

# Евклидовы пространства.

## §1. Линейные пространства

Напомним некоторые известные определения линейной алгебры. Множество  $X$  называется *аддитивной абелевой группой*, если в нем введена операция сложения, которая подчинена условиям:

- 1)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность);
- 2)  $x + y = y + x$  (коммутативность);
- 3)  $X$  содержит нулевой элемент  $\tilde{0}$  такой, что для любого  $x \in X$   $\tilde{0} + x = x + \tilde{0} = x$ ;
- 4) для каждого элемента  $x \in X$  существует противоположный элемент  $-x$ , такой что  $(-x) + x = x + (-x) = \tilde{0}$ .

Аддитивная абелева группа  $X$  называется *линейным* (или векторным) *пространством над  $\mathbf{R}$* , если в  $X$  определена операция умножения на действительные числа, удовлетворяющая следующим аксиомам:

- 1)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
- 2)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ;
- 3)  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ ;
- 4)  $1 \cdot x = x$ .

Система элементов  $x, y, \dots, w$  из линейного пространства  $X$  называется *линейно независимой*, если выполняется импликация:

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma w = \tilde{0}, \alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

В противном случае, систему элементов  $x, y, \dots, w \in X$  называют *линейно зависимой*. Для любой линейно зависимой системы элементов  $x, y, \dots, w \in X$  найдутся  $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbf{R}$ , не все равные нулю, такие, что  $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma w = \tilde{0}$ .

Если в линейном пространстве  $X$  найдется линейно независимая система, состоящая из  $n$  элементов, а любая система, состоящая из  $n+1$  элемента линейно зависима, то говорят, что пространство  $X$  имеет *размерность  $n$* . Если для любого  $n \in \mathbf{N}$  в пространстве  $X$  найдется линейно независимая система, состоящая из  $n$  элементов, то говорят, что пространство  $X$  *бесконечномерное*.

### Пример линейных пространств

**1.** Пространство  $\mathbf{R}^n$  является линейным пространством над  $\mathbf{R}$  относительно операций:  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ,  $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ . Нулевым элементом в  $\mathbf{R}^n$  является элемент  $(\underbrace{0, \dots, 0}_n) = \tilde{0}$ . Элементом, противоположным элементу  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , является элемент  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ . Выполнимость перечисленных выше аксиом очевидна.

Линейное пространство  $\mathbf{R}^n$  имеет размерность  $n$ . Действительно, с одной стороны, система элементов  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  линейно независима, так как равенство  $\alpha e_1 + \beta e_2 + \dots + \gamma e_n = \tilde{0}$  влечет равенство  $(\alpha, \beta, \dots, \gamma) = (0, 0, \dots, 0)$ . С другой стороны, любая система, состоящая из  $n+1$  элементов, линейно зависима. Действительно, равенство  $\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)} + \dots + \gamma x^{(n+1)} = 0$  будет иметь место, если  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha x_1^{(1)} + \dots + \gamma x_1^{(n+1)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha x_n^{(1)} + \dots + \gamma x_n^{(n+1)} = 0. \end{cases}$$

Но эта система уравнений всегда имеет ненулевое решение.

2. Пространство  $C[a, b]$  является линейным пространством над  $\mathbf{R}$  относительно операций:  $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ ,  $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$ . Нулевым элементом в  $C[a, b]$  является тождественный нуль  $x(t) \equiv 0$ . Элементом, противоположным элементу  $x = x(t)$ , является элемент  $-x = -x(t)$ .

Пространство  $C[a, b]$  имеет бесконечную размерность. Действительно, для любого  $n \in \mathbf{N}$  система элементов  $1, t, t^2, \dots, t^n \in C[a, b]$  линейно независима, так как многочлен  $\alpha + \beta t + \dots + \gamma t^n$  совпадает с тождественным нулем на отрезке  $[a, b]$  только при условии, что все его коэффициенты есть нули, т.е.  $\alpha = \beta = \dots = \gamma = 0$ .

## §2. Нормированные пространства

Линейное пространство  $X$  называется *нормированным пространством*, если на  $X$  определена действительная функция  $\|\cdot\|$ , называемая *нормой*, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ; причем  $\|x\| = 0$  только при  $x = \tilde{0}$ ;
- 2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in X$ ;
- 3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , каково бы ни было число  $\lambda$ .

Функция  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  удовлетворяет аксиомам метрики. Действительно,  $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$  только при условии  $x - y = \vec{0}$ , то есть  $x = y$ . Кроме того,  $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-1(y - x)\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии) и  $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (аксиома треугольника). Таким образом, всякое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ .

## Примеры нормированных пространств

1. Пространство  $\mathbf{R}^n$  является нормированным с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

2. Пространство  $\mathbf{R}_{\infty}^n$  является нормированным с нормой

$$\|x\| = \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

3. Пространство  $C[a, b]$  является нормированным с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad x = x(t), \quad t \in [a, b].$$

4. Пространство  $C_2[a, b]$  является нормированным с нормой

$$\|x\| = \left( \int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = x(t), \quad t \in [a, b].$$

Каждая из рассмотренных здесь норм определяет метрику уже введенную нами ранее с помощью соотношения  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Это позволяет обойтись без проверки аксиом метрики, так как их выполнимость обеспечивается выполнимостью аксиом нормы. Проверку выполнимости аксиом нормы, в свою очередь, можно отложить до следующего параграфа, где будет показано, что выполнимость аксиом нормы автоматически следует из выполнимости аксиом скалярного произведения.

### §3. Евклидовы пространства

Линейное пространство  $X$  над  $\mathbf{R}$  называется *евклидовым* если на декартовом произведении  $X \times X$  определена действительная функция  $(x, y)$ , называемая *скалярным произведением*, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $(x, y) = (y, x)$  для любых  $x, y \in X$ ;
- 2)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  для любых  $x_1, x_2, y \in X$ ;
- 3)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ , каковы бы ни были число  $\lambda$  и  $x, y \in X$ ;
- 4)  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \tilde{0}$ .

**Теорема.** Для любых элементов  $x$  и  $y$  евклидова пространства  $X$  выполняется неравенство Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

где  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Рассмотрим действительную неотрицательную функцию  $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$ , определенную всюду на  $\mathbf{R}$ . Из свойств скалярного произведения вытекает, что  $\varphi(\lambda) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2$  - многочлен второй степени. Так как  $\varphi(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$ , то дискриминант этого многочлена меньше либо равен нулю, то есть  $4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ . Следовательно,  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  ■

Убедимся, что произвольное евклидово пространство может рассматриваться как нормированное пространство (значит, и как метрическое пространство с метрикой  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ ). Для чего проверим выполнимость аксиом нормы, если положить  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Прежде всего, из аксиомы 4) вытекает, что  $\|x\| = \sqrt{(x, x)} \geq 0$ , причем равенство  $\|x\| = 0$  имеет место только в случае  $x = \tilde{0}$ . Кроме того, из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} \leq \|x\| + \|y\|.$$

Осталось заметить, что  $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

**Теорема.** Для любых элементов  $x$  и  $y$  евклидова пространства  $X$  выполняется правило параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Из свойств скалярного произведения вытекает, что

$$(x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y), \quad (x - y, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x, y).$$

Следовательно

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \blacksquare$$

#### Примеры евклидовых пространств

1. Пространство  $\mathbf{R}^n$  является евклидовым со скалярным произведением

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Проверка выполнимости аксиом скалярного произведения не составляет труда и предоставляется читателю. Неравенство Коши-Буняковского в этом пространстве принимает следующий вид:

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

2. Пространство  $C_2[a, b]$  является евклидовым со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt, \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Проверка выполнимости аксиом 1) - 3) не составляет труда. Убедимся в выполнимости аксиомы 4). Прежде всего, очевидно, что  $(x, x) = \int_a^b x^2(t) dt \geq 0$  для любого  $x \in C_2[a, b]$ . Вместе с

тем, если  $(x, x) = \int_a^b x^2(t) dt = 0$ , то  $x = 0$ . Действительно, если допустить, что  $x \neq 0$ , то найдется  $t_0 \in (a, b)$  такое, что  $x(t_0) > 0$ . Подберем  $\delta > 0$  таким, что  $U_\delta(t_0) \subset [a, b]$  и для всех  $t \in U_\delta(t_0)$  выполнено неравенство  $x(t) > x(t_0)/2$ . Тогда

$$(x, x) = \int_a^b x^2(t) dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} x^2(t) dt \geq \frac{x^2(t_0)}{2} 2\delta = x^2(t_0)\delta > 0.$$

Но это противоречит условию  $(x, x) = 0$ .

Запишем неравенство Коши-Буняковского в терминах пространства  $C_2[a, b]$ :

$$\left| \int_a^b x(t)y(t) dt \right| \leq \left( \int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_a^b y^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**3.** Пространство  $C[a, b]$  не является евклидовым, то есть норму этого пространства нельзя задать с помощью какого-либо скалярного произведения. Убедимся в этом, показав, что правило параллелограмма не выполняется в пространстве  $C[a, b]$ . Пусть  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $[a, b] = [0, \pi/2]$ . Тогда,

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x + y\| = \sup_{[0, \pi/2]} |\cos t + \sin t| = \sup_{[0, \pi/2]} \sqrt{2} |\sin(\pi/4 + t)| = \sqrt{2},$$

$$\|x - y\| = \sup_{[0, \pi/2]} |\cos t - \sin t| = \sup_{[0, \pi/2]} \sqrt{2} |\sin(\pi/4 - t)| = 1.$$

Следовательно,  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 < 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .