

Компактные метрические пространства

§1. Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbf{R}^n

Множество в метрическом пространстве называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре. Последовательность в метрическом пространстве называется *ограниченной*, если множество её значений ограничено.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности в пространстве \mathbf{R}^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, - ограниченная последовательность элементов из \mathbf{R}^n . Это значит, что найдется шар $U_r[a]$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, содержащий все члены этой последовательности. Рассмотрим координатные последовательности $\{x_i^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, \dots, n$. Из неравенств

$$|x_i^{(m)} - a_i| = \sqrt{(x_i^{(m)} - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - a_i)^2} = \rho(x^{(m)}, a) \leq r$$

вытекает, что координатные последовательности ограничены. Следовательно, из них можно выбрать сходящиеся подпоследовательности. Осуществим этот выбор так, чтобы выбранные подпоследовательности оказались координатными последовательностями по отношению к некоторой подпоследовательности последовательности $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Пусть $\{x_1^{(m_{k_1})}\}_{k_1=1}^{\infty}$ - некоторая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Последовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}_{k_1=1}^{\infty}$ не обязана сходить. Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{(m_{k_2})}\}_{k_2=1}^{\infty}$. И т.д., $\{x_n^{(m_{k_n})}\}_{k_n=1}^{\infty}$ - некоторая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n^{(m_{k_{n-1}}})\}_{k_{n-1}=1}^{\infty}$. Очевидно, что последовательности $\{x_1^{(m_{k_n})}\}_{k_n=1}^{\infty}, \dots, \{x_n^{(m_{k_n})}\}_{k_n=1}^{\infty}$ сходятся и являются координатными по отношению к последовательности $\{x^{(m_{k_n})}\}_{k_n=1}^{\infty}$. Это значит, что последовательность $\{x^{(m_{k_n})}\}_{k_n=1}^{\infty}$ сходится в \mathbf{R}^n . Осталось заметить, что она является подпоследовательностью исходной последовательности $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ■

§2. Компакты

Метрическое пространство X называется *компактом*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Совокупность $\{F_n : n \in \mathbf{N}\}$ множеств $F_n \subseteq X$ называется *центрированной*, если любое конечное пересечение этих множеств не пусто. Совокупность $\{G_n : n \in \mathbf{N}\}$ множеств $G_n \subseteq X$, называется *покрытием* X , если $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} G_n = X$. Покрытие X , состоящее из открытых множеств, называется *открытым*.

Теорема. Следующие утверждения для метрического пространства X эквивалентны:

- 1) X - компакт;
- 2) всякая центрированная система замкнутых подмножеств в X имеет непустое пересечение;
- 3) любое открытое покрытие X содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть X - компакт, $\{F_n : n \in \mathbf{N}\}$ - центрированная система замкнутых множеств из X . Конечное пересечение $F_1 \cap \dots \cap F_n$ обозначим \tilde{F}_n . Легко

убедиться, что $\tilde{F}_1 \supseteq \tilde{F}_2 \supseteq \dots \supseteq \tilde{F}_n \supseteq \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Выберем в каждом \tilde{F}_n по одной точке x_n . Из определения компакта вытекает, что из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть x - её предел. Так как множества \tilde{F}_n замкнуты, то $x \in \tilde{F}_n$. Следовательно, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

2) \Rightarrow 3). Допустим, что всякая центрированная система замкнутых подмножеств в X имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ - открытое покрытие X . Множества $F_n = X \setminus G_n$ замкнуты и

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset.$$

Следовательно, система $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ не является центрированной. Значит, найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $F_1 \cap \dots \cap F_m = \emptyset$. Вместе с тем,

$$F_1 \cap \dots \cap F_m = (X \setminus G_1) \cap \dots \cap (X \setminus G_m) = X \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_m) = \emptyset.$$

Это означает, что система множеств G_1, \dots, G_m образует покрытие X .

3) \Rightarrow 1). Допустим, что любое открытое покрытие X содержит конечное подпокрытие и, вместе с тем, у последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нет сходящихся подпоследовательностей. Из последнего условия вытекает, что множество F_m значений последовательности $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$

не имеет предельных точек. Значит, множества F_m замкнуты. Кроме того, $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = \emptyset$. С дру-

гой стороны, множества $G_m = X \setminus F_m$ открыты и $\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} (X \setminus F_m) = X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = X$. Выберем из покрытия $\{G_m : m \in \mathbb{N}\}$ конечное подпокрытие $\{G_1, \dots, G_N\}$. Существование такого подпо-

крытия приводит к противоречию $\emptyset = X \setminus \bigcup_{m=1}^N G_m = \bigcap_{m=1}^N F_m = F_N$ ■

У п р а ж н е н и е . Доказать, что замкнутое подмножество компакта является компактом.