

# Функции комплексной переменной

Всякое отображение  $f$  из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$  (векторную функцию двух действительных переменных) можно рассматривать как отображение из  $\mathbf{C}$  в  $\mathbf{C}$ . В этом случае отображение  $f$  называется *комплексной функцией комплексной переменной*, его координатные функции называются *вещественной частью* и *мнимой частью* функции  $f$  и обозначаются  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$  соответственно. Например, отображение

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 | (x, y) \rightarrow (x^2 - y^2, 2xy)$$

можно рассматривать как комплексную функцию  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} | z \rightarrow z^2$ . Вещественная и мнимая части функции  $f$  совпадают с функциями  $z \rightarrow x^2 - y^2$  и  $z \rightarrow 2xy$  соответственно.

Наряду с функциями из  $\mathbf{C}$  в  $\mathbf{C}$  рассматриваются и функции из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ . Например, функция  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  не определена в точке  $z = 0$  как функция из  $\mathbf{C}$  в  $\mathbf{C}$ , но определена всюду на  $\bar{\mathbf{C}}$  как функция из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ :  $w(0) = \infty, w(\infty) = 0$ .

В теории комплексных чисел важную роль играют *многозначные функции*. Так называются отображения  $F : \mathbf{C} \rightarrow \beta(\mathbf{C})$ , где  $\beta(\mathbf{C})$  — булеан  $\mathbf{C}$ . Комплексная функция  $f$  называется *однозначной ветвью* многозначной комплексной функции  $F$ , если функция  $f$  определена на области определения  $D_F$  функции  $F$  и для любого  $z \in D_F$  выполняется включение  $f(z) \in F(z)$ . Например, функция  $z \rightarrow \arg z$  является однозначной ветвью многозначной функции  $z \rightarrow \operatorname{Arg} z$ .

## 1. Предел функции комплексной переменной

Определение и свойства предела комплексной функции повторяют известные определение и свойства предела отображения из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ . Имеются лишь несущественные отличия, связанные с использованием комплексных терминологии и обозначений.

Пусть  $D_f$  — область определения комплексной функции  $f$ ,  $\overline{D_f}$  — её замыкание,  $z_0 \in \overline{D_f}$ ,  $A \in \mathbf{C}$ . Говорят, что *предел функции  $f$  в точке  $z_0$  равен  $A$*  или *функция  $f$  сходится к  $A$  при  $z \rightarrow z_0$* , если для любой последовательности комплексных чисел  $z_n \in D_f$ , сходящейся к  $z_0$ , последовательность значений функции  $f(z_n)$  сходится к  $A$ . Если  $A$  — предел функции  $f$  в точке  $z_0$ , то пишут  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  или  $f(z) \rightarrow A, z \rightarrow z_0$ . На практике удобна символьная запись этого определения:

$$f(z) \rightarrow A, z \rightarrow z_0 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (z_n \rightarrow z_0, z_n \in D_f \Rightarrow f(z_n) \rightarrow A).$$

Если  $z_0$  — изолированная точка области определения  $D_f$  функции  $f$ , то  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Таким образом, понятие предела значимо лишь для предельных точек области определения функции. Напомним, что совокупность всех предельных точек множества  $E$  называется его *производным множеством* и обозначается  $E'$ .

Перечислим основные свойства пределов:

- 1) комплексная функция может иметь только один предел в данной точке;
- 2) если комплексная функция  $f$  имеет отличный от нуля предел в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $0 < |z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z)| > 0$ ;
- 3) если комплексная функция  $f$  имеет предел в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$ , то существуют  $M > 0$  и  $\delta > 0$  такие, что для любых  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $0 < |z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z)| \leq M$ ;
- 4) комплексная функция  $f$  имеет пределом в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$  комплексное число  $A$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $0 < |z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z) - A| < \varepsilon$ ;

5) если  $z_0 \in \overline{D_f \cap D_g}$  и  $f(z) \rightarrow A$ ,  $g(z) \rightarrow B$  при  $z \rightarrow z_0$ , то  $f(z) + g(z) \rightarrow A + B$ ,  $f(z)g(z) \rightarrow AB$ , а при дополнительном условии  $B \neq 0$  и  $f(z)/g(z) \rightarrow A/B$  при  $z \rightarrow z_0$ ;

6) если  $f(z) \rightarrow w_0$  при  $z \rightarrow z_0 \in \overline{D_f}$ ,  $g(w) \rightarrow A$  при  $w \rightarrow w_0 \in \overline{D_g}$  и  $z_0 \in \overline{f^{-1}(D_g)}$ <sup>1</sup>, то сложная функция  $g \circ f : z \rightarrow g(f(z))$ , определённая на множестве  $f^{-1}(D_g)$ , имеет предел в точке  $z_0$  и он равен  $A$ .

Среди сформулированных свойств следует выделить как новые лишь теоремы о пределе произведения и частного комплексных функций (свойство 5)). Эти теоремы не вытекают из общих свойств отображений из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$  и связаны с дополнительной алгебраической структурой в  $\mathbf{C}$ . Вместе с тем, полезно провести независимые доказательства всех свойств пределов, придерживаясь следующей схемы: свойства 1) и 5) легко вытекают из свойств пределов последовательностей комплексных чисел; свойства 2) и 3) вытекают из свойства 4); свойства 4) и 6) доказываются формальным повторением доказательств их аналогов для действительных функций одной действительной переменной.

**ТЕОРЕМА 0.1.** *Предел функции  $f$  в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$  равен  $A$  тогда и только тогда, когда  $\operatorname{Re} f(z) \rightarrow \operatorname{Re} A$ ,  $\operatorname{Im} f(z) \rightarrow \operatorname{Im} A$  при  $z \rightarrow z_0$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Эта теорема является очевидным эквивалентом аналогичного утверждения для отображений из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 0.2.** *Предел функции  $f$  в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$  равен  $A \neq 0$  тогда и только тогда, когда существуют действительные функции  $r$  и  $\varphi$  такие, что*

$$f(z) = r(z)e^{i\varphi(z)} \quad (1)$$

для любого  $z \in D_f$  и  $r(z) \rightarrow |A|$ ,  $\varphi(z) \rightarrow \arg A$  при  $z \rightarrow z_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно в доказательстве теоремы ?? заменить действительную переменную  $t$  комплексной переменной  $z$  и точку  $t_0 \in \mathbf{R}$  точкой  $z_0 \in \mathbf{C}$ .  $\square$

Из представления (1) вытекает, что функция  $\varphi$  является однозначной ветвью многозначной функции  $\operatorname{Arg} f : z \rightarrow \operatorname{Arg} f(z)$ . Поэтому теорему 0.2 можно переформулировать так: предел функции  $f$  в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$  равен  $A \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $|f(z)| \rightarrow |A|$ ,  $\varphi(z) \rightarrow \arg A$  при  $z \rightarrow z_0$ , где  $\varphi$  — некоторая однозначная ветвь многозначной функции  $\operatorname{Arg} f$ .

Определение предела комплексной функции  $f$ , действующей из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ , формально остаётся тем же. Следует лишь помнить, что пределы последовательностей комплексных чисел в этом случае понимаются уже в смысле определения (??). Остановимся на свойствах пределов функций, действующих из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ . Прежде всего, свойства 1) и 6) остаются справедливыми и не требуют переформулировок. Свойство 2) следует подкорректировать:

2)' если комплексная функция  $f$ , действующая из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ , имеет отличный от нуля предел в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $0 < \rho_S(z, z_0) < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z)| > 0$ .

Свойство 3) теряет смысл так как любая функция  $f$ , действующая из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ , ограничена (в сферической метрике). Свойство 4) принимает следующий вид:

4)' комплексная функция  $f$  имеет пределом в точке  $z_0 \in \overline{D_f}$  комплексное число  $A \in \bar{\mathbf{C}}$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $0 < \rho_S(z, z_0) < \delta$ , выполняется неравенство  $\rho_S(f(z), A) < \varepsilon$ .

Доказательство свойств 1), 2)', 4)' и 6) осуществляется по той же схеме и предоставляется читателю в качестве упражнения. Остановимся лишь на допустимых изменениях в формулировках свойств 2)' и 4)', если функция  $f$  конечна, то есть не принимает значения  $\infty$ . В этом случае по теореме ?? неравенства  $0 < \rho_S(z, a) < \delta$  и  $\rho_S(f(z), A) < \varepsilon$  могут быть заменены

---

<sup>1</sup> $f^{-1}(D) := \{z \in D_f : f(z) \in D\}$

их евклидовыми аналогами  $0 < |z - a| < \delta$  (или  $|z|^{-1} < \delta$ , если  $a = \infty$ ) и  $|f(z) - A| < \varepsilon$  (или  $|f(z)|^{-1} < \varepsilon$ , если  $A = \infty$ ). В ситуациях  $a = \infty$  и  $A = \infty$  возможность описанных замен вытекает из теорем

$$\begin{aligned} f(z) \rightarrow \infty, z \rightarrow a &\Leftrightarrow f(z)^{-1} \rightarrow 0, z \rightarrow a, \\ f(z) \rightarrow A, z \rightarrow \infty &\Leftrightarrow f(z^{-1}) \rightarrow A, z \rightarrow 0, \\ f(z) \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty &\Leftrightarrow f(z^{-1})^{-1} \rightarrow 0, z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Эти теоремы справедливы для любой функции  $f$ , действующей из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ , так как  $\rho_S(z, \infty) = \rho_S(z^{-1}, 0)$ ,  $\rho_S(f(z), \infty) = \rho_S(f(z)^{-1}, 0)$ . Если же функция  $f$  конечна, то по теореме ?? сходимости в заключениях отмеченных теорем могут пониматься в евклидовом смысле.

Остаётся отметить, что для пределов функций, действующих из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ , теоремы о пределах суммы, произведения и частного (свойство 5)) справедливы в рамках разрешенных в  $\bar{\mathbb{C}}$  алгебраических операций:

$$\begin{aligned} f(z) \rightarrow A, g(z) \rightarrow B, z \rightarrow z_0, (A, B) \neq (\infty, \infty) &\Rightarrow f(z) + g(z) \rightarrow A + B, z \rightarrow z_0; \\ f(z) \rightarrow A, g(z) \rightarrow B, z \rightarrow z_0, (A, B) \neq (0, \infty), (\infty, 0) &\Rightarrow f(z)g(z) \rightarrow AB, z \rightarrow z_0; \\ f(z) \rightarrow A, g(z) \rightarrow B, z \rightarrow z_0, (A, B) \neq (0, 0), (\infty, \infty) &\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} \rightarrow \frac{A}{B}, z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

Справедливость этих теорем легко вытекает из свойств последовательностей в  $\bar{\mathbb{C}}$ .

## 2. Непрерывные функции комплексной переменной

Понятие предела лежит в основе определения непрерывной функции. Если область определения  $D_f$  комплексной функции  $f$  содержит точку  $z_0$ , существует предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  и он равен значению  $f(z_0)$  функции в точке  $z_0$ , то функцию  $f$  называют *непрерывной в точке  $z_0$* . Если комплексная функция непрерывна в каждой точке области определения  $D_f$ , то её называют *непрерывной*. Комплексная функция  $f$  *непрерывна на множестве  $D \subseteq D_f$* , если сужение функции  $f$  на множество  $D$  непрерывно. Если  $z_0$  — изолированная точка области определения функции  $f$ , то функция  $f$  автоматически является непрерывной в этой точке.

Из теорем 0.1 и 0.2 вытекают следующие утверждения.

**ТЕОРЕМА 0.3.** *Комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$  тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны функции  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$ .*

**ТЕОРЕМА 0.4.** *Пусть  $z_0 \in D_f$  и  $f(z_0) \neq 0$ . Функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0$  тогда и только тогда, когда непрерывна в точке  $z_0$  функция  $|f|$  и существует непрерывная в точке  $z_0$  однозначная ветвь  $\varphi$  многозначной функции  $\operatorname{Arg} f$ .*

Рассмотрим основные свойства непрерывных комплексных функций:

1) если комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$  и  $f(z_0) \neq 0$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z)| > 0$ ;

2) если комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$ , то существуют  $M > 0$  и  $\delta > 0$  такие, что для любых  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z)| \leq M$ ;

3) комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ;

4) если  $z_0 \in D_f \cap D_g$  и функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $z_0$ , то функции  $f + g$ ,  $fg$ , а при дополнительном условии  $g(z_0) \neq 0$ , и функция  $f/g$  непрерывны в точке  $z_0$ ;

5) если комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in f^{-1}(D_g)$ , а комплексная функция  $g$  непрерывна в точке  $f(z_0)$ , то сложная функция  $g \circ f : z \rightarrow g(f(z))$ , определённая на множестве  $f^{-1}(D_g)$ , непрерывна в точке  $z_0$ ;

6) непрерывная на компакте функция является ограниченной, то есть существует  $M > 0$  такое, что для любых  $z \in D_f$  выполняется неравенство  $|f(z)| \leq M$ ;

7) модуль  $|f|$  непрерывной на компакте функции достигает свои точные грани, то есть имеет максимум и минимум на этом компакте;

8) непрерывная на компакте  $K \subset \mathbb{C}$  комплексная функция  $f$  является равномерно непрерывной на нём, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z_1, z_2 \in K : |z_1 - z_2| < \delta) : |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon).$$

Свойства 1) – 5) непосредственно следуют из отмеченных выше свойств пределов. Свойства 6) и 7) отражают свойства функции  $|f|$  — действительной функции двух действительных переменных, и могут считаться известными. Остановимся лишь на доказательстве свойства 8). По теореме 0.3 действительные функции  $\operatorname{Re} f$  и  $\operatorname{Im} f$  непрерывны на компакте  $K$ . По теореме Кантора они равномерно непрерывны на  $K$ . Остаётся воспользоваться очевидным неравенством  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq |\operatorname{Re} f(z_1) - \operatorname{Re} f(z_2)| + |\operatorname{Im} f(z_1) - \operatorname{Im} f(z_2)|$ .

Определение непрерывной комплексной функции без каких-либо изменений распространяется и на функции, действующие из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ . Например, функция  $f : z \rightarrow \frac{1}{z}$  является непрерывной как функция, действующая из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ . В частности,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty = f(0)$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 = f(\infty)$ . Рассмотрим свойства непрерывных функций, действующих из  $\bar{\mathbb{C}}$  в  $\bar{\mathbb{C}}$ . Прежде всего, свойства 2), 6), 7) и 8) перестают быть справедливыми, точнее, их естественные аналоги — тривиальны. Аналоги остальных свойств непрерывных комплексных функций сохраняют значимость:

1)' если комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$  и  $f(z_0) \neq 0$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $\rho_S(z, z_0) < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z)| > 0$ ;

3)' комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in D_f$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $z \in D_f$ , удовлетворяющих условию  $\rho_S(z, z_0) < \delta$ , выполняется неравенство  $\rho(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$ ;

4)' если  $z_0 \in D_f \cap D_g$  и функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $z_0$ , то при условии  $(f(z_0), g(z_0)) \neq (\infty, \infty)$  функция  $f + g$  непрерывна в точке  $z_0$ , при условии  $(f(z_0), g(z_0)) \neq (0, \infty), (\infty, 0)$  функция  $fg$  непрерывна в точке  $z_0$ , а при условии  $(f(z_0), g(z_0)) \neq (0, 0), (\infty, \infty)$  функция  $f/g$  непрерывна в точке  $z_0$ ;

5) если комплексная функция  $f$  непрерывна в точке  $z_0 \in f^{-1}(D_g)$ , а комплексная функция  $g$  непрерывна в точке  $f(z_0)$ , то сложная функция  $g \circ f : z \rightarrow g(f(z))$ , определённая на множестве  $f^{-1}(D_g)$ , непрерывна в точке  $z_0$ .

### 3. Производная и дифференциал комплексной функции

Отображение из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$  дифференцируемо в точке, если в этой точке дифференцируемы его координатные функции, как функции  $n$  действительных переменных. Понятие дифференцируемого отображения из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$  допускает естественный перенос на комплексные функции. Дифференцируемые в указанном смысле комплексные функции называются ***Р-дифференцируемыми***.

Вместе с этим, наличие в  $\mathbb{C}$  специальной алгебраической структуры позволяет осуществить другой подход к понятию дифференцируемой комплексной функции. Пусть комплексная функция  $f$  определена в точке  $z_0$  и пусть  $z_0$  — предельная точка области определения функции  $f$ . Другими словами,  $z_0 \in D_f \cap D'_f$ . Тогда  $z_0$  — предельная точка множества  $D_f \setminus \{z_0\}$

и на этом множестве определено *разностное отношение*

$$z \rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Если существует предел этого отношения в точке  $z_0$ , то его называют *производной* функции  $f$  в точке  $z_0$  и обозначают  $f'(z_0)$  или  $\frac{df(z_0)}{dz}$ . Саму функцию  $f$  в этом случае называют *дифференцируемой* в точке  $z_0$ . Если  $D'_f \subseteq D_f$  и комплексная функция  $f$  дифференцируема в каждой точке области определения  $D_f$ , то её называют *дифференцируемой*. Комплексная функция  $f$  *дифференцируема на множестве*  $D \subseteq D_f$ , если сужение функции  $f$  на множество  $D$  дифференцируемо. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки  $z_0$ , то её называют *аналитической* в точке  $z_0$ . Если функция является аналитической в любой точке комплексной плоскости, то её называют *целой*.

Дифференцируемость функции  $f$  в точке  $z_0$  означает, что на множестве  $D_f \setminus \{z_0\}$  имеет место представление

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0), \quad (2)$$

где  $\varepsilon(z - z_0) = o(z - z_0)$  при  $z \rightarrow z_0$ . Произведение  $f'(z_0)(z - z_0)$  называется *дифференциалом* функции  $f$  в точке  $z_0$  и обозначается  $df(z_0)$ .

Основные свойства дифференцируемых действительных функций переносятся на комплексные функции:

1) если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке;

2) если функции  $f_1, f_2$  дифференцируемы в точке  $z_0$ , то функции  $f_1 + f_2, f_1 f_2$ , а при дополнительном условии  $f_2(z_0) \neq 0$ , и функция  $\frac{f_1}{f_2}$  являются дифференцируемыми в точке  $z_0$  и при этом

$$(f_1 + f_2)'(z_0) = f_1'(z_0) + f_2'(z_0), \quad (f_1 f_2)'(z_0) = f_1'(z_0) f_2(z_0) + f_1(z_0) f_2'(z_0),$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z_0) = \frac{f_1'(z_0) f_2(z_0) - f_1(z_0) f_2'(z_0)}{f_2^2(z_0)};$$

3) если функция  $f$  дифференцируема в точке  $w_0$ , а функция  $w$  дифференцируема в точке  $z_0$  и при этом  $w(z_0) = w_0$ , то в некоторой окрестности точки  $z_0$  определена сложная функция  $f \circ w$ , которая дифференцируема в точке  $z_0$  и

$$(f \circ w)'(z_0) = f'(w_0) w'(z_0);$$

4) производная функции аналитической в точке  $z_0$  функции, в свою очередь, является аналитической функцией в этой точке;

5) если функция  $f$  является аналитической в точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ , то в некоторой окрестности точки  $w_0 := f(z_0)$  определена обратная функция  $f^{-1}$ , которая является аналитической в точке  $w_0$  и  $(f^{-1})'(w_0) = (f'(z_0))^{-1}$ .

Свойства 1) – 3) можно доказать путем простой адаптации доказательств их действительных аналогов. Свойство 4) будет доказано позднее. Доказательство свойства 5) опирается на свойства дифференцируемых отображений из  $\mathbf{R}^2$  в  $\mathbf{R}^2$ . Рассмотрим это доказательство.

Пусть  $u : (x, y) \rightarrow \operatorname{Re} f(z + iy)$ ,  $v : (x, y) \rightarrow \operatorname{Im} f(z + iy)$ . Функцию  $f$  можно отождествить с отображением  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 | (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ , определенным и непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Якобиан этого отображения

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x v'_y - u'_y v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'|^2$$

отличен от нуля в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Значит, рассматриваемое отображение является взаимно однозначным отображением некоторой окрестности  $U$  точки  $(x_0, y_0)$  на некоторую

окрестность  $V$  точки  $(u_0, v_0) := (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ . Обратное отображение является непрерывно дифференцируемым в окрестности  $V$  и представляет там непрерывную комплексную функцию  $f^{-1}$  обратную к  $f$ . Пусть  $z, z' \in U$  и  $w := f(z), w' := f(z') \in V$ . Тогда

$$\frac{f^{-1}(w') - f^{-1}(w)}{w' - w} = \left( \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right)^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что обратная функция  $f^{-1}$  дифференцируема в окрестности  $V$  точки  $w_0$  и при этом  $(f^{-1})'(w) = (f'(z))^{-1}$  для любых  $w \in V$ .

#### 4. Условия Коши-Римана

Для упрощения записей воспользуемся терминологией приращений. Переход к этой терминологии полезно осуществить с несколько большим формализмом, чем это обычно принято. Пусть, как и прежде,  $z_0 \in D_f \cap D'_f$ . Функцию  $z \rightarrow f(z) - f(z_0)$  можно рассматривать как композицию  $\Delta f \circ \Delta z$  функции  $\Delta f : h \rightarrow f(z_0 + h) - f(z_0)$ , называемой *приращением функции  $f$  в точке  $z_0$* , и функции  $\Delta z : z \rightarrow z - z_0$ , называемой *приращением аргумента в точке  $z_0$* . Функция  $\Delta f$  определена на множестве  $D_f - z_0$ . Начало комплексной плоскости принадлежит этому множеству и является его предельной точкой. Функция  $\Delta z$  определена на множестве  $D_f$  и отображает его взаимно однозначно на множество  $D_f - z_0$ . Обратную функцию  $h \rightarrow h + z_0$  обозначим  $\Delta^{-1}z$ . Переменная  $h$ , принимающая значения в множестве  $D_f - z_0$  (— тождественное отображение множества  $D_f - z_0$  на множество  $D_f - z_0$ ), допускает представление  $h = \Delta z \circ \Delta^{-1}z$ .<sup>2</sup> Используя введённые обозначения, представление (2) можно переписать в эквивалентном виде  $\Delta f \circ \Delta z = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z)$  или  $\Delta f \circ \Delta z \circ \Delta^{-1}z = f'(z_0)\Delta z \circ \Delta^{-1}z + \varepsilon(\Delta z \circ \Delta^{-1}z)$ . Таким образом, дифференцируемость функции  $f$  в точке  $z_0$  означает, что на множестве  $(D_f - z_0) \setminus \{0\}$  имеет место представление

$$\Delta f(h) := f'(z_0)h + \varepsilon(h),$$

где  $\varepsilon(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ .

**ТЕОРЕМА 0.5.** *Для того чтобы комплексная функция  $f$  была дифференцируемой в точке  $z_0 := x_0 + iy_0 \in D_f \cap D'_f$ , необходимо и достаточно, чтобы функции*

$$u : (x, y) \rightarrow \operatorname{Re} f(z + iy), \quad v : (x, y) \rightarrow \operatorname{Im} f(z + iy)$$

*были дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$  как функции двух действительных переменных  $x, y$  и выполнялись условия Коши-Римана:*

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0).$$

*Производная функции  $f$  в точке  $z_0$  может быть вычислена по формуле*

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{i}(u'_y(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0)).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Дифференцируемость функции  $f$  в точке  $z_0$  влечет представление  $\Delta f(h) = f'(z_0)h + \varepsilon(h)$ , где  $\varepsilon(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ . Введем обозначения:  $a := \operatorname{Re} f'(z_0)$ ,  $b := \operatorname{Im} f'(z_0)$ ,  $\varepsilon_1(h) := \operatorname{Re} \varepsilon(h)$ ,  $\varepsilon_2(h) := \operatorname{Im} \varepsilon(h)$ ,  $h_1 := \operatorname{Re} h$ ,  $h_2 := \operatorname{Im} h$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f(h) &= (a + ib)(h_1 + ih_2) + \varepsilon_1(h) + i\varepsilon_2(h) = \\ &= ah_1 - bh_2 + \varepsilon_1(h) + i(bh_1 + ah_2 + \varepsilon_2(h)). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Пусть  $f : A \rightarrow B$  — функция,  $h$  — переменная в  $A$  или, другими словами, тождественное отображение  $A \rightarrow A$ ,  $f(h) := f \circ h$ . Полезно знать, что обозначения данной функции  $f : A \rightarrow B$  символами  $f$  и  $f(h)$  вполне согласованы с обозначением  $f(a)$  значения функции в точке  $a \in A$ . Действительно,  $h(a) = a$  и, следовательно,  $f(a) = f(h(a)) = (f \circ h)(a) = f(h)(a)$ .

С другой стороны,  $\Delta f(h) = \Delta u(h_1, h_2) + i\Delta v(h_1, h_2)$ , значит,

$$\Delta u(h_1, h_2) = ah_1 - bh_2 + \varepsilon_1(h), \quad \Delta v(h_1, h_2) = bh_1 + ah_2 + \varepsilon_2(h),$$

где  $\varepsilon_1(h) = o(h)$ ,  $\varepsilon_2(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ . Это означает, что функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$  и  $a = u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$ ,  $b = v'_x(x_0, y_0) = -u'_y(x_0, y_0)$ .

Обратно. Дифференцируемость функций  $u$  и  $v$  в точке  $(x_0, y_0)$  влечет представления:

$$\Delta u(h_1, h_2) = u'_x(x_0, y_0)h_1 + u'_y(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_1(h),$$

$$\Delta v(h_1, h_2) = v'_x(x_0, y_0)h_1 + v'_y(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_2(h),$$

где  $\varepsilon_1(h) = o(h)$ ,  $\varepsilon_2(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ . Учитывая, что

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \quad u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0),$$

получаем представление

$$\begin{aligned} \Delta f(h) &= \Delta u(h_1, h_2) + i\Delta v(h_1, h_2) = \\ &= \left( u'_x(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0) \right) h + \varepsilon(h). \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon(h) := \varepsilon_1(h) + i\varepsilon_2(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ . Это представление означает, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ . При этом  $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{i}(u'_y(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0))$ .  $\square$

**ТЕОРЕМА 0.6.** Если  $f(x_0 + iy_0) \neq 0$ , то дифференцируемость комплексной функции  $f$  в точке  $z_0 := x_0 + iy_0 \in D_f \cap D'_f$  означает, что существуют дифференцируемые в точке  $(x_0, y_0)$  действительные функции  $r$  и  $\varphi$  такие, что

$$f(x + iy) = r(x, y)e^{i\varphi(x, y)},$$

для любых  $x + iy \in D_f$  и при этом

$$r'_x(x_0, y_0) = r(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0), \quad r'_y(x_0, y_0) = -r(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0).$$

Производная функции  $f$  в точке  $z_0$  может быть вычислена по формуле

$$f'(z_0) = \frac{f(z_0)}{r(x_0, y_0)}(r'_x(x_0, y_0) + ir(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0)) = \frac{f(z_0)}{ir(x_0, y_0)}(r'_y(x_0, y_0) + ir(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0)).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Дифференцируемость функции  $f$  в точке  $z_0$  влечёт её непрерывность в этой точке. По теореме 0.4 существуют непрерывные в точке  $(x_0, y_0)$  действительные функции  $r$  и  $\varphi$  такие, что  $f(x + iy) = r(x, y)e^{i\varphi(x, y)}$  для любых  $x + iy \in D_f$ . При этом функция  $r : (x, y) \rightarrow \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ , очевидно, дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ . Так как  $r(x_0, y_0) \neq 0$  и одно из чисел  $\frac{u(x_0, y_0)}{r(x_0, y_0)}$  и  $\frac{v(x_0, y_0)}{r(x_0, y_0)}$  обязательно принадлежит интервалу  $(-1, 1)$ , то из представлений

$$\varphi(x, y) = \arccos \frac{u(x, y)}{r(x, y)}, \quad \varphi(x, y) = \arcsin \frac{v(x, y)}{r(x, y)}$$

вытекает, что функция  $\varphi$  тоже дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ . По теореме 0.5  $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{i}(u'_y(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0))$ , а по теореме ??

$$u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = (r'_x(x_0, y_0) + ir(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0))e^{i\varphi(x_0, y_0)},$$

$$u'_y(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0) = (r'_y(x_0, y_0) + ir(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0))e^{i\varphi(x_0, y_0)}.$$

Следовательно,  $u'_x(x_0, y_0) = r'_x(x_0, y_0)e^{i\varphi(x_0, y_0)}$ ,  $v'_x(x_0, y_0) = r(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0)e^{i\varphi(x_0, y_0)}$ ,  $u'_y(x_0, y_0) = r'_y(x_0, y_0)e^{i\varphi(x_0, y_0)}$ ,  $v'_y(x_0, y_0) = r(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0)e^{i\varphi(x_0, y_0)}$ . Отсюда вытекает, что  $r'_x(x_0, y_0) = r(x_0, y_0)\varphi'_y(x_0, y_0)$ ,  $r'_y(x_0, y_0) = -r(x_0, y_0)\varphi'_x(x_0, y_0)$ .

Обратно. Если функции  $r$  и  $\varphi$  дифференцируемы в точке  $t_0$ , то функции  $u = r \cos \varphi$  и  $v = r \sin \varphi$ , очевидно, дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ , а это означает **R**-дифференцируемость функции  $f$  в точке  $(x_0, y_0)$ . При этом

$$\begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) &= r'_x(x_0, y_0) \cos \varphi(x_0, y_0) - r(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0) \sin \varphi(x_0, y_0) = \\ &= r(x_0, y_0) [\varphi'_y(x_0, y_0) \cos \varphi(x_0, y_0) - \varphi'_x(x_0, y_0) \sin \varphi(x_0, y_0)] = v'_y(x_0, y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_y(x_0, y_0) &= r'_y(x_0, y_0) \cos \varphi(x_0, y_0) - r(x_0, y_0) \varphi'_y(x_0, y_0) \sin \varphi(x_0, y_0) = \\ &= -r(x_0, y_0) [\varphi'_x(x_0, y_0) \cos \varphi(x_0, y_0) + \varphi'_y(x_0, y_0) \sin \varphi(x_0, y_0)] = -v'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

□

Иногда независимая комплексная переменная представляется в тригонометрической или показательной формах записи. В этих случаях оказываются полезными следующие необходимые и достаточные условия дифференцируемости.

**ТЕОРЕМА 0.7.** Пусть  $z_0 := r_0 e^{i\varphi_0} \in D_f \cap D'_f$  и  $z_0 \neq 0$ . Для того чтобы комплексная функция  $f$  была дифференцируемой в точке  $z_0$ , необходимо и достаточно, чтобы функции

$$u : (r, \varphi) \rightarrow \operatorname{Re} f(re^{i\varphi}), \quad v : (r, \varphi) \rightarrow \operatorname{Im} f(re^{i\varphi})$$

были дифференцируемы в точке  $(r_0, \varphi_0)$  как функции двух действительных переменных  $r, \varphi$  и выполнялись условия:

$$u'_r(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{r_0} v'_\varphi(r_0, \varphi_0), \quad u'_\varphi(r_0, \varphi_0) = -r_0 v'_r(r_0, \varphi_0).$$

Производная функции  $f$  в точке  $z_0$  может быть вычислена по формуле

$$f'(z_0) = \frac{r_0}{z_0} (u'_r(r_0, \varphi_0) + i v'_r(r_0, \varphi_0)) = \frac{1}{i z_0} (u'_\varphi(r_0, \varphi_0) + i v'_\varphi(r_0, \varphi_0)).$$

**ТЕОРЕМА 0.8.** Пусть  $z_0 := \rho_0 e^{i\theta_0} \in D_f \cap D'_f$  и  $z_0 \neq 0$ . Если  $f(z_0) \neq 0$ , то дифференцируемость комплексной функции  $f$  в точке  $z_0$  означает, что существуют дифференцируемые в точке  $(\rho_0, \theta_0)$  действительные функции  $r$  и  $\varphi$  такие, что

$$f(\rho e^{i\theta}) = r(\rho, \theta) e^{i\varphi(\rho, \theta)},$$

для любых  $\rho e^{i\theta} \in D_f$  и при этом

$$r'_\rho(x_0, y_0) = \frac{r(\rho_0, \theta_0)}{\rho_0} \varphi'_\theta(\rho_0, \theta_0), \quad r'_\theta(\rho_0, \theta_0) = -\rho_0 r(\rho_0, \theta_0) \varphi'_\rho(\rho_0, \theta_0).$$

Производная функции  $f$  в точке  $z_0$  может быть вычислена по формуле

$$f'(z_0) = \frac{f(z_0)}{z_0} (r'_\rho(\rho_0, \theta_0) + i r(\rho_0, \theta_0) \varphi'_\rho(\rho_0, \theta_0)) = \frac{f(z_0)}{i \rho_0 z_0} (r'_\theta(\rho_0, \theta_0) + i r(\rho_0, \theta_0) \varphi'_\theta(\rho_0, \theta_0)).$$

Эти теоремы предлагается читателю доказать самостоятельно.

## 5. Геометрический смысл производной комплексной функции

Пусть функция  $f$  определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $z_0$ , дифференцируема в этой точке и  $f'(z_0) \neq 0$ . Область определения  $g$  и область значений  $G$  функции  $f$  интерпретируем как множества точек на комплексных плоскостях  $z$  и  $w$  соответственно.



**5.1. Геометрический смысл аргумента производной.** Выберем в  $g$  произвольную кривую  $l$ , проходящую через точку  $z_0$ . Будем считать, что кривая задана параметрическим уравнением  $z = \lambda(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ . Кроме того, полагаем, что  $\lambda(t_0) = z_0$ ,  $t_0 \in (a, b)$  и существует отличная от нуля производная  $\lambda'(t_0)$ . Эти условия гарантируют существование у кривой  $l$  касательной в точке  $z_0$

$$z = z_0 + \lambda'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Положительно ориентированная касательная образует угол  $\varphi_0 = \arg \lambda'(t_0)$  с положительным направлением действительной оси. Образ  $L$  кривой  $l$  при отображении  $f$  представляет собой кривую в  $\mathbf{C}$ , заданную параметрическим уравнением  $w = \Lambda(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$ , где  $\Lambda := f \circ \lambda$ , и проходящую через точку  $w_0 := f(z_0)$ . При этом

$$\Lambda'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \neq 0.$$

Действительно,  $\Lambda'(t_0) = (f \circ \lambda)'(t_0) = (u \circ \lambda)'(t_0) + i(v \circ \lambda)'(t_0) = u'_x(z_0)x'(t_0) + u'_y(z_0)y'(t_0) + i(v'_x(z_0)x'(t_0) + v'_y(z_0)y'(t_0)) = (u'_x(z_0) + iv'_x(z_0))(x'(t_0) + iy'(t_0)) = f'(z_0)\lambda'(t_0)$ , где  $x = \operatorname{Re} \lambda$ ,  $y = \operatorname{Im} \lambda$ ,  $u = \operatorname{Re} f$ ,  $v = \operatorname{Im} f$ . Следовательно, положительно ориентированная касательная

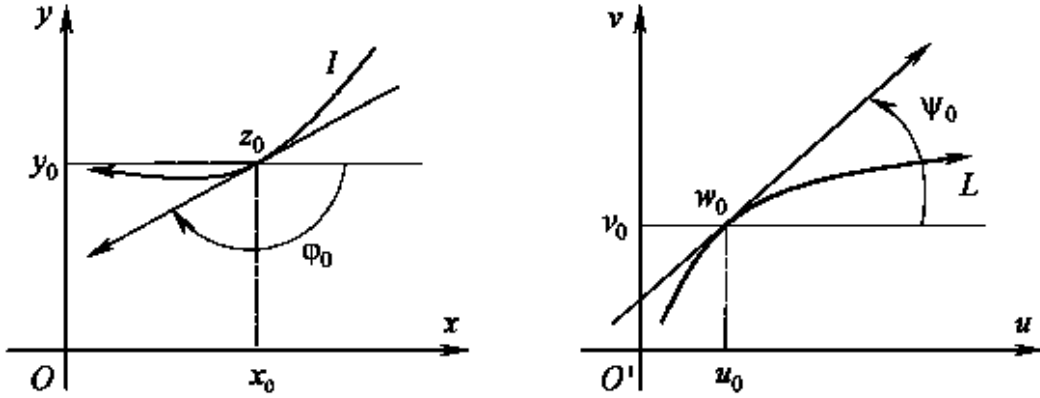
$$w = w_0 + \Lambda'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbf{R},$$

к кривой  $L$  в точке  $w_0$  образует угол  $\psi_0 = \arg [f'(z_0)\lambda'(t_0)]$  с положительным направлением действительной оси. Учитывая, что

$$\operatorname{Arg}[f'(z_0)\lambda'(t_0)] = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} \lambda'(t_0),$$

получаем

$$\psi_0 - \varphi_0 \in \operatorname{Arg} f'(z_0)$$



Таким образом, переход от точки  $z_0 \in l$  к её образу  $w_0 \in L$  связан с поворотом касательной на угол из  $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ . В этом и состоит *геометрический смысл аргумента производной* дифференцируемой в точке  $z_0$  комплексной функции.

Если через точку  $z_0$  проходят две кривые  $l_1$  и  $l_2$ , то положительно ориентированные касательные к этим кривым в точке  $z_0$  (при условии, что они существуют) образуют угол, который не отличается, ни по величине ни по направлению отсчета, от угла между положительно ориентированными касательными к образам  $L_1 := f(l_1)$ ,  $L_2 := f(l_2)$  в точке  $w_0 := f(z_0)$ . Отображения, обладающие таким свойством, называются *конформными* в точке  $z_0$ .

Понятие конформного отображения распространяется и на отображения из  $\bar{\mathbf{C}}$  в  $\bar{\mathbf{C}}$ . Отображение  $F : \bar{\mathbf{C}} \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$  называется конформным в точке  $z = \infty$ , если отображение  $z \rightarrow F(\frac{1}{z})$  является конформным в точке  $z = 0$ . Отображение  $F : \bar{\mathbf{C}} \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$  называется конформным в точке  $z \in F^{-1}(\infty)$ , если отображение  $z \rightarrow \frac{1}{F(z)}$  является конформным в этой точке.

**5.2. Геометрический смысл модуля производной.** Заметим, что в силу непрерывности функции  $z \rightarrow |z|$

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Отношение  $\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$  показывает как меняется длина вектора, изображающего число  $z - z_0$ , при отображении посредством функции  $f$ . Предел этого отношения показывает относительное изменение длины отрезков, один конец которых совпадает с  $z_0$ , а другой лежит вблизи точки  $z_0$ . При этом изменение длины не зависит от направления выбранного отрезка. Поэтому число  $|f'(z_0)|$  показывает относительное разряжение или уплотнение плоскости вблизи точки  $z_0$  при отображении ее посредством функции  $f$ .

## 6. Среднее значение на окружности

Пусть комплексная функция  $f$  определена и непрерывна в каждой точке кривой  $l_{R,\zeta}$ , задаваемой параметрическим уравнением  $z = \lambda(t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ , где  $\lambda(t) = Re^{it} + \zeta$ ,  $R > 0$ . Пусть  $t_j = \frac{2\pi}{n}j$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Комплексное число

$$S_R(f, \zeta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(t_j))$$

принято называть *средним значением функции  $f$  на окружности*  $\{z : |z - \zeta| = R\}$ . Замечаем, что число  $\frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(t_j))$  является интегральной суммой для интеграла  $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda(t)) dt$ . Следовательно, среднее значение непрерывной на окружности  $\{z : |z - \zeta| = R\}$  функции всегда существует и может быть вычислено по формуле

$$S_R(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{it} + \zeta) dt.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(\lambda(t_j))}{\lambda(t_j) - \zeta} (\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)) &= \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(t_j)) \left( \frac{\lambda(t_{j+1}) - \zeta}{\lambda(t_j) - \zeta} - 1 \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(t_j)) \left( \frac{e^{it_{j+1}}}{e^{it_j}} - 1 \right) = (e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1) \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(t_j)). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $n(e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1) = n(2\sin^2 \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}) \rightarrow 2\pi i$  при  $n \rightarrow \infty$ , получаем

$$S_R(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{R,\zeta}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Если комплексная функция  $f$  определена и непрерывна в каждой точке круга  $\{z : |z - \zeta| \leq R\}$ , то

$$\begin{aligned} S_r(f, \zeta) - f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it} + \zeta) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(re^{it} + \zeta) - f(\zeta)) dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при  $r \rightarrow 0$ . Следовательно,

$$f(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} S_r(f, \zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (3)$$

## 7. Интегральная формула Коши

Замечательным является то, что при условии аналитичности функции  $f$  замена кривой  $l_{r,\zeta}$  другой кривой, охватывающей точку  $\zeta$ , не влечёт изменение интеграла из правой части равенства (3). Точнее, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 0.9.** Если  $\zeta \in \{z : |z - \xi| < r\} \subset \{z : |z - \zeta| < R\}$  и функция  $f$  аналитична в каждой точке множества  $\{z : |z - \zeta| \leq R\} \setminus \{z : |z - \xi| < r\}$ , то

$$\int_{l_{R,\zeta}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{l_{r,\xi}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0. \quad (4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего рассмотрим случай  $\xi = \zeta$ . В этом случае разность в левой части равенства (4) совпадает с интегралом

$$I := \int_{(\partial\Delta, \lambda)} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

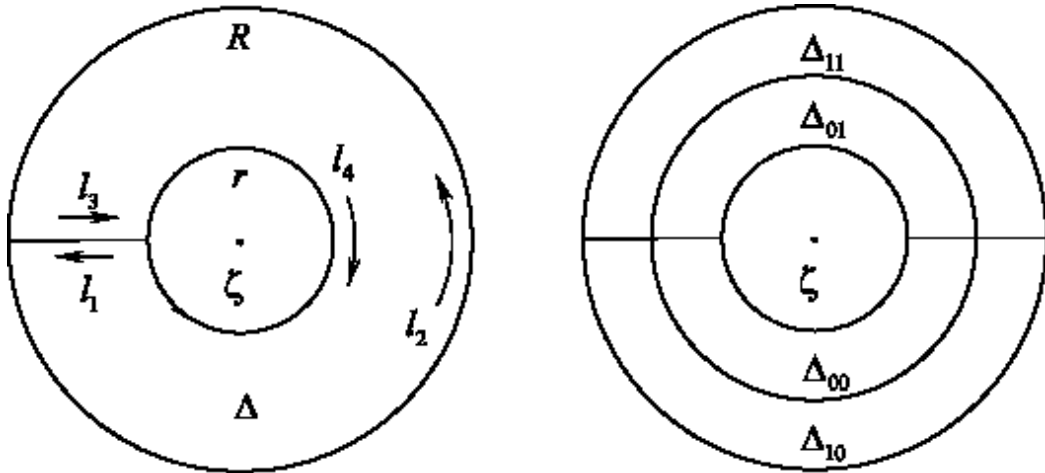
где  $\Delta$  — кольцевой сектор

$$\{z : r < |z - \zeta| < R, \alpha < \arg(z - \zeta) < \beta\},$$

$\alpha = -\pi$ ,  $\beta = \pi$ ,  $\partial\Delta$  — граница сектора  $\Delta$ . Границу сектора  $\Delta$  рассматриваем как носитель замкнутой кривой, заданной с помощью уравнения  $z = \lambda(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Функцию  $\lambda$  можно определить, например, следующим образом

$$\lambda(t) := \begin{cases} (t+r)e^{i\alpha} + \zeta & \text{при } t \in [0, h], \\ Re^{i(t+\alpha-h)} + \zeta & \text{при } t \in [h, h+\varphi], \\ (R+h+\varphi-t)e^{i\beta} + \zeta & \text{при } t \in [h+\varphi, 2h+\varphi], \\ re^{i(\beta+2h+\varphi-t)} + \zeta & \text{при } t \in [2h+\varphi, 2h+2\varphi], \end{cases} \quad (5)$$

где  $h := R - r$  — толщина сектора,  $\varphi := \beta - \alpha = 2\pi$  — угловой размер сектора.



Действительно, в этом случае область изменения параметра  $[a, b]$  совпадает с отрезком  $[0, 2h+2\varphi]$ . В определении (5) отрезок  $[0, 2h+2\varphi]$  разбит на четыре отрезка. Этому разбиению соответствует разбиение кривой  $(\partial\Delta, \lambda)$  на четыре частичные кривые, которые мы обозначим

$l_1, l_2, l_3, l_4$  соответственно. Видим, что кривая  $l_3$  может быть получена из кривой  $l_1$  переходом к тождественной кривой с помощью замены параметра  $t \rightarrow t + h + \varphi$  и последующей её переориентацией. Значит,

$$\int_{l_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = - \int_{l_3} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Кривая  $l_2$  тождественна кривой  $l_{R, \zeta}$  (замена параметра  $t \rightarrow t + h - \alpha$ ), а кривая  $l_4$  может быть получена из кривой  $l_{r, \zeta}$  заменой параметра  $t \rightarrow t + 2h + \varphi + \beta$  и последующей её переориентацией. Следовательно,

$$I = \int_{l_2} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz + \int_{l_4} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \int_{l_{R, \zeta}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{l_{r, \zeta}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Разобьём сектор  $\Delta$  окружностью  $|z - \zeta| = \frac{r+R}{2}$  и лучом  $\arg(z - \zeta) = \frac{\alpha+\beta}{2}$  на четыре сектора

$$\Delta_{k,s} := \{z : r_k < |z - \zeta| < R_k, \alpha_s < \arg(z - \zeta) < \beta_s\}, \quad k, s = 0, 1,$$

где  $r_k := r + k\frac{h}{2}$ ,  $R_k := \frac{r+R}{2} + k\frac{h}{2}$ ,  $\alpha_s := \alpha + s\frac{\varphi}{2}$ ,  $\beta_s := \frac{\alpha+\beta}{2} + s\frac{\varphi}{2}$ . Границу  $\partial\Delta_{k,s}$  сектора  $\Delta_{k,s}$  рассматриваем как носитель кривой  $z = \lambda_{k,s}(t)$ ,  $t \in [0, h + \varphi]$ . Функцию  $\lambda_{k,s}$  можно определить с помощью соотношения (5), в котором  $r, R, \alpha, \beta$  заменены на  $r_k, R_k, \alpha_s, \beta_s$  соответственно. Замечаем, что

$$I = \sum_{k=0}^1 \sum_{s=0}^1 I_{k,s},$$

где

$$I_{k,s} := \int_{(\partial\Delta_{k,s}, \lambda_{k,s})} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Тот из секторов  $\Delta_{k,s}$ , для которого выполняется неравенство  $|I_{k,s}| \geq \frac{|I|}{4}$  обозначим  $\Delta^{(1)}$ . Линейные и угловые размеры этого сектора определяются числами, которые мы обозначим символами  $r^{(1)}, R^{(1)}, \alpha^{(1)}, \beta^{(1)}$  соответственно, а параметризацию границы  $\partial\Delta^{(1)}$  обозначим  $\lambda^{(1)}$ . Далее продолжим процедуру дробления секторов и разобьём сектор  $\Delta^{(1)}$  окружностью  $|z - \zeta| = \frac{r^{(1)}+R^{(1)}}{2}$  и лучом  $\arg(z - \zeta) = \frac{\alpha^{(1)}+\beta^{(1)}}{2}$  на четыре сектора

$$\Delta_{k,s}^{(1)} := \{z : r_k^{(1)} < |z - \zeta| < R_k^{(1)}, \alpha_s^{(1)} < \arg(z - \zeta) < \beta_s^{(1)}\}, \quad k, s = 0, 1,$$

где  $r_k^{(1)} := r^{(1)} + k\frac{h}{2^2}$ ,  $R_k^{(1)} := \frac{r^{(1)}+R^{(1)}}{2} + k\frac{h}{2^2}$ ,  $\alpha_s^{(1)} := \alpha^{(1)} + s\frac{\varphi}{2^2}$ ,  $\beta_s^{(1)} := \frac{\alpha^{(1)}+\beta^{(1)}}{2} + s\frac{\varphi}{2^2}$ . Границу  $\partial\Delta_{k,s}^{(1)}$  сектора  $\Delta_{k,s}^{(1)}$  рассматриваем как носитель кривой  $z = \lambda_{k,s}^{(1)}(t)$ ,  $t \in [0, \frac{h}{2} + \frac{\varphi}{2}]$ . Функцию  $\lambda_{k,s}^{(1)}$  можно определить с помощью соотношения (5), в котором  $r, R, \alpha, \beta$  заменены на  $r_k^{(1)}, R_k^{(1)}, \alpha_s^{(1)}, \beta_s^{(1)}$  соответственно. Замечаем, что

$$I^{(1)} = \sum_{k=0}^1 \sum_{s=0}^1 I_{k,s}^{(1)},$$

где

$$I^{(1)} := \int_{(\partial\Delta^{(1)}, \lambda^{(1)})} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz, \quad I_{k,s}^{(1)} := \int_{(\partial\Delta_{k,s}^{(1)}, \lambda_{k,s}^{(1)})} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Тот из секторов  $\Delta_{k,s}^{(1)}$ , для которого выполняется неравенство  $|I_{k,s}^{(1)}| \geq \frac{|I^{(1)}|}{4^2}$  обозначим  $\Delta^{(2)}$  и т.д. В результате описанной процедуры мы построим последовательность вложенных друг в друга

секторов  $\Delta^{(n)}$  таких, что

$$\left| \int_{(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}.$$

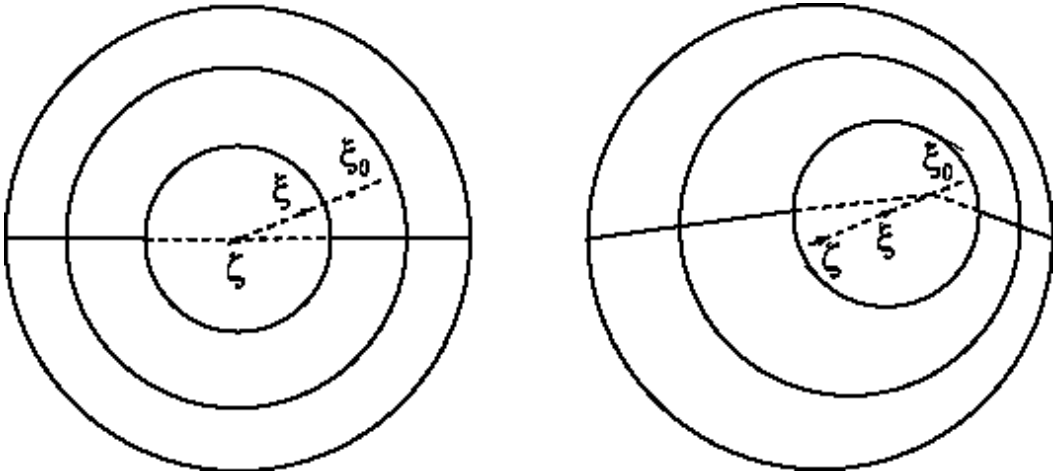
В силу полноты  $\mathbf{C}$  найдётся точка  $z_0$ , которая принадлежит замыканию каждого из секторов  $\Delta^{(n)}$ . Функция  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ . Значит, для любого  $z$  из окрестности круга  $\{z : |z - \zeta| \leq R\}$  имеет место представление

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

где  $\alpha$  — непрерывная в окрестности круга  $\{z : |z - \zeta| \leq R\}$  функция и  $\alpha(z_0) = 0$ . Отсюда следует, что

$$\frac{|I|}{4^n} \leq \left| \int_{(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \right| = \left| \int_{(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})} \frac{\alpha(z)(z - z_0)}{z - \zeta} dz \right| \leq \frac{\varepsilon_n 2R}{R} \frac{h}{2^n} \frac{\varphi R}{2^n},$$

где  $\varepsilon_n = \max_{\partial\Delta^{(n)}} \alpha \rightarrow 0$ . Действительно, интеграл  $\int_{(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})} dz$  равен нулю поскольку любая интегральная сумма для этого интеграла равна нулю. Интеграл  $\int_{(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})} \frac{dz}{z - \zeta}$  тоже равен нулю, так как число  $\frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})} \frac{dz}{z - \zeta}$  совпадает с индексом кривой  $(\partial\Delta^{(n)}, \lambda^{(n)})$  относительно точки  $\zeta$ , который в силу (??) равен нулю. Значит,  $I = 0$ .



Доказательство в случае  $\xi \neq \zeta$  сводится к рассмотренному путём замены функций  $\lambda, \lambda_{k,s}^{(n)}$  композициями  $u \circ \lambda, u \circ \lambda_{k,s}^{(n)}$  соответственно, где  $u$  — это отображение кольца  $\{z : r \leq |z - \zeta| \leq R\}$  на кольцо  $\{z : r \leq |z - \xi|, |z - \zeta| \leq R\}$ , осуществляемое по правилу

$$z \rightarrow z + \frac{\xi - \zeta}{R - r}(R - |z - \zeta|).$$

Отображение  $u$  переводит окружность  $|z - \zeta| = \rho, r \leq \rho \leq R$ , в окружность с тем же радиусом и центром в точке  $\frac{\zeta(\rho - r) + \xi(R - \rho)}{R - r}$ , а луч  $\arg(z - \zeta) = \theta, -\pi \leq \theta \leq \pi$ , исходящий из точки  $\zeta$ , отображение  $u$  переводит в луч исходящий из точки  $\xi_0 := \zeta + \frac{\xi - \zeta}{R - r}R \in \{z : |z - \xi| < \rho\}$ . Теорема доказана.  $\square$

Из доказанной теоремы и формулы (3) вытекает знаменитая *интегральная формула Коши*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

которая справедлива при следующих условиях: функция  $f$  аналитична в каждой точке круга  $\{z : |z - \zeta| \leq r\}$  и точка  $\zeta$  принадлежит кругу  $\{z : |z - \zeta| < r\}$ .

## 8. Непрерывная дифференцируемость аналитической функции

ЛЕММА 0.1. Если комплексная функция  $f$  аналитична в точке  $\zeta$ , то

$$f'(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz,$$

где  $l_{r,\zeta}$  — кривая, задаваемая параметрическим уравнением  $z = re^{it} + \zeta$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функция  $f$  дифференцируема в точке  $\zeta$ , значит, в некоторой окрестности точки  $\zeta$  имеет место представление

$$f(z) = f(\zeta) + f'(\zeta)(z - \zeta) + \alpha(z)(z - \zeta),$$

где  $\alpha$  — непрерывная в окрестности  $\zeta$  функция и  $\alpha(\zeta) = 0$ . Значит, для всех достаточно малых  $r$  имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz = \\ &= \frac{f(\zeta)}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{1}{(z - \zeta)^2} dz + \frac{f'(\zeta)}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{1}{z - \zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{\alpha(z)}{z - \zeta} dz = \\ &= f'(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{\alpha(z)}{z - \zeta} dz. \end{aligned}$$

Действительно, по формуле Коши  $\frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{1}{z - \zeta} dz = 1$  и

$$\int_{l_{r,\zeta}} \frac{1}{(z - \zeta)^2} dz = \frac{i}{r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2it} dt = -\frac{1}{2r} e^{-2it} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz - f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(re^{it} + \zeta) dt.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz - f'(\zeta) \right| \leq \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |\alpha(re^{it} + \zeta)| \leq \varepsilon$$

при всех достаточно малых  $r$ . Это и доказывает требуемую формулу.  $\square$

ТЕОРЕМА 0.10. Если функция  $f$  аналитична в точке  $\zeta$ , то её производная функция непрерывна в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу доказанной леммы и теоремы 0.9 при всех  $\xi$  из круга  $\{z : |z - \zeta| \leq \frac{r}{2}\}$  имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} f'(\zeta) - f'(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^2} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{(-2z(\xi - \zeta) + \xi^2 - \zeta^2)f(z)}{(z - \zeta)^2(z - \xi)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{r,\zeta}} \frac{(\xi - \zeta)(-2z + \xi + \zeta)f(z)}{(z - \zeta)^2(z - \xi)^2} dz. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f'(\zeta) - f'(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|\xi - \zeta|(r + \frac{r}{2}) \max_{l_{r,\zeta}} |f|}{r^2 \frac{r^2}{4}} 2\pi r \rightarrow 0$$

при  $\xi \rightarrow \zeta$ . □

## 9. Интегральная теорема Коши

Пусть комплексная функция  $f$  определена в точках компактной кривой  $l$ , задаваемой уравнением  $z = \lambda(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Из определения интеграла Римана-Стилтьеса вытекает, что интеграл  $\int_l f(z)dz$  совпадает с пределом интегральной суммы

$$\sigma_\tau(f, l) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda(\xi_j))(\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j)), \quad \xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$$

при стремлении мелкости разбиения  $\tau = \{t_j\}_{j=0}^n$ ,  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  к нулю. Рассмотрим функции  $u : (x, y) \rightarrow \operatorname{Re} f(x + iy)$ ,  $v : (x, y) \rightarrow \operatorname{Im} f(x + iy)$  и  $x : t \rightarrow \operatorname{Re} \lambda(t)$ ,  $y : t \rightarrow \operatorname{Im} \lambda(t)$ . Функции  $u$  и  $v$  определены на носителе кривой  $l$ , а функции  $x$  и  $y$  определены на отрезке  $[a, b]$ . Замечаем, что  $f(\lambda(\xi_j)) = u(x(\xi_j), y(\xi_j)) + iv(x(\xi_j), y(\xi_j))$  и  $\lambda(t_{j+1}) - \lambda(t_j) = (x(t_{j+1}) - x(t_j)) + i(y(t_{j+1}) - y(t_j))$ . Значит,

$$\sigma_\tau(f, l) = \sigma_\tau(u, -v, l) + i\sigma_\tau(v, u, l),$$

где

$$\sigma_\tau(u, -v, l) := \sum_{j=0}^{n-1} (u(x(\xi_j), y(\xi_j))(x(t_{j+1}) - x(t_j)) - v(x(\xi_j), y(\xi_j))(y(t_{j+1}) - y(t_j))),$$

$$\sigma_\tau(v, u, l) := \sum_{j=0}^{n-1} (v(x(\xi_j), y(\xi_j))(x(t_{j+1}) - x(t_j)) + u(x(\xi_j), y(\xi_j))(y(t_{j+1}) - y(t_j))).$$

Отсюда следует, что

$$\int_l f(z)dz = \int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (6)$$

В правой части этого равенства стоят криволинейные интегралы (по координатам) от векторных функций

$$(u, -v) : l \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad (v, u) : l \rightarrow \mathbf{R}^2$$

по кривой  $l$ , задаваемой параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Формула (6) сводит интегрирование комплексной функции к криволинейному интегрированию действительных функций. Равенство (6) может быть использовано в качестве определения интеграла  $\int_l f(z)dz$ , так как существование интеграла в левой части равенства (6) влечёт существование интегралов в правой части и наоборот (убедитесь в этом).

**ТЕОРЕМА 0.11.** Если комплексная функция  $f$  аналитична в каждой точке носителя замкнутой спрямляемой кривой  $l$  и в каждой внутренней точке этой кривой, то

$$\int_l f(z)dz = 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Производная функции  $f$  является непрерывной в  $G$ , значит, функции  $u : (x, y) \rightarrow \operatorname{Re} f(x + iy)$  и  $v : (x, y) \rightarrow \operatorname{Im} f(x + iy)$  являются непрерывно дифференцируемыми в области  $G$  и удовлетворяют в ней условиям Коши-Римана

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x.$$

По формуле Грина  $\int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy = \int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy = 0$ . Следовательно,  $\int_l f(z)dz = 0$ . Тем самым теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим ещё одно обобщение формулы (??).

**ТЕОРЕМА 0.12 (Коши).** Если комплексная функция  $f$  аналитична в каждой точке открытого множества  $G \subseteq \mathbb{C}$ , то для любой спрямляемой кривой  $l$ , удовлетворяющей условию  $l \cup \operatorname{int} l \subset G$ , имеет место равенство

$$\int_l f(z)dz = 0.$$

Интегральная теорема Коши естественным образом переносится на случай конечного семейства  $L$  замкнутых кривых  $l_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Носитель семейства кривых определяется как объединение носителей кривых из этого семейства. Договоримся не различать в обозначениях семейство кривых и его носитель. *Индексом семейства замкнутых кривых  $L$  относительно точки  $z_0 \notin L$* , в обозначениях  $\operatorname{ind}_{z_0} L$ , называется сумма  $\sum_{j=1}^n \operatorname{ind}_{z_0} l_j$ . Точка  $z_0 \notin L$  называется *внешней* (соотв. *внутренней*) точкой семейства замкнутых кривых  $L$ , если индекс семейства  $L$  относительно точки  $z_0$  равен 0 (соотв. не равен 0). При этом совокупность всех внешних (внутренних) точек семейства  $L$  называется *внешностью* (соотв. *внутренностью*) этого семейства и обозначается  $\operatorname{ext} L$  (соотв.  $\operatorname{int} L$ ).

**ТЕОРЕМА 0.13.** Если комплексная функция  $f$  аналитична на носителе конечного семейства замкнутых спрямляемых кривых  $L$  и во всех внутренних точках этого семейства, то для любого  $\zeta \notin L$  имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_l \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta) \operatorname{ind}_{\zeta} L.$$

Если функция  $f$  аналитична в односвязной области, содержащей положительно ориентированный контур  $l$ , то справедлива интегральная формула Коши:

$$\int_l \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } \zeta \in \operatorname{ext} l, \\ f(\zeta), & \text{если } \zeta \in \operatorname{int} l. \end{cases}$$

Действительно, если  $\zeta \in \operatorname{ext} l$ , то функция  $\frac{f(z)}{z - \zeta}$  удовлетворяет условиям интегральной теоремы Коши и, значит,  $\int_l \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = 0$ . Если же  $\zeta \in \operatorname{int} l$ , то интеграл по контуру  $l$  можно заменить интегралом по положительно ориентированной окружности сколь угодно малого радиуса с центром в точке  $\zeta$ . Следовательно, справедливость формулы в этом случае вытекает из формулы ( ).