

§5. Критерий измеримости множества по Лебегу.

Теорема: Множество $A \subseteq E$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $(\forall \varepsilon > 0)$

$(\exists B$ -элементарное множество $): \mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon$.

Доказательство: Докажем необходимость. A - измеримо, следовательно $(E \setminus A)$ - измеримо (так как

$$\mu_*(E \setminus A) = m(E) - \mu^*(A) = m(E) - \mu_*(A) = m(E) - (m(E) - \mu^*(E \setminus A)) = \mu^*(E \setminus A)).$$

Подберем покрытия множеств A и $E \setminus A$ промежутками: $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялись неравенства: $\sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$,

$\sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) \leq \mu^*(E \setminus A) + \varepsilon$. Складывая покрытия, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(P_k) + \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) \leq \mu(A) + \mu(E \setminus A) + 2\varepsilon.$$

$$\mu(A) + \mu_*(E \setminus A) = \mu(A) + m(E) - \mu^*(A) + 2\varepsilon = m(E) + 2\varepsilon.$$

Подберем множество натуральное N из условия, что остатки: $\sum_{k=N}^{\infty} m(P_k) \leq \varepsilon$, и

$$\sum_{i=N}^{\infty} m(Q_i) \leq \varepsilon, \text{ введем обозначения: } P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, P_{k < N} = \bigcup_{k=1}^{N-1} P_k, P_{k \geq N} = \bigcup_{k=N}^{\infty} P_k,$$

$$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, Q_{i < N} = \bigcup_{i=1}^{N-1} Q_i, Q_{i \geq N} = \bigcup_{i=N}^{\infty} Q_i.$$

Рассмотрим пересечение $P \cap Q$. $P \cap Q \subseteq (P_{k < N} \cap Q_{i < N}) \cup P_{k \geq N} \cup Q_{i \geq N}$,

следовательно $E \subseteq (P_{k < N} \cup Q_{i < N}) \cup P_{k \geq N} \cup Q_{i \geq N}$. Оценим $\mu^*(P \cap Q)$. В силу

полуаддитивности, $\mu^*(P \cap Q) \leq \mu^*(P_{k < N} \cap Q_{i < N}) + 2\varepsilon$. По свойству:

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B), \text{ можем написать:}$$

$$\mu^*(P_{k < N}) + \mu^*(Q_{i < N}) - \mu^*(P_{k < N} \cup Q_{i < N}) + 2\varepsilon = m(P_{k < N}) + m(Q_{i < N}) - m(E) + 4\varepsilon \leq 6\varepsilon.$$

Оказывается, можно взять в качестве $B = P_{k < N}$. Так как

$$A \Delta B = (A \setminus P_{k < N}) \cup (P_{k < N} \setminus A) \subseteq$$

$$\subseteq P_{k \geq N} \cup (P \cap Q), P_{k < N} \setminus A \subseteq P \setminus A \subseteq P \cap Q. \mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(P_{k \geq N}) + \mu^*(P \cap Q) \leq 7\varepsilon.$$

Докажем теперь достаточность: Пусть $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$, B -элементарное. Докажем, что множество измеримо по Лебегу. $A \subseteq B \cup (A \Delta B)$ и $E \setminus A \subseteq \bar{B} \cup (A \Delta B)$.

Рассмотрим: $\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A) \geq m(E) - \mu^*(E \setminus B) - \varepsilon =$

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E \setminus B) + \mu^*(A \Delta B), -\mu^*(E \setminus A) \geq -\mu^*(E \setminus B) - \mu^*(A \Delta B)$$

$= \mu_*(B) - \varepsilon \geq \mu^*(A) - 2\varepsilon \Rightarrow \mu_*(A) \geq \mu^*(A)$ и значит $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$. (Обратное неравенство доказано ранее).

§6. Свойства измеримых по Лебегу множеств.

1. Совокупность измеримых по Лебегу множеств образует кольцо множеств. (Булево кольцо).

Доказательство: Пусть множества A_1, A_2 - измеримы по Лебегу. Значит найдутся множества B_1, B_2 - элементарные, : $\mu^*(A_1 \Delta B_1) \leq \varepsilon$, $\mu^*(A_2 \Delta B_2) \leq \varepsilon$.

Пусть $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$ воспользуемся включением.

$A \Delta B \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ в силу аддитивности внешней меры,

$\mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) \leq 2\varepsilon$. Таким образом, A -измеримо по Лебегу и замкнуто относительно операции объединения.

$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)]$, следовательно пересечение измеримо.

Аналогично, $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (E \setminus A_2)$, $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$.

2. Мера Лебега как функция множества, определенная на совокупности

измеримых по Лебегу множеств является аддитивной. $A = \bigcup_{k=1}^N A_k$, A_k -

измеримые, $A_i \cap A_j = \emptyset$, при $i \neq j$, следовательно: $\mu(A) = \sum_{k=1}^N \mu(A_k)$.

Доказательство: Достаточно рассмотреть случай двух множеств.

$A = A_1 \cup A_2$, A_1, A_2 - измеримы, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Существуют B_1, B_2 -

элементарные, такие что $\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon$, $\mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$.

Пусть $B = B_1 \cup B_2$, выполняется включение: $B \subseteq A \cup (A \Delta B)$, следовательно

$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B)$ и $\mu^*(A) \geq \mu^*(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq$

$(B = B_1 \cup B_2), \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2)$; $A \Delta B \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

аналогично $B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ и $\mu^*(B_1 \cap B_2) \leq 2\varepsilon$ следовательно

$\mu^*(A \Delta B) \leq 2\varepsilon$ $\geq \mu(B_1) + \mu(B_2) - 4\varepsilon \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$. В силу произвольности ε , получаем: $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. В силу полуаддитивности внешней меры выполняется обратное неравенство.

2. Совокупность множеств, измеримых по Лебегу замкнуто относительно счетных объединений и пересечений.

Доказательство: Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, A_k - измеримы, покажем что и A -

измеримо. $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. $\bigcup_{k=1}^N B_k \subseteq A$,

следовательно в силу полуаддитивности внешней меры получим:

$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^N B_k\right) = \sum_{k=1}^N \mu^*(B_k) \leq \mu^*(A)$, следовательно $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$ - ряд сходящийся.

Выберем такое $N \in \mathbb{N}$, что остаток ряда $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu^*(B_k) < \varepsilon$. Пусть $C = \bigcup_{k=1}^N B_k$ -

частичное объединение - измеримое, следовательно найдется B - элементарное,

такое что: $\mu^*(C \Delta B) < \varepsilon$. $A \Delta B \subseteq (C \Delta B) \cup \left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} B_k\right)$. В силу полуаддитивности

внешней меры получим: $\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon + \varepsilon$. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \setminus A_k)$.

Следствие: Любое счетное подмножество множества E измеримо по Лебегу, и имеет меру "ноль".

§7. Счетная аддитивность и непрерывность меры Лебега.

Теорема: Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, все A_k - измеримы, следовательно $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Доказательство: $\bigcup_{k=1}^N A_k \subseteq A$, из полуаддитивности внешней меры следует:
 $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N \mu(A_k) = \mu(A)$. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$.
 Обратное неравенство следует из счетной полуаддитивности внешней меры.

Теорема: (Непрерывность). Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ обозначим через A , A_k - измеримые. Тогда $\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \inf_N \mu(A_k)$.

Доказательство: 1). $A = \emptyset$. Получим: $A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1})$,
 $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1})$. В силу счетной аддитивности: $\mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$,
 $\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$. Так как ряд $\mu(A_1)$ - сходится, значит его остаток $\mu(A_n) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

2). $A \neq \emptyset$.

$B_1 = A_1 \setminus A$, $B_2 = A_2 \setminus A$. Тогда из предыдущего пункта следует, что $\mu(A_n) = \mu(B_n \cup A) =$ в силу аддитивности $= \mu(B_n) + \mu(A) \rightarrow \mu(A)$, при $n \rightarrow \infty$.

Следствие: Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n - измеримы, тогда $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Доказательство: Для доказательства достаточно перейти от множеств A_n к их дополнениям $B_n = E \setminus A_n$, от A к $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

§8. Измеримость открытых, замкнутых и Борелевских множеств на прямой.

Определение: Множество $A \subseteq \mathbf{R}$ называется измеримым по Лебегу (множество может быть неограниченным) если измеримо множество $A \cap [n, n+1) = A_n$, для любого $n \in \mathbf{Z}$. При этом $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ называется мерой Лебега множества A .

Пример: 1. Пусть $A = \mathbf{R}$, измеримо ли оно?

Да, так как $A_n = [n, n+1)$, $\mu(A_n) = 1$. Значит $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = +\infty$, $\mu(\mathbf{R}) = +\infty$.

2. Пусть $A = \mathbf{Q}$. $A_n = \mathbf{Q} \cap [n, n+1)$, $\mu(A_n) = 0$. $\mu(\mathbf{Q}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0 = 0$.

Замечание: Для неограниченных измеримых по Лебегу множеств справедливы все теоремы, которые мы доказали для ограниченных измеримых по Лебегу множеств.

Теорема: Все открытые множества на прямой измеримы по Лебегу.

Доказательство: Пусть A - открытое, $A \subseteq \mathbf{R}$.

1). Пусть $A \subseteq E$, то есть ограничено. По теореме о строении открытых множеств, множество $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, $\{P_k\}$ - совокупность попарно

непересекающихся интервалов. Так как совокупность измеримых множеств замкнута относительно счетных объединений, то A - измеримо. В силу счетной аддитивности меры Лебега, $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k)$.

2) A - неограничено. Значит $A_n = A \cap [n, n+1) = (A \cap (n, n+1)) \cup (A \cap \{n\})$ - измеримо, следовательно A - измеримо.

Счетная аддитивность меры будет выполняться и здесь, и так далее (повторение части пункта 1).)

Следствие 1. Замкнутые множества на прямой измеримы по Лебегу.

Доказательство: Дополнение к замкнутому множеству измеримо, так как является открытым. Значит само замкнутое множество измеримо как дополнение к измеримому множеству.

Определение: Множество в \mathbf{R} называется борелевским, если оно может быть получено из открытых и замкнутых множеств с помощью конечных или счетных объединений и пересечений.

Следствие 2. Борелевское множество в \mathbf{R} измеримо по Лебегу.