерывным. Действительно, непрерывность этого отображения в точке z_0 вытекает из соотношения $a(-\frac{d}{c}) + b = -\frac{1}{c}\Delta \neq 0$, в силу которого обобщенный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{az+b}{cz+d}$ равен ∞ .

Производная $-\frac{\Delta}{(dz+c)^2}$ композиции $\frac{b\frac{1}{z}+a}{d\frac{1}{z}+c}$ в точке $z = 0$ отлична от нуля. Следовательно, отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, является конформным в точке $z = \infty$. Производная $-\frac{\Delta}{(az+b)^2}$ функции $\frac{cz+d}{az+b}$ в точке z_0 принимает значение $c \neq 0$. Следовательно, отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, является конформным в точке z_0 . Таким образом, дробно-линейная функция осуществляет взаимно однозначное конформное отображение $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$.

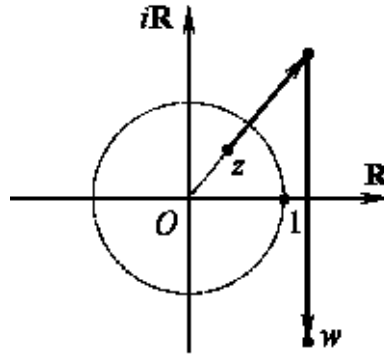
При $a = c = 1$, $b = d = 0$ дробно-линейная функция $z \rightarrow \frac{1}{z}$ является композицией $f_2 \circ f_1$ двух функций $f_1(z) = \frac{1}{z}$ и $f_2(z) = \bar{z}$. Пусть $z := r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Учитывая, что

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

получаем $|\frac{1}{\bar{z}}| = \frac{1}{r}$, $\arg \frac{1}{\bar{z}} = \arg z$. Значит, функция f_1 осуществляет инверсию плоскости относительно единичной окружности с центром в начале. В то же время, из соотношений

$$\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

вытекает, что отображение f_2 осуществляет симметрию относительно действительной оси.



В общем случае $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c} \frac{1}{cz+d}$, следовательно, дробно-линейная функция представляется в виде композиции $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ двух линейных функций $f_1 : z \rightarrow cz+d$, $f_3 : z \rightarrow -\frac{\Delta}{c}z + \frac{a}{c}$ и функции $f_2 : z \rightarrow \frac{1}{z}$.

3. Свойства дробно-линейных функций

3.1. Круговое свойство. Любой элемент семейства прямых и окружностей на координатной плоскости задается уравнением вида $A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0$, где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ и $B^2+C^2 > AD$. Действительно, при $A = 0$ — это прямая $2Bx+2Cy+D=0$, а при $A \neq 0$ — это окружность $(x+\frac{B}{A})^2 + (y+\frac{C}{A})^2 = \frac{B^2+C^2-AD}{A^2}$. Учитывая, что $x^2+y^2 = z\bar{z}$, $2x = z+\bar{z}$, $2y = -i(z-\bar{z})$, данное уравнение можно переписать в комплексной форме $Az\bar{z} + (B-iC)z + (B+iC)\bar{z} + D = 0$. Выберем произвольный элемент семейства прямых и окружностей на плоскости. Его образ при отображении $z \rightarrow \frac{1}{z}$ описывается уравнением $A\frac{1}{z\bar{z}} + (B-iC)\frac{1}{z} + (B+iC)\frac{1}{\bar{z}} + D = 0$ или уравнением $Dz\bar{z} + (B-iC)\bar{z} + (B+iC)z + A = 0$. Но, как уже показано, это уравнение определяет либо прямую, либо окружность. Таким

образом доказано, что при отображении посредством функции $z \rightarrow \frac{1}{z}$ семейство прямых и окружностей переходит в семейство прямых и окружностей. Этим свойством обладает любая линейная и дробно-линейная функция поскольку, очевидно, что семейство прямых и окружностей инвариантно относительно поворотов вокруг начала, параллельных переносов и гомотетий с центром в начале.

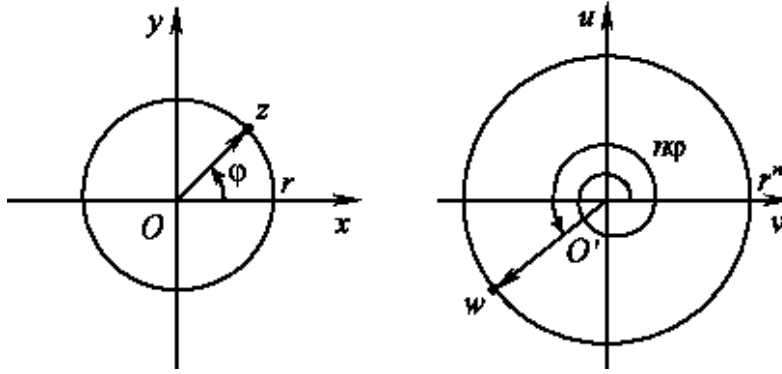
3.2. Групповое свойство. Совокупность всех линейных и дробно-линейных функций образует группу с композицией в качестве групповой операции. Эта совокупность состоит из функций вида $f : z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, где $\Delta = ad - bc \neq 0$. Условие $c \neq 0$ опускается. В качестве нейтрального элемента групповой операции выступает линейная функция $z \rightarrow z$. Обратный элемент f^{-1} определяется как обратная функция $w \rightarrow \frac{dw-b}{-cw+a}$. Непосредственно из определения сложной функции вытекает, что композиция ассоциативна. Осталось убедиться, что совокупность всех линейных и дробно-линейных функций замкнута относительно композиции. Пусть $f_1 : z \rightarrow \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $f_2 : z \rightarrow \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ и $\Delta_1 := a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$, $\Delta_2 := a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$. Непосредственная проверка показывает, что $(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a_1w_2(z)+b_1}{c_1w_2(z)+d_1} = \frac{(a_1a_2+c_1b_2)z+(b_1a_2+d_1b_2)}{(a_1c_2+c_1d_2)z+(b_1c_2+d_1d_2)}$. Причем, $\begin{vmatrix} a_1a_2+c_1b_2 & b_1a_2+d_1b_2 \\ a_1c_2+c_1d_2 & b_1c_2+d_1d_2 \end{vmatrix} = \Delta_1\Delta_2 \neq 0$. Это означает, что композиция $f_1 \circ f_2$ является дробно-линейной функцией.

3.3. Инвариантность двойного отношения. Для любых попарно различных чисел $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ двойное отношение $\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ не меняется, если заменить их образами w_1, w_2, w_3, w_4 при отображении $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$. Действительно, $w_4 - w_1 = \frac{az_4+b}{cz_4+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{(ad-bc)(z_4-z_1)}{(cz_4+d)(cz_1+d)}$. Значит, $\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2} = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} \frac{cz_2+d}{cz_1+d}$, $\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \frac{cz_2+d}{cz_1+d}$. Следовательно, $\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$.

Предел $\lim_{z_4 \rightarrow \infty} \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$ равен 1. Значит, если $z_4 = \infty$, то отношение $\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$ следует заменить единицей. Обратное к дробно-линейному отображению, в свою очередь, является дробно-линейным. Следовательно, отношение $\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}$ нужно тоже заменить единицей, если $w_4 = \infty$.

4. Целая степенная функция

Целой степенной функцией называется функция $z \rightarrow z^n$, где $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Эта функция определена на всей комплексной плоскости и не является взаимно однозначной. Например, точка $z := re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, лежащая на окружности s радиуса r с центром в начале, по формуле Муавра переходит в точку $w := r^n e^{in\varphi}$, лежащую на окружности S радиуса r^n с центром в начале. Изменение параметра φ связано с движением точки z по окружности s . Если параметр φ изменяется от 0 до 2π , то точка z совершает один полный оборот вокруг начала против часовой стрелки. При этом ее образ w совершит n полных оборотов по окружности S в том же направлении. В каждой точке окружности S она побывает ровно n раз. Это означает, что каждая точка окружности S имеет ровно n прообразов, лежащих на окружности s .



Производная функция целой степенной функции $z \rightarrow z^n$ совпадает с функцией $z \rightarrow n z^{n-1}$ (докажите эту формулу, используя индукцию по n). Значит, целая степенная функция является целой функцией (этим объясняется ее название). Она определена на всей комплексной плоскости и отлична от нуля в области $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Таким образом целая степенная функция осуществляет конформное отображение области $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ на себя.

В начале комплексной плоскости конформность отображения нарушается. Действительно, рассмотрим произвольную кривую l , задаваемую уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, проходящую через начало, то есть $\lambda(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in (a, b)$. Считаем, что существует отличная от нуля производная $\lambda'(t_0)$ функции λ в точке t_0 . Образом кривой l при отображении $z \rightarrow z^n$ является кривая L , задаваемая уравнением $w = \lambda^n(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Понятно, что эта кривая тоже проходит через начало комплексной плоскости. При этом производная $n\lambda^{n-1}\lambda'$ функции λ^n в точке $t_0 \in (a, b)$ равна нулю. Кривая l имеет касательную в точке O , которая образует угол $\varphi = \arg \lambda'(t_0)$ с действительной осью. Для того чтобы найти угол, который образует касательная к кривой L в точке O' с действительной осью, проведем в уравнении $w = \lambda^n(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ замену параметра:

$$t \rightarrow \varphi(t) := \begin{cases} \sqrt[n]{t} + t_0, & \text{если } t \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-t} + t_0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

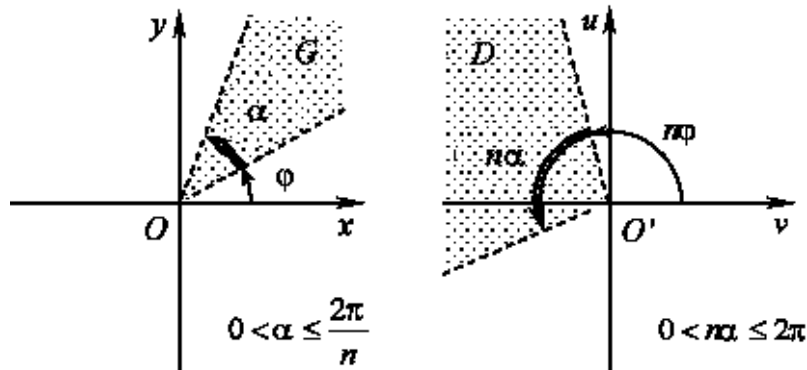
Уравнение тождественной кривой L примет вид $w = \lambda^n(\varphi(t))$, $t \in \langle a', b' \rangle$, где $a' := \varphi^{-1}(a)$, $b' := \varphi^{-1}(b)$. Точка O' соответствует значению параметра $t = 0$, так как $\varphi(0) = t_0$ и $\lambda^n(\varphi(0)) = \lambda^n(t_0) = 0$. Вычислим производную функции $\lambda^n \circ \varphi$ в нуле:

$$\frac{\Delta(\lambda^n \circ \varphi)}{\Delta t} = \frac{\lambda^n(\varphi(t))}{t} = \left(\frac{\lambda(\varphi(t)) - \lambda(\varphi(0))}{\varphi(t) - \varphi(0)} \right)^n \frac{\varphi^n(t)}{t} \rightarrow (\lambda'(t_0))^n, \quad t \rightarrow 0.$$

Таким образом, касательная к кривой L в точке O' образует угол $n\varphi = n \arg \lambda'(t_0) \in n \operatorname{Arg} \lambda'(t_0) = \operatorname{Arg} (\lambda'(t_0))^n$. Отсюда следует, что отображение, осуществляемое функцией $z \rightarrow z^n$, увеличивает углы между кривыми, пересекающимися в начале координат, ровно в n раз.

Пусть $\varphi \in \mathbf{R}$. В силу формулы Муавра функция $z \rightarrow z^n$ отображает взаимно однозначно открытый луч l_φ , задаваемый уравнением $z = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$, на открытый луч L_φ , задаваемый уравнением $w = t^n e^{in\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$. В последнем уравнении можно произвести замену параметра $t \rightarrow t^{\frac{1}{n}}$ и записать его в виде $w = te^{in\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$. Изменение переменной φ связано с поворотом луча l_φ и его образа L_φ вокруг начала. Если переменная φ увеличится на величину $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{n}]$, то луч l_φ повернется против часовой стрелки на угол $\alpha \leq \frac{2\pi}{n}$, а луч L_φ — на угол $n\alpha \leq 2\pi$. Лучи из семейств $\{l_{\varphi'} : \varphi' \in (\varphi, \varphi + \alpha)\}$, $\{L_{\varphi'} : \varphi' \in (\varphi, \varphi + \alpha)\}$ попарно не пересекаются. Отсюда следует, что функция $z \rightarrow z^n$ осуществляется взаимно однозначное

отображение открытой угловой области $G := \{(r, \varphi') : \varphi < \varphi' < \varphi + \alpha\}$ на открытую угловую область $D := \{(r, \varphi') : n\varphi < \varphi' < n\varphi + n\alpha\}$. Это отображение является конформным, так как в точках области G производная степенной функции отлична от нуля.



В случае $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ область D совпадает со всей комплексной плоскостью, из которой удалены луч l_φ и начало. Такая область называется плоскостью с разрезом вдоль луча l_φ .

5. Функция $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$

Функция $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$ определена на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и называется аргументом. Точке $z \neq 0$ эта функция ставит в соответствие множество $\{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, где $\arg z \in (-\pi, \pi]$ — полярный угол точки комплексной плоскости, изображающей число z . Как мы уже знаем, такие функции принято называть многозначными. При фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ значение функции $z \rightarrow \arg z + 2\pi k$ в точке z принадлежит $\operatorname{Arg} z$. Это означает, что функция $z \rightarrow \arg z + 2\pi k$ является однозначной ветвью аргумента.

Каждая ветвь $z \rightarrow \arg z + 2\pi k$ непрерывна на плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. В самом деле, для точек $z = x + iy$, лежащих выше или ниже действительной оси, справедливость этого утверждения вытекает из представления

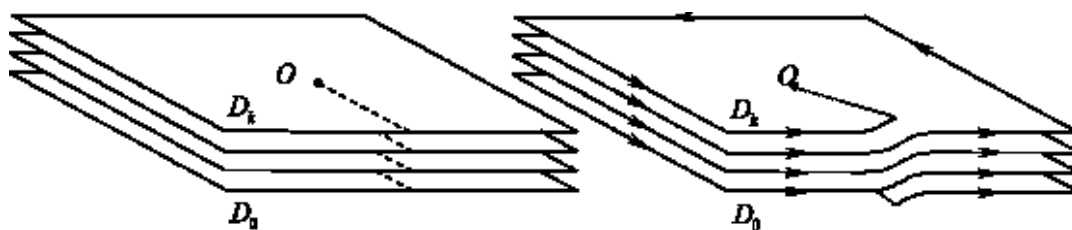
$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{при } y > 0; \\ -\arccos \frac{x}{|z|}, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

а для точек, лежащих правее мнимой оси, — из представления $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k$. В точках отрицательной части действительной оси выделенные ветви разрывны. При переходе через нее, например, по прямой $y = a$, где $a \in (-\infty, 0)$, каждая из этих функций испытывает скачок, равный 2π по абсолютной величине. Возникает вопрос: можно ли выделить однозначные ветви аргумента непрерывные в точках отрицательной части действительной оси?

Ответить на этот вопрос помогут следующие геометрические соображения. В точках открытого луча l_φ , задаваемого параметрическим уравнением $z = t(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $t \in (0, +\infty)$ или равносильным ему уравнением $z = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$, значение нулевой ветви аргумента $z \rightarrow \arg z$ одно и то же. По свойству единственности тригонометрической формы записи комплексного числа оно совпадает с элементом множества $\{\varphi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, лежащем в полуинтервале $(-\pi, \pi]$. С другой стороны, если луч l_φ находится в верхней полуплоскости, то значение нулевой ветви аргумента $z \rightarrow \arg z$ в точках луча l_φ , совпадает с длиной дуги, которую описывает точка с единичным модулем в результате вращения против часовой стрелки положительной части действительной оси до момента совпадения с лучом l_φ . Вращая луч l_φ вокруг начала против часовой стрелки, мы непрерывно наращиваем эту дугу и, следовательно, непрерывно увеличиваем ее длину. В момент перехода через отрицательную часть действительной оси нулевая ветвь аргумента $z \rightarrow \arg z$ скачкообразно уменьшает свое значение на 2π . В то же время дуга описываемая точкой с единичным модулем продолжает

непрерывное наращивание. Ее длина теперь определяется уже значением другой однозначной ветви аргумента $z \rightarrow \arg z + 2\pi$.

Одномоментная замена одной ветви аргумента другой ветвью станет более понятной если в качестве области определения многозначной функции $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$ взять некую абстрактную поверхность, называемую римановой поверхностью аргумента. Построить эту поверхность можно следующим образом. Для любого $k \in \mathbf{Z}$ выберем отдельный экземпляр комплексной плоскости и удалим из каждой начало и точки фиксированного луча l_φ . Получим линейно упорядоченное семейство плоскостей с разрезами $\{D_k : k \in \mathbf{Z}\}$. Совместим эти области пространственно и затем склеим (отождествим) левый край разреза области D_0 с правым краем разреза области D_1 , а правый край области D_0 с левым краем области D_{-1} (находимся на луче l_φ и видим начало). Прделаем эту операцию с каждой из областей семейства $\{D_k : k \in \mathbf{Z}\}$ и мыслим всю процедуру законченной. В результате мы получили плоскость, наделенную внутренней структурой. Каждая точка плоскости приобрела бесконечную кратность. Исключение составляет начало. В начале комплексной плоскости левый и правый разрез каждой области смыкаются, значит, в результате склейки все области семейства $\{D_k : k \in \mathbf{Z}\}$ оказываются склеенными в начале. Таким образом, кратность начала равна единице.



Если представить себе, что каждая однозначная ветвь аргумента определена в своей области D_k , то многозначная функция $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$ окажется однозначной, но определенной на построенной абстрактной поверхности. При пересечении места разреза вращающийся луч переходит с одного листа данной поверхности на другой лист. При этом значения одной ветви аргумента непрерывно меняются на значения другой ветви аргумента.

Построенная поверхность не зависит от выбора луча l_φ , вдоль которого произведен первоначальный разрез. Если информация об этом луче потеряна, то восстановить ее по построенной поверхности нельзя. Если разрез произведен вдоль луча l_φ , то значение нулевой ветви аргумента в точке z , в общепринятых обозначениях $(\operatorname{Arg} z)_0$, определяется как единственное значение аргумента, лежащее в полуинтервале $(\varphi, \varphi + 2\pi]$. Значение k -й ветви в этой точке, в обозначениях $(\operatorname{Arg} z)_k$, определяется как сумма $(\operatorname{Arg} z)_0 + 2\pi k$.

Пусть первоначальный разрез произведен вдоль положительной части действительной оси. В этом случае нулевая ветвь аргумента в точке $z := x + iy$ принимает следующее значение

$$(\operatorname{Arg} z)_0 = \begin{cases} \arg z, & \text{при } y \geq 0; \\ \arg z + 2\pi, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

В точках отрицательной части действительной оси она непрерывна, так как в левой полуплоскости имеет место представление $(\operatorname{Arg} z)_0 = \arctg \frac{y}{x} + \pi$.

При выделении однозначных ветвей функции $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$ иногда удобно производить первоначальный разрез плоскости не по лучу, а по некоторой кривой с началом в начале комплексной плоскости и концом в бесконечности, например, по синусоиде $z = t + i \sin t$, $t \in [0, +\infty)$. Аналитическое представление однозначных ветвей функции $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$ в этом случае несколько усложняется.

6. Функция $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$

Функция $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$ определяется как обратная к функции $z \rightarrow z^n$. Найдем прообраз точки $w_0 \neq 0$ при отображении $z \rightarrow z^n$. Пусть $w_0 = z_0^n$. Воспользуемся тригонометрической формой записи $w_0 = |w_0|(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, где $\varphi_0 \in \text{Arg } w_0$. По формуле Муавра $w_0 = |z_0|^n(\cos n\psi_0 + i \sin n\psi_0)$, где $\psi_0 \in \text{Arg } z_0$. Из свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа вытекает, что $|w_0| = |z_0|^n$, $\frac{\varphi_0 - n\psi_0}{2\pi} \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $z_0 = \sqrt[n]{|w_0|} \left(\cos \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} \right)$ при некотором $k \in \mathbf{Z}$. Это значит, что определяемая нами функция $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$ является многозначной. Комплексному числу z она ставит в соответствие множество комплексных чисел

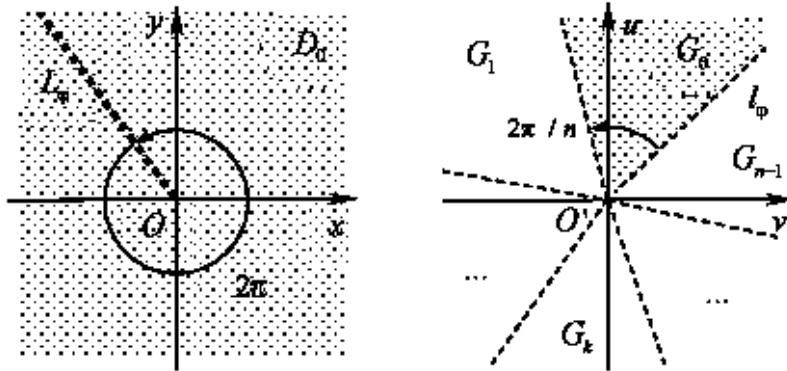
$$z^{\frac{1}{n}} := \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{n} \right), & \text{если } z \neq 0 \\ 0, & \text{если } z = 0 \end{cases}$$

Выделяя однозначные ветви аргумента $(\text{Arg } z)_k$, мы выделяем однозначные ветви $z \rightarrow (z^{\frac{1}{n}})_k$ этой функции. Здесь

$$(z^{\frac{1}{n}})_k := \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{(\text{Arg } z)_k}{n} + i \sin \frac{(\text{Arg } z)_k}{n} \right), & \text{если } z \neq 0 \\ 0, & \text{если } z = 0 \end{cases}$$

Однозначная ветвь $z \rightarrow (z^{\frac{1}{n}})_k$ определена на всей плоскости и отображает плоскость с разрезом D , например, вдоль луча L_φ , задаваемого уравнением $z = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$, взаимно однозначно на угловую область

$$G_k = \{(r, \varphi') : \varphi + 2\pi k < \varphi' < \varphi + 2\pi(k+1)\}.$$



Однозначная функция

$$z \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right), & \text{если } z \neq 0 \\ 0, & \text{если } z = 0 \end{cases}$$

называется главной ветвью целой степенной функции или радикалом степени n . Ее значение в точке z обозначается $\sqrt[n]{z}$. Другие ветви целой степенной функции удовлетворяют соотношению $(z^{\frac{1}{n}})_k = \sqrt[n]{z} e^{i \frac{2\pi k}{n}}$.

Удобно ввести в рассмотрение однозначную функцию $z \rightarrow \arg^{(0)} z$, где

$$\arg^{(0)} z := \begin{cases} \arg z, & \text{если } z \neq 0 \\ 0, & \text{если } z = 0 \end{cases}$$

Тогда для всех $z \in \mathbf{C}$, будет справедливо равенство

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg^{(0)} z}{n} + i \sin \frac{\arg^{(0)} z}{n} \right).$$

Замечаем, что равенство $\sqrt[n]{z^n} = z$ справедливо тогда и только тогда, когда $\arg^{(0)} z \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$. В частности, равенство $\sqrt{z^2} = z$ справедливо тогда и только тогда, когда $\arg^{(0)} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Значит, на \mathbf{C} справедливо тождество

$$(-1)^{\chi(z)} \sqrt{z^2} = z,$$

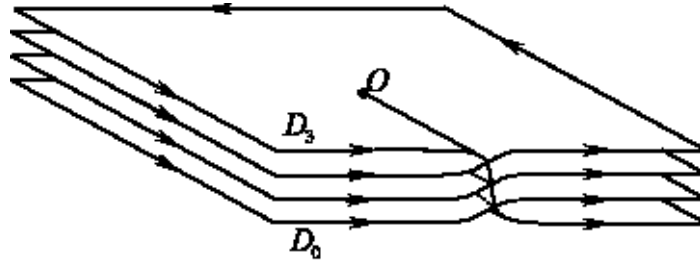
где $\chi(z) := 0$, если $\arg^{(0)} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и $\chi(z) := 1$, если $\arg^{(0)} z \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Полезно заметить, что в точках мнимой оси (за исключением начала) однозначная функция $z \rightarrow \sqrt{z^2}$ терпит разрыв, который компенсируется изменением функции $z \rightarrow \chi(z)$. В результате получается непрерывная и даже целая функция $z \rightarrow z$. С другой стороны $(\sqrt{z})^2 = z$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Функция $z \rightarrow (\sqrt{z})^2$ является произведением двух совпадающих функций $z \rightarrow \sqrt{z}$. В точках отрицательной части действительной оси разрыв одного сомножителя устраняется другим сомножителем.

Функция $z \rightarrow (z^{\frac{1}{n}})_k$ является обратной к сужению функции $z \rightarrow z^n$ на область G_k . По теореме о производной обратной функции

$$\left((z^{\frac{1}{n}})_k \right)' = \frac{1}{(z^n)'} \Big|_{(z^{\frac{1}{n}})_k} = \frac{1}{n} z^{1-n} \Big|_{(z^{\frac{1}{n}})_k} = \frac{1}{n} \left((z^{\frac{1}{n}})_k \right)^{1-n}.$$

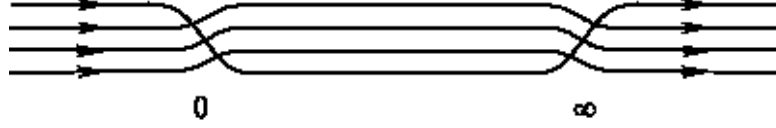
Таким образом, производная функции $z \rightarrow (z^{\frac{1}{n}})_k$ отлична от нуля в любой точке области D . Отсюда вытекает, в частности, что отображение $D \rightarrow G_k$, осуществляемое этой функцией, является конформным.

Однозначные ветви $(z^{\frac{1}{n}})_k$ и $(z^{\frac{1}{n}})_{k+n}$ для любого $k \in \mathbf{Z}$ совпадают. Это позволяет отождествить (склеить) соответствующие листы римановой поверхности аргумента. При этом левый край разреза листа D_{n-1} (он же — правый край разреза листа D_n) отождествляется с правым краем разреза листа D_0 . Общее число листов римановой поверхности сокращается и становится равным n .



n -кратный обход точки O , например, против часовой стрелки, приводит к возврату на исходный лист римановой поверхности. Про эту точку говорят, что она является точкой ветвления кратности n . На рисунке показано строение римановой поверхности функции $z \rightarrow z^{\frac{1}{4}}$. Важно заметить, что представление о римановой поверхности, сформированное на основе этого рисунка остается далеким от истинного. Достаточно сообразить, что все листы абстрактной поверхности совершенно равноправны. Среди них нет верхнего и нижнего. Находясь на конкретном листе этой поверхности, не забудьте его номер. Восстановить его по внутреннему строению поверхности невозможно. Восстановить номер листа римановой поверхности можно, если известно значение функции $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$ хотя бы в одной точке этого листа.

Если продолжить функцию $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$ на $\bar{\mathbf{C}}$, положив $\infty^{\frac{1}{n}} = \infty$, то листы римановой поверхности склеятся еще и в бесконечности. Точнее, каждый лист римановой поверхности заменяется отдельным экземпляром римановой сферы. При этом все сферы попарно склеены по берегам разрезов, произведенных вдоль выбранного меридиана. Эта поверхность имеет уже две точки ветвления 0 и ∞ . Обе точки ветвления имеют кратность n .



Полезно "походить" по этой поверхности, продумать пути перехода с одного листа на другой, проследить изменение значений функции $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$ вдоль этих путей.

Однозначные ветви функции $z \rightarrow z^{-\frac{1}{n}}$, определяемой с помощью соотношения

$$z^{-\frac{1}{n}} := \begin{cases} \frac{1}{z^{\frac{1}{n}}}, & \text{если } z \notin \{0, \infty\}, \\ \infty, & \text{если } z = 0, \\ 0, & \text{если } z = \infty, \end{cases}$$

выделяются посредством выделения однозначных ветвей функции $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$, трактуемой как функция из $\bar{\mathbf{C}}$ в $\bar{\mathbf{C}}$, в частности, $(z^{-\frac{1}{n}})_k := \frac{1}{(z^{\frac{1}{n}})_k}$. Риманова поверхность функции $z \rightarrow z^{-\frac{1}{n}}$ совпадает с римановой поверхностью функции $z \rightarrow z^{\frac{1}{n}}$.

7. Показательная функция комплексной переменной

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Этот ряд сходится на всей действительной прямой и его сумма в точке $x \in \mathbf{R}$ совпадает с e^x . По теореме Абеля он сходится на всей комплексной плоскости и, следовательно, представляет там некоторую функцию комплексной переменной. Эту функцию называют показательной функцией комплексной переменной, ее значение в точке z обозначают e^z .

Убедимся, что для показательной функции комплексной переменной имеет место обычная теорема сложения $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Согласно определению $e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}$, $e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$. Тогда по теореме об умножении рядов имеем

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1^0}{0!} \frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_1^1}{1!} \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!} \frac{z_2^0}{0!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(z_2^n + n z_1 z_2^{n-1} + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} + \dots + z_1^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

По определению показательной функции комплексной переменной имеем $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$, $e^{-iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!}$. Считаем, что $y \in \mathbf{R}$. Значит,

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \cos y.$$

Аналогично,

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \frac{y^n}{n!} \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin y.$$

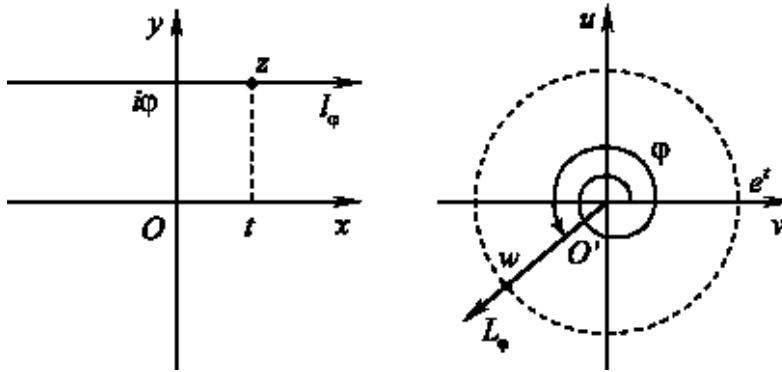
Учитывая соотношение $e^{iy} = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + i \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right)$, получаем знаменитую формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

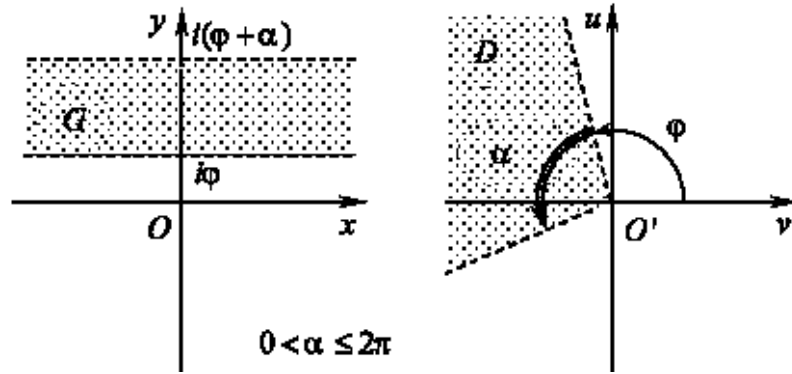
Непосредственно из теоремы сложения для показательной функции вытекает, что для любого комплексного числа z и любого $n \in \mathbf{Z}$ верно равенство $e^{z+i2\pi n} = e^z e^{i2\pi n}$. Привлекая формулу Эйлера, получаем $e^{z+i2\pi n} = e^z (\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n) = e^z$. Равенство $e^{z+i2\pi n} = e^z$ показывает, что показательная функция комплексной переменной является периодической функцией с периодом кратным мнимому числу $2\pi i$.

По формуле Эйлера $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Значит, $\operatorname{Re} e^{x+iy} = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} e^{x+iy} = e^x \sin y$. Таким образом, функции $u : (x, y) \rightarrow e^x \cos y$, $v : (x, y) \rightarrow e^x \sin y$ совпадают с действительной и мнимой частями показательной функции комплексной переменной соответственно. При этом для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ имеем $u'_x(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0$, $u'_y(x_0, y_0) = -e^{x_0} \sin y_0$, $v'_x(x_0, y_0) = e^{x_0} \sin y_0$, $v'_y(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0$. Следовательно, $u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$, $u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$. Значит, показательная функция дифференцируема в любой точке комплексной плоскости. Ее производная функция совпадает с ней. Действительно, производная функция в точке $z_0 := x_0 + iy_0$ принимает значение $u'_x(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0) = e^{x_0} (\cos y_0 + i \sin y_0) = e^{z_0}$.

Пусть $\varphi \in \mathbf{R}$. Показательная функция $z \rightarrow e^z$ отображает взаимно однозначно прямую l_φ , задаваемую уравнением $z = t + i\varphi$, $t \in (-\infty, +\infty)$, на открытый луч L_φ , задаваемый уравнением $w = e^t e^{i\varphi}$, $t \in (-\infty, +\infty)$.



В последнем уравнении можно произвести замену параметра $t \rightarrow e^t$ и записать его в виде $w = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$. Увеличение значения φ связано с перемещением прямой l_φ в направлении мнимой оси и поворотом луча L_φ вокруг начала против часовой стрелки. Если значение φ увеличится на величину $\alpha \in (0, 2\pi]$, то прямая l_φ переместится на величину α , а луч L_φ повернется против часовой стрелки на угол α . Отсюда следует, что функция $z \rightarrow e^z$ осуществляет взаимно однозначное отображение открытой полосы $G := \{(x, y) : \varphi < y < \varphi + \alpha\}$ на открытую угловую область $D := \{(r, \varphi') : \varphi < \varphi' < \varphi + \alpha\}$. Это отображение является конформным, так как производная показательной функции совпадает с показательной функцией и, как легко убедиться, отлична от нуля в любой точке комплексной плоскости.



В случае $\alpha = 2\pi$ область D совпадает с плоскостью с разрезом вдоль луча L_φ .

8. Логарифмическая функция комплексной переменной

Логарифмическая функция $z \rightarrow \operatorname{Ln} z$ определяется как обратная к показательной функции $z \rightarrow e^z$. Найдем прообраз точки $w_0 \neq 0$ при отображении $z \rightarrow e^z$. Пусть $w_0 = e^{z_0}$. Воспользуемся тригонометрической формой записи $w_0 = |w_0|(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, где $\varphi_0 \in \operatorname{Arg} w_0$. По формуле Эйлера $w_0 = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0)$, где $x_0 = \operatorname{Re} z_0$, $y_0 = \operatorname{Im} z_0$. Из свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа вытекает, что $|w_0| = e^{x_0}$, $\frac{\varphi_0 - y_0}{2\pi} \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $z_0 = \ln |w_0| + i(\varphi_0 + 2\pi k)$ при некотором $k \in \mathbf{Z}$. Это значит, что определяемая нами функция $z \rightarrow \operatorname{Ln} z$ является многозначной. Комплексному числу z она ставит в соответствие множество комплексных чисел

$$\operatorname{Ln} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

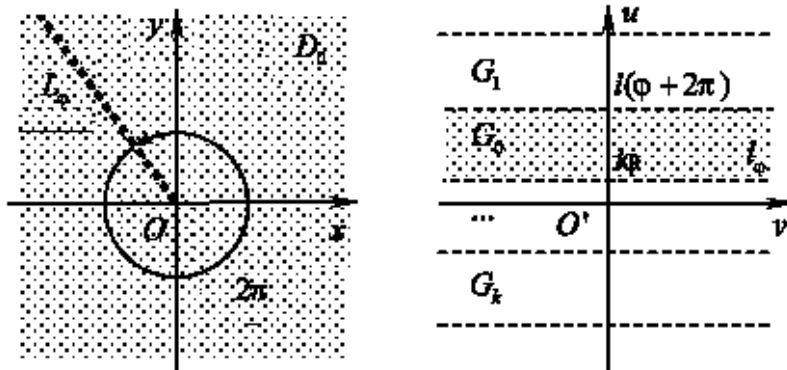
Отмечаем, что формула для логарифма произведения сохраняет свою силу и для комплексных логарифмов. Действительно, $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln |z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \ln |z_1| + \ln |z_2| + i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

Выделяя однозначные ветви аргумента $(\operatorname{Arg} z)_k$, мы выделяем однозначные ветви $z \rightarrow (\operatorname{Ln} z)_k$ этой функции, где

$$(\operatorname{Ln} z)_k := \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z)_k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Однозначная ветвь $z \rightarrow (\operatorname{Arg} z)_k$ определена во всех точках $z \neq 0$ и отображает плоскость с разрезом D , например, вдоль луча L_φ , задаваемого уравнением $z = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$, взаимно однозначно на открытую полосу

$$G_k = \{(x, y) : \varphi + 2\pi k < y < \varphi + 2\pi(k+1)\}.$$



Главная ветвь аргумента порождает главную ветвь логарифма $z \rightarrow \ln |z| + i \arg z$. Ее значение в точке $z \neq 0$ обозначают $\ln z$. При этом другие ветви логарифма описываются соотношением $(\operatorname{Ln} z)_k := \ln z + i2\pi k$. Замечаем, что равенство $\ln e^z = z$ выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$. При этом на \mathbf{C} справедливо тождество

$$\ln e^z - 2\pi\chi(\pi - z)i = z,$$

где $\chi(z)$ — целая часть числа $\frac{\operatorname{Im} z + \pi}{2\pi}$.

Функция $z \rightarrow (\operatorname{Ln} z)_k$ является обратной к сужению функции $z \rightarrow e^z$ на область G_k . По теореме о производной обратной функции

$$((\operatorname{Ln} z)_k)' = \frac{1}{(e^z)'} \Big|_{(\operatorname{Ln} z)_k} = \frac{1}{e^z} \Big|_{(\operatorname{Ln} z)_k} = \frac{1}{z}.$$

Таким образом, производная функции $z \rightarrow (\operatorname{Ln} z)_k$ отлична от нуля в любой точке области D . Отсюда вытекает, в частности, что отображение $D \rightarrow G_k$, осуществляемое этой функцией, является конформным. Риманова поверхность логарифмической функции совпадает с римановой поверхностью аргумента. При этом каждый обход точки O приводит к переходу на новый лист римановой поверхности, значит, эта точка является точкой ветвления бесконечной кратности. Такие точки принято называть логарифмическими точками ветвления.

9. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции комплексного переменного определяются с помощью следующих соотношений

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Из формулы Эйлера вытекает, что эти определения соблюдают преемственность. Другими словами, сужение функций $z \rightarrow \cos z$ и $z \rightarrow \sin z$ на действительную ось совпадают с известными тригонометрическими функциями действительной переменной. Теоремы сложения для функций $z \rightarrow \cos z$ и $z \rightarrow \sin z$ имеют привычную форму

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

Их справедливость для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ вытекает из легко проверяемых соотношений

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} e^{iz_2} = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2),$$

$$e^{-i(z_1+z_2)} = e^{-iz_1} e^{-iz_2} = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2).$$

Следовательно, все тригонометрические тождества, вытекающие из теорем сложения, распространяются и на комплексную переменную. Например,

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \quad \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

Действительно, для любого $z \in \mathbf{C}$ имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos z - \cos \frac{\pi}{2} \sin z = \cos z$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos z + \sin \frac{\pi}{2} \sin z = \sin z$, $\cos^2 z + \sin^2 z = \cos z \cos z + \sin z \sin z = \cos(z - z) = 1$, $\sin(-z) = \sin(0 - z)$, $\cos(-z) = \cos(0 - z)$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \cos z \sin 2\pi = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi = \cos z$. Из свойств показательной функции вытекает, что функции $z \rightarrow \cos z$ и $z \rightarrow \sin z$ являются целыми. При этом $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

С тригонометрическими функциями тесно связаны гиперболические функции. Гиперболические функции комплексного переменного определяются с помощью следующих соотношений

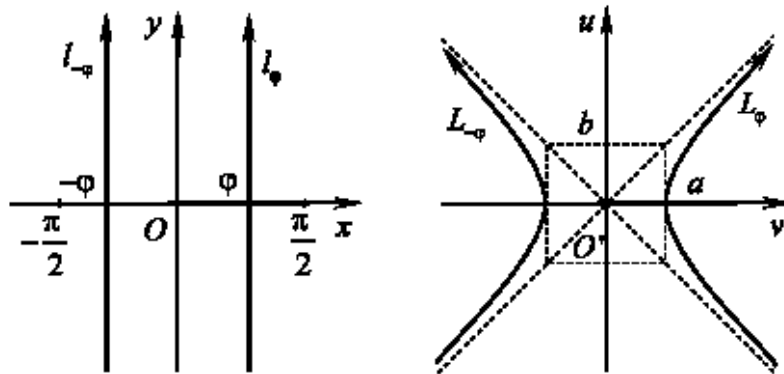
$$\operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Связь тригонометрических и гиперболических функций выражается следующими формулами

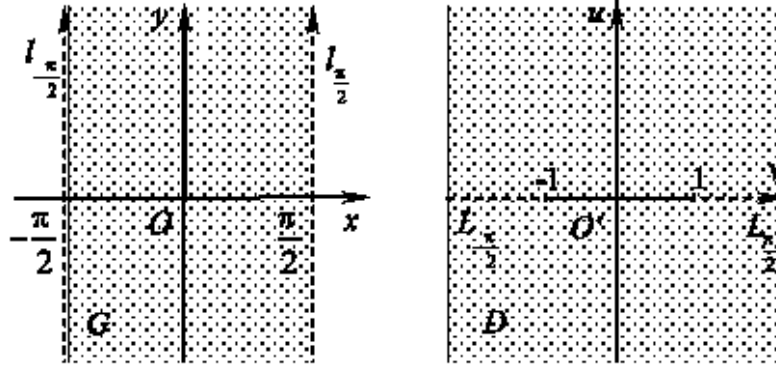
$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

Убедимся в их справедливости. $\sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{-(e^z - e^{-z})}{2i} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$. Из этих соотношений вытекает, что всякое тригонометрическое тождество имеет свой гиперболический аналог. Например, $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \frac{1}{i} \sin i(z_1 + z_2) = \frac{1}{i} (\sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$, $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \cos i(z_1 + z_2) = \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2 = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$, $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \cos^2 iz + \sin^2 iz = \cos(iz - iz) = 1$. Из соотношений $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ вытекает, что $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$, $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$, где $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$. Следовательно, функции $z \rightarrow |\cos z|$ и $z \rightarrow |\sin z|$ неограничены.

Рассмотрим подробнее отображение комплексной плоскости, осуществляемое функцией $z \rightarrow \sin z$. Пусть $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $a = \sin \varphi$, $b = \cos \varphi$. Функция $z \rightarrow \sin z$ отображает взаимно однозначно прямую l_φ , задаваемую уравнением $z = \varphi + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$, на одну из ветвей L_φ гиперболы, задаваемую уравнением $z = \sin(\varphi + it)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. При этом прямая $l_{-\varphi}$ отображается взаимно однозначно на другую ветвь гиперболы $L_{-\varphi}$.



Каноническое уравнение гиперболы $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ вытекает из тождеств $\sin(\varphi + it) = a \operatorname{ch} t + ib \operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Асимптоты гиперболы имеют угловые коэффициенты $\pm \frac{b}{a} = \pm \operatorname{ctg} \varphi$. Изменение значения φ связано с перемещением луча l_φ , перемещением и деформацией ветвей гиперболы. При стремлении φ к 0 обе ветви гиперболы сближаются и сливаются в пределе с мнимой осью. При стремлении φ к $\frac{\pi}{2}$ ветви гиперболы удаляются и сливаются в пределе с лучами $L_{-\frac{\pi}{2}}, L_{\frac{\pi}{2}}$, задаваемыми уравнениями $w = t, t \in (-\infty, -1]$ и $w = t, t \in [1, +\infty)$ соответственно. Отсюда следует, что функция $z \rightarrow \sin z$ осуществляет взаимно однозначное отображение открытой полосы $G := \{(x, y) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ на открытую область D , получаемую из плоскости удалением лучей $L_{-\frac{\pi}{2}}, L_{\frac{\pi}{2}}$.



Это отображение является конформным, так как производная функции $z \rightarrow \sin z$ совпадает с функцией $z \rightarrow \cos z$ и, как видно из соотношения $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$, отлична от нуля в любой точке области G .

Из формулы приведения $\sin(z + \pi) = -\sin z$ вытекает, что открытая полоса $G + \pi := \{(x, y) : \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\}$ отображается взаимно однозначно и конформно на ту же область D . Замечаем, что при переходе луча l_φ через точку $z = \frac{\pi}{2}$ происходит смена ветви гиперболы. Меняется также ориентация ветви гиперболы как кривой. Аналогичная ситуация возникает и при переходе через точку $z = -\frac{\pi}{2}$.

Представление об отображении комплексной плоскости функцией $z \rightarrow \cos z$ можно получить, используя формулу $\cos z = -\sin(z - \frac{\pi}{2})$. Из нее вытекает, в частности, что эта функция отображает область $G + \frac{\pi}{2}$ взаимно однозначно и конформно на область D . Аналогично, из формул $\operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$ вытекает, что функции $z \rightarrow \operatorname{sh} z$ и $z \rightarrow \operatorname{ch} z$ отображают взаимно однозначно и конформно область $\frac{1}{i}G$ на области $\frac{1}{i}D$ и D соответственно.

10. Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Функция $z \rightarrow \operatorname{Arcsin} z$ определяется как обратная к функции $z \rightarrow \sin z$. Найдём прообраз точки $w_0 \neq 0$ при отображении $z \rightarrow \sin z$. Пусть $w_0 = \sin z_0$. Воспользуемся определением тригонометрической функции и получим $w_0 = \frac{t_0 - t_0^{-1}}{2i}$, где $t_0 := e^{iz_0}$. Откуда вытекает, что $t_0^2 - 2iw_0 t_0 - 1 = 0$, то есть $t_0 \in iw_0 + (1 - w_0^2)^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, $z_0 \in \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \left(iw_0 + (1 - w_0^2)^{\frac{1}{2}} \right)$. Это значит, что определяемая нами функция $z \rightarrow \operatorname{Arcsin} z$ является многозначной функцией (композицией функций, из которых одна является бесконечнозначной и ещё одна — двужаночной). Комплексному числу z она ставит в соответствие множество комплексных чисел

$$\operatorname{Arcsin} z := \frac{1}{i} \operatorname{Ln} \left(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Выделяя главные ветви функций $z \rightarrow \operatorname{Ln} z$ и $z \rightarrow z^{\frac{1}{2}}$, мы выделяем главную ветвь арксинуса $z \rightarrow \arcsin z$, где

$$\arcsin z := \frac{1}{i} \ln \left(iz - \sqrt{1 - z} \sqrt{1 + z} \right).$$

Пусть $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Функция $z \rightarrow \arcsin z$ отображает кривую, задаваемую уравнением $z = \sin(\varphi + it)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, на прямую $w = \varphi + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Лучи $z = \sin(-\frac{\pi}{2} + it)$, $t \in [0, +\infty)$ и $z = \sin(\frac{\pi}{2} + it)$, $t \in (-\infty, 0)$ она отображает на лучи $w = -\frac{\pi}{2} + it$, $t \in [0, +\infty)$ и $w = \frac{\pi}{2} + it$, $t \in (-\infty, 0)$ соответственно. Действительно, если $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $t \geq 0$ или $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $t < 0$, то $\arg^{(0)} \sin \left(\frac{\varphi + it}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а $\arg^{(0)} \sin \left(\frac{\varphi + it}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Следовательно,

$\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = -\sin\left(\frac{\varphi+it}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, а $\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sin\left(\frac{\varphi+it}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Значит,

$$\begin{aligned} & i \sin(\varphi + it) - \sqrt{1 - \sin(\varphi + it)} \sqrt{1 + \sin(\varphi + it)} = \\ & = i \sin(\varphi + it) - \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \\ & = i \sin(\varphi + it) + 2 \sin\left(\frac{\varphi+it}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\varphi+it}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = i \sin(\varphi + it) + \cos(\varphi + it) = e^{i\varphi-t}, \end{aligned}$$

$$\arcsin \sin(\varphi + it) = \frac{1}{i} \ln e^{i\varphi-t} = \frac{1}{i}(i\varphi - t) = \varphi + it.$$

Таким образом главная ветвь арксинуса отображает плоскость с разрезами D вдоль лучей $z = t$, $t \in (-\infty, -1]$ и $z = t$, $t \in [1, +\infty)$ на открытую полосу $G := \{z : \operatorname{Im} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$, а всю плоскость она отображает на множество G' , получаемое из области G добавлением лучей $z = -\frac{\pi}{2} + it$, $t \in [0, +\infty)$ и $z = \frac{\pi}{2} + it$, $t \in (-\infty, 0)$. Значит, k -я ветвь арксинуса отображает область D на открытую полосу $G_k := G + \pi k$, а всю плоскость она отображает на множество $G'_k := (-1)^k G' + \pi k$. При этом справедлива формула

$$(\operatorname{Arcsin} z)_k = (-1)^k \arcsin z + \pi k.$$

Функция $z \rightarrow \arcsin z$ является обратной к сужению функции $z \rightarrow \sin z$ на множество G' . Значит, равенство $(\operatorname{Arcsin} \sin z)_k = z$ имеет место тогда и только тогда, когда z принадлежит множеству G'_k .

По теореме о производной сложной функции для любого $z \in G$ имеем $(\arcsin z)' = \frac{1}{i} \frac{i + \frac{\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z}}{2\sqrt{1-z}} - \frac{\sqrt{1-z}}{2\sqrt{1+z}}}{iz - \sqrt{1-z}\sqrt{1+z}} = \frac{1}{i} \frac{i + \frac{z}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}}{iz - \sqrt{1-z}\sqrt{1+z}} = \frac{1}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}$. Таким образом,

$$(\operatorname{Arcsin} \sin z)'_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}.$$