

Доказательство: Пусть $\alpha \in P \Rightarrow \alpha = 0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$, где $\varepsilon_i = 0$ или 2. Заменяя 2 на 1 получаем число в двоичной системе счисления. Это значит, что каждому числу из $[0;1]$ соответствует некоторое число из P , т.е. $[0;1]$ эквивалентно части P , таким образом мощность множества P равна мощности континуума.

Замечание: Таким образом P содержит кроме концов выброшенных интервалов и другие точки. Это те точки, которые в троичной записи не имеют в периоде 0.

§4. Мощность совершенного множества

Теорема: Всякое совершенное множество имеет мощность континуума.

Доказательство: Пусть F — совершенное множество. Рассмотрим две ситуации.

1. Пусть F — ограничено, следовательно существует $[a; b] \supseteq F$. Если $F = [a; b]$ — то все доказано; если F содержит какой-нибудь отрезок, то все доказано. Поэтому предположим, что $F \subset [a; b]$ и не содержит ни одного отрезка. Покажем, что $F \sim P$. Пусть $a = \inf F$, $b = \sup F$. Множество P получено удалением из $\Delta = [0;1]$ интервала $\delta = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, затем из отрезков Δ_0 , Δ_2 интервалов δ_0 , δ_2 и т.д. После удаления из отрезка $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_r}$ интервала $\delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k}$ от него останутся отрезки $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_k 0}$ и $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_k 2}$. Аналогичную операцию можно провести и с получением множества F . Так как F — совершенное, то оно получено из R удалением смежных интервалов. После того как выброшены лучи $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$. Самый большой и самый левый из остальных обозначим δ' ($\Delta' = [a; b]$). После его выбрасывания остаются отрезки Δ'_0 и Δ'_2 . Выбросим из них по самому большому и самому левому из интервалов δ'_0 и δ'_2 и т.д. Общая последовательность извлеченных интервалов δ' , δ'_0 , δ'_2 , δ'_{00} , δ'_{20} , δ'_{22} и т.д. Каждой точке $x \in F$ поставим в соответствие вложенную последовательность отрезков ее содержащих: Δ' , Δ'_{ε_1} , $\Delta'_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, ..., т.к. F не содержит ни одного отрезка, то эта последовательность отрезков — стягивающаяся, т.е. имеет в пересечении единственную точку x . Эта стягивающаяся последовательность отрезков порождает стягивающую последовательность Δ , Δ_{ε_1} , $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, Ей, в свою очередь, соответствует единственная точка $y \in P$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow y$ между множествами P и F . Значит $F \sim P$, т.е. F имеет мощность континуума.
2. Пусть F — неограниченно и $x \in F$. Если $(-\infty; x) \subset F$, то все доказано, если $(x; +\infty) \subset F$, то все доказано. Поэтому пусть существует $\alpha \in (-\infty; x)$ и $\beta \in (x; +\infty)$ такие, что $\alpha, \beta \notin F$. Множество $F \cap [\alpha; \beta]$ является совершенным и ограниченным. Оно имеет мощность континуума, значит F имеет мощность континуума.

§5. Мощность открытых и замкнутых множеств на прямой

Мощность открытых множеств на прямой, очевидно, равно мощности континуума. Перейдем к замкнутым множествам.

Определение: Точка x называется точкой конденсации множества E , если любая ее окрестность содержит несчетное множество точек из E .

Лемма 1: Любое открытое множество имеет мощность континуума.

Доказательство: Так как любая компонента открытого множества — интервал, то есть имеет мощность континуума.

Определение: Интервал $(a; b)$ будем называть правильным по отношению к множеству E , если выполнены два условия: $a, b \in Q$ и $E \cap (a; b)$ — не более чем счетно.

Лемма 2: если множество E не содержит в себе точек конденсации, то оно либо конечно либо счетно.

Доказательство: Интервал (a, b) назовем правильным, если 1) $a, b \in Q$; 2) $E \cap (a, b)$ — конечно или счетно. Покажем, что каждая точка $x \in E$ содержится в некотором правильном интервале. Пусть $x \in E$, следовательно x — не точка конденсации, значит выберем любую точку $x_0 \in E$, точка x_0 не является точкой конденсации множества E , следовательно существует $(c; d)$: $(c; d) \cap E$ — конечно или счетно. Точки c и d естественно можно выбрать рациональными. Значит $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap \delta_k)$, где δ_k — совокупность всех правильных интервалов.

Теорема: если множество E — несчетно, то множество всех его точек конденсации является совершенным множеством.

Доказательство: Покажем сначала, что множество E' точек конденсации множества E замкнуто. Пусть x_0 — предельная точка множества E' , значит в любой ее окрестности есть точки $x \in E'$. Поэтому в каждой из этих окрестностей несчетное множество точек из E , значит $x_0 \in E'$.

Далее полагаем, что E' не содержит изолированных точек. Допустим противное. Пусть x_0 — изолированная точка множества E' . Тогда в некоторой окрестности (a, b) этой точки нет точек (других) из E' . В (a, b) содержится несчетное множество точек из E , значит множество $(a; b) \cap E \setminus \{x_0\}$ содержит хотя бы одну точку конденсации, которая естественно является точкой конденсации множества E и лежит в E' . Это противоречие доказывает теорему.

Следствие 1: Каждое несчетное замкнутое множество F представимо в виде $F = F' \cup D$, где F' — совершенное множество, D — разве лишь счетное.

Следствие 2: Несчетное замкнутое множество имеет мощность континуума.

Доказательство: очевидно.