

# Функциональные последовательности и ряды

## 1. Степенные ряды с комплексными членами

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (1)$$

где  $c_n, z_0 \in \mathbf{C}$ , называется степенным рядом с комплексными членами. Степенной ряд (1) сходится абсолютно в круге  $U_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\}$ , если для любого  $z \in U_r(z_0)$  сходится знакоположительный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n||z - z_0|^n$ . Степенной ряд (1) мажорируется в круге  $U_r[z_0] := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r\}$  знакоположительным рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , если для любых  $n = 0, 1, \dots$  и  $z \in U_r[z_0]$  выполняются неравенства  $|c_n||z' - z_0|^n \leq a_n$ .

**ТЕОРЕМА 0.1 (Абель).** *Если степенной ряд (1) сходится в точке  $z' \neq z_0$ , то он сходится абсолютно в круге  $U_{|z'-z_0|}(z_0)$  и мажорируется сходящимся знакоположительным рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$  в круге  $U_r[z_0]$ , где  $q = \frac{r}{|z'-z_0|} < 1$  и  $M$  не зависит от  $r < |z' - z_0|$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Зафиксируем комплексную переменную  $z$  так, чтобы выполнялось неравенство  $|z - z_0| < |z' - z_0|$ . В силу необходимого признака сходимости ряда с комплексными членами, общий член  $\{c_n(z' - z_0)^n\}_{n=0}^{\infty}$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z' - z_0)^n$  сходится к нулю, и значит, ограничен. Следовательно,

$$|c_n||z - z_0|^n = |c_n||z' - z_0|^n \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right|^n,$$

где  $\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < 1$ . Используя признак сравнения, делаем вывод, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n||z - z_0|^n$  сходится. Это означает абсолютную сходимость степенного ряда в круге  $U_{|z'-z_0|}(z_0)$ . При этом, если  $|z - z_0| \leq r < |z' - z_0|$ , то выполняется оценка

$$|c_n||z - z_0|^n \leq Mq^n,$$

где  $q := \frac{r}{|z'-z_0|} < 1$ . Это означает равномерную сходимость степенного ряда в круге  $U_r(z_0)$ . Теорема доказана.  $\square$

Из теоремы Абеля вытекает, что всякий степенной ряд либо всюду расходится (кроме начала), либо всюду сходится, либо существует  $R > 0$ , называемое радиусом сходимости степенного ряда, такое, что ряд абсолютно сходится для тех  $z$ , для которых  $|z - z_0| < R$  и расходится для тех  $z$ , для которых  $|z - z_0| > R$ . Открытый круг радиуса  $R$  с центром в точке  $z_0$  принято называть кругом сходимости степенного ряда.

Для примера рассмотрим ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Он расходится в точке  $z = 1$ . Следовательно, радиус сходимости этого ряда не может быть больше единицы. С другой стороны, для любого  $z \in (0; 1)$  рассматриваемый ряд сходится. Значит, по теореме Абеля он сходится в любой точке  $z$  модуль которой меньше единицы. Это означает, что радиус сходимости данного ряда равен 1.

## 2. Голоморфность аналитической функции

**ТЕОРЕМА 0.2.** *Если комплексная функция  $f$  голоморфна в точке  $z_0$ , то она аналитична в этой точке.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из представления  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ ,  $z \in U_R[z_0]$  вытекает, что  $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - 1 \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n||z - z_0|^{n-1}$ . По теореме Абеля в круге  $U_r[z_0]$ ,  $r < R$  ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} |c_n||z -$

$z_0|^{n-1}$  мажорируется знакоположительным рядом  $\sum_{n=2}^{\infty} Mq^n$ ,  $0 < q := \frac{r}{R} < 1$ . Остается заметить, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} Mq^n < \frac{Mq}{1-q} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0. \quad \square$$

**ТЕОРЕМА 0.3.** Если комплексная функция  $f$  аналитична в точках круга  $U_R(z_0) := \{z : |z - z_0| < R\}$ , то она совпадает в этом круге с суммой степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ , где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad 0 < r < R$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $z, \zeta \in U_R(z_0)$ ,  $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = r$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} &= \\ \frac{1}{\zeta - z} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} &= \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1 - \frac{(z - z_0)^N}{(\zeta - z_0)^N}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z} \frac{(z - z_0)^N}{(\zeta - z_0)^N}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z - z_0)^n &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \left( \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) d\zeta &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{(z - z_0)^N}{(\zeta - z_0)^N} d\zeta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} c_n(z - z_0)^n \right| &= \\ = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it} + z_0)}{re^{it} + z_0 - z} \frac{(z - z_0)^N}{(re^{it})^N} rie^{it} dt \right| &\leq \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it} + z_0)|}{|re^{it} + z_0 - z|} \frac{|z - z_0|^N}{r^{N-1}} dt &\leq \frac{Mr}{r - |z - z_0|} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^N \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$