

Пространство комплексных чисел

1. Исторические предпосылки комплексного анализа

Развитие математики тесно связано с постоянным развитием понятия числа. Множество натуральных чисел \mathbf{N} не замкнуто относительно операции вычитания. Необходимость обращения операции сложения послужило основной причиной возникновения понятия отрицательного числа, что, в свою очередь, привело к введению в математику множества целых чисел \mathbf{Z} . Это множество не замкнуто относительно операции деления. Необходимость обращения операции умножения приводит к возникновению понятия обыкновенной дроби, соответственно, к возникновению множества рациональных чисел \mathbf{Q} . Возникновение множества действительных чисел \mathbf{R} не может быть объяснено чисто алгебраическими соображениями, оно имеет геометрические предпосылки и связано, прежде всего, с необходимостью исследования бесконечных (предельных, непрерывных и т.д.) математических процессов.

Первыми после действительных чисел (в начале XVIII века) в математику вошли мнимые числа iy , $y \in \mathbf{R}$, где i — мнимая единица (решение квадратного уравнения $x^2 = -1$). Вхождение мнимых чисел в математику обязано ряду математических открытий. Рассмотрим одно из них — тригонометрическую формулу Бернулли (1712 г.)

$$\frac{(i - \operatorname{tg} \alpha)^n}{(i + \operatorname{tg} \alpha)^n} = \frac{i - \operatorname{tg} n\alpha}{i + \operatorname{tg} n\alpha}, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2n} + \pi k, \frac{\pi}{2n} + \pi k\right], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Получим ее методом самого автора. Пусть $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} n\alpha$. Тогда

$$dx = (1 + x^2)d\alpha, \quad dy = n(1 + y^2)d\alpha.$$

Значит, $\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделёнными переменными. Проинтегрируем его, используя следующие представления:

$$\frac{n}{1+x^2} = \frac{n}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right), \quad \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{y-i} - \frac{1}{y+i} \right).$$

Получаем $\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n = c \frac{y-i}{y+i}$. Для нахождения константы c положим $\alpha = 0$. Тогда $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, $c = (-1)^{n+1}$. Отсюда получаем $\left(\frac{i-x}{i+x}\right)^n = \frac{i-y}{i+y}$. В чем и хотелось убедиться. Выражая y из этого соотношения, получим

$$y = i \frac{(i+x)^n - (i-x)^n}{(i+x)^n + (i-x)^n} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} n\alpha = i \frac{(i + \operatorname{tg} \alpha)^n - (i - \operatorname{tg} \alpha)^n}{(i + \operatorname{tg} \alpha)^n + (i - \operatorname{tg} \alpha)^n}.$$

Полезно проверить, что, например, при $n = 2$ и при $n = 3$ последняя формула дает известные формулы для тангенса двойного угла и тангенса тройного угла.

Вместе с тем, вхождению мнимых чисел в математику мешали часто возникающие парадоксы (*антиномии*). Рассмотрим один из них — парадокс Бернулли-Лейбница (1713 г.).

$$\begin{aligned} 2\pi i &= 8i \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 4 \int_0^1 \left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) dt = 4 \ln \frac{t-i}{t+i} \Big|_0^1 = \\ &= 4 \ln \frac{1-i}{1+i} - 4 \ln(-1) = 4 \ln \frac{i-1}{i+1} = \ln \left(\frac{i-1}{i+1} \right)^4 = \ln 1 \end{aligned}$$

Этот парадокс разрешен Эйлером в 1749 году, с помощью открытой им периодичности показательной функции комплексной переменной. Периодичность показательной функции влечет многозначность обратной функции — логарифмической функции комплексной переменной. В частности, среди значений логарифмической функции в точке 1 есть число $2\pi i$.

Упражнение. Попробуйте найти и устранить ошибку из серии равенств, приведших к выводу, что $2\pi i = \ln 1$.

2. Пространство комплексных чисел

Пусть \mathbf{R}^2 — декартова степень множества действительных чисел \mathbf{R} . Если определить в \mathbf{R}^2 операцию произведения на действительное число

$$\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$

и операцию сложения

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

то \mathbf{R}^2 становится конечномерным векторным (линейным) пространством над полем \mathbf{R} размерности 2. Если, дополнительно к этому, определить в \mathbf{R}^2 скалярное произведение

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

то \mathbf{R}^2 становится евклидовым пространством. Это, в свою очередь, позволяет рассматривать \mathbf{R}^2 как нормированное пространство, с нормой

$$\|(x, y)\| := \sqrt{((x, y), (x, y))} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и как метрическое пространство, с (евклидовой) метрикой

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Если определить в \mathbf{R}^2 еще и произведение

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

то оно становится полем: $(0, 0)$ — ноль, а $(1, 0)$ — единица этого поля. Решая уравнение $(x_1, y_1)(x, y) = (x_2, y_2)$, относительно (x, y) , можно получить формулу обращения операции умножения

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2 + y_1^2} \right).$$

В частности, деление на элемент $(0, 0)$ невозможно. Легко убедиться, что множество $(\mathbf{R}, 0) = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}$ замкнуто относительно операций, введенных в \mathbf{R}^2 , и является его подполем. Отображение $(\mathbf{R}, 0) \rightarrow \mathbf{R} \mid (x, 0) \rightarrow x$ является изоморфизмом поля $(\mathbf{R}, 0)$ на поле \mathbf{R} . Это означает, что поле \mathbf{R} изоморфно вложено в поле \mathbf{R}^2 , то есть поле \mathbf{R}^2 является расширением поля действительных чисел \mathbf{R} .

Множество \mathbf{R}^2 , рассматриваемое вместе со всеми, указанными выше, математическими структурами, называется *пространством комплексных чисел* и обозначается \mathbf{C} .

Для комплексных чисел используют упрощенные обозначения. Так пара $(x, y) \in \mathbf{C}$ обозначается одной буквой, например, z . При этом, первый элемент этой пары называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Re} z$, а второй элемент этой пары называют *мнимой частью* комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Im} z$. Неотрицательное действительное число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называют *модулем* комплексного числа z и обозначают $|z|$. Комплексное число $(x, 0) \in (\mathbf{R}, 0)$ отождествляется с действительным числом x и обозначается просто x . В частности, единица $(1, 0)$ поля \mathbf{C} обозначается 1, а ноль $(0, 0)$ поля \mathbf{C} обозначается 0. Комплексное число $(0, 1)$ обозначают i и называют *мнимой единицей*. Отметим основное свойство мнимой единицы:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Комплексное число $(x, -y)$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = (x, y)$ и обозначается \bar{z} . Переход от произвольного комплексного числа к его сопряженному называется *операцией сопряжения*.

Упражнение. 1. Получить формулу обращения операции умножения комплексных чисел. 2. Убедиться в выполнимости следующих соотношений: $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| +$

$|\operatorname{Im} z|, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$. 3. Убедиться в выполнении следующих свойств операции сопряжения: $\bar{\bar{z}} = z, z\bar{z} = |z|^2, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.

3. Формы записи комплексных чисел

Рассмотрим \mathbf{C} как векторное пространство над полем \mathbf{R} и выберем произвольный вектор $z \in \mathbf{C}$. Используя разложение векторов по ортам, можно получить

$$z = \operatorname{Re} z (1, 0) + \operatorname{Im} z (0, 1) = (\operatorname{Re} z, 0) + (0, 1) \operatorname{Im} z.$$

Согласно принятым обозначениям

$$z = x + iy,$$

где $x := \operatorname{Re} z, y := \operatorname{Im} z$. Такое представление комплексных чисел называется *алгебраической формой* записи. Это название объясняется тем, что алгебраические операции над комплексными числами, с использованием алгебраической формы записи, осуществляются по обычным алгебраическим правилам (убедитесь в этом). Непосредственно из определения вытекает, что алгебраическая форма записи комплексных чисел обладает следующим *свойством единственности*

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Наряду с алгебраической формой записи комплексных чисел используются и другие. Если комплексное число $z := x + iy$ отлично от нуля, то его модуль $|z|$ тоже отличен от нуля. Поэтому возможно представление $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$. При этом

$$-1 \leq \frac{x}{|z|} \leq 1, -1 \leq \frac{y}{|z|} \leq 1, \left(\frac{x}{|z|} \right)^2 + \left(\frac{y}{|z|} \right)^2 = 1.$$

Множество всех решений $\varphi \in \mathbf{R}$ системы уравнений

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}$$

называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Учитывая, что $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ при $\varphi \in [0, \pi]$, имеем

$$\operatorname{Arg} z = \left\{ \arccos \frac{x}{|z|} + 2\pi k : k \in \mathbf{Z} \right\}, \quad y \geq 0;$$

$$\operatorname{Arg} z = \left\{ -\arccos \frac{x}{|z|} + 2\pi k : k \in \mathbf{Z} \right\}, \quad y < 0.$$

Действительно, из уравнения $\cos \varphi = \frac{x}{|z|}$ вытекает, что $\varphi \in \left\{ \pm \arccos \frac{x}{|z|} + 2\pi k : k \in \mathbf{Z} \right\}$. При этом $\sin \left(\pm \arccos \frac{x}{|z|} + 2\pi k \right) = \pm \sin \arccos \frac{x}{|z|} = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \arccos \frac{x}{|z|}} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{|z|^2}} = \pm \frac{|y|}{|z|}$.

Таким образом, на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ находится единственный элемент множества $\operatorname{Arg} z$. Этот элемент называется *главным значением аргумента* комплексного числа z и обозначается $\arg z$. Легко увидеть, что

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{при } y \geq 0; \\ -\arccos \frac{x}{|z|}, & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

и при этом

$$\operatorname{Arg} z = \{ \arg z + 2\pi k : k \in \mathbf{Z} \}.$$

Из определения аргумента вытекает, что для всякого отличного от нуля комплексного z имеет место представление

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

где $r = |z|$, $\varphi \in \text{Arg } z$. Такое представление отличных от нуля комплексных чисел называется *тригонометрической формой записи*.

Свойство единственности тригонометрической формы записи состоит в следующем:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow r_1 = r_2, \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \in \mathbf{Z}.$$

Убедимся в его справедливости. Прежде всего, из свойства единственности алгебраической формы записи комплексного числа вытекает, что $r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2$, $r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2$. Возводим обе части каждого из этих равенств в квадрат и складываем. Получаем $r_1^2 = r_2^2$. Значит, $r_1 = r_2$. При этом из равенства $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$ вытекает, что $\varphi_1 \in \{\pm \varphi_2 + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$, а из равенства $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$ вытекает, что $\varphi_1 \in \{\varphi_2 + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$. Обратная импликация очевидна.

Упражнение. Доказать, что главное значение аргумента комплексного числа $z := x + iy$ при $x \neq 0$ может быть вычислено по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{при } x > 0; \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{при } x < 0, y \geq 0; \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi & \text{при } x < 0, y < 0; \end{cases}$$

4. Геометрический смысл операций над комплексными числами

Пространство комплексных чисел \mathbf{C} , как множество, совпадает с декартовым произведением $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Поэтому элементы \mathbf{C} можно изображать точками координатной плоскости или векторами, с началом в начале координат. Используемая, при этом, координатная плоскость (плоскость с заданной на ней прямоугольной декартовой системой координат), называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс Ox — *действительной осью*, ось ординат Oy — *мнимой осью*, точка O — *началом комплексной плоскости*. Декартовы координаты x, y точки (вектора), изображающей данное комплексное число z , совпадают с действительной и мнимой частями числа z соответственно

$$x = \text{Re } z, \quad y = \text{Im } z$$

Совместим с прямоугольной декартовой системой координат полярную систему координат, выбрав действительную ось в качестве полярной оси и начало координат, точку O , в качестве полюса. При этом каждая точка комплексной плоскости, отличная от начала координат, приобретает полярные координаты r и φ , где r — полярный радиус, а φ — полярный угол. Понятно, что полярный радиус r точки комплексной плоскости, изображающей комплексное число z совпадает с модулем этого числа, а полярный угол φ совпадает с главным значением аргумента этого числа

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Столь же простые геометрические интерпретации имеют и основные алгебраические операции над комплексными числами. Так операциям сложения и вычитания комплексных чисел соответствует сложение и вычитание изображающих их векторов на комплексной плоскости, осуществляемому по известному "правилу параллелограмма". Операции умножения на положительное действительное число λ соответствует гомотетия с центром в начале и коэффициентом гомотетии λ . Операции умножения на -1 соответствует центральная симметрия относительно начала. Операции сопряжения соответствует осевая симметрия относительно действительной оси.

Остановимся на геометрических интерпретациях операций умножения и деления комплексных чисел. Пусть $z_1 := r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 := r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два произвольных комплексных числа, отличных от нуля, где $r_1 := |z_1|$, $r_2 := |z_2|$, $\varphi_1 \in \text{Arg } z_1$, $\varphi_2 \in \text{Arg } z_2$. Из теорем сложения для тригонометрических функций действительной переменной вытекает, что

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

На основании свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа заключаем, что

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg } z_1 z_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Это означает, в частности, что умножению числа z_1 на число z_2 соответствует поворот (относительно начала координат) вектора, изображающего первое число, на любой угол из аргумента второго числа и последующая гомотетия с центром в начале и с коэффициентом гомотетии $|z_2|$.

Учитывая следующие соотношения

$$\text{Arg } \bar{z}_2 = -\text{Arg } z_2 := \{\varphi \in \mathbf{R} : -\varphi \in \text{Arg } z_2\},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

заключаем, что

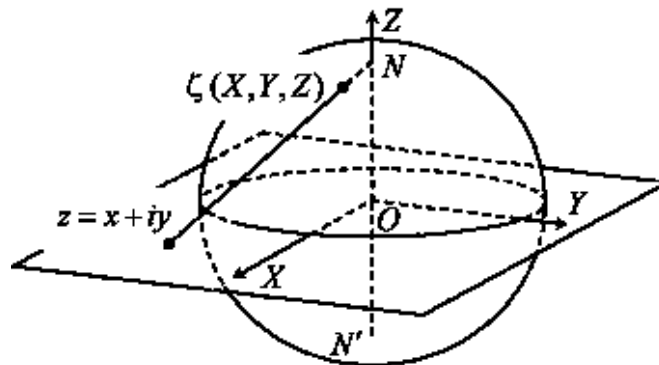
$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Это означает, в частности, что делению числа z_1 на число z_2 соответствует поворот (относительно начала координат) вектора, изображающего первое число, на любой угол из $-\text{Arg } z_2$ и последующая гомотетия с центром в начале и с коэффициентом гомотетии $1/|z_2|$.

Упражнение. В чем состоит геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел. Описать геометрически множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующему неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$, где z_0 — фиксированное комплексное число, $\varepsilon > 0$ — фиксированное действительное число.

5. Стереοграфическая проекция

В ряде вопросов комплексного анализа пространство комплексных чисел удобно трактовать не как плоскость, а как сферу в трехмерном векторном пространстве. Возможность использования такой геометрической интерпретации пространства \mathbf{C} предоставляет специальное отображение комплексной плоскости на сферу, называемое *стереοграфической проекцией*.



Пусть S — сфера единичного радиуса в трехмерном векторном пространстве. Выберем центр сферы S в качестве начала некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Координаты переменной точки в этой системе координат будем обозначать X, Y, Z . Сферу S , рассматриваемую как метрическое пространство с метрикой, индуцированной из объемлющего пространства

$$\rho(\zeta_1, \zeta_2) = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2},$$

называют *сферой Римана*. Легко увидеть, что сфера Римана является компактным метрическим пространством и $\rho(\zeta_1, \zeta_2) \leq \rho(N', N) = 2$ для любых $\zeta_1, \zeta_2 \in S$. Стереографической проекцией называется соответствие $z \rightarrow \zeta$ между точками комплексной плоскости \mathbf{C} , которую мы отождествляем с координатной плоскостью XOY (причем, полагаем, что действительная ось совпадает с осью OX , а мнимая ось совпадает с осью OY), и точками сферы S , с помощью прямых, проходящих через точку $N := (0, 0, 1)$. Напишем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $N \in S$ и точку $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Получим

$$X = X_0 + pt, \quad Y = Y_0 + qt, \quad Z = Z_0 + st,$$

где $X_0 = 0, Y_0 = 0, Z_0 = 1$ — координаты точки N ; $p = x, q = y, s = -1$ — координаты направляющего вектора \overrightarrow{Nz} ; t — параметр, принимающий значения в \mathbf{R} . Используя эти уравнения и каноническое уравнение сферы S : $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, получим $(xt)^2 + (yt)^2 + (1-t)^2 = 1$. Значит, $t = 2/(|z|^2 + 1)$. Отсюда вытекает следующее представление стереографической проекции в координатной форме:

$$X = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Из равенства $Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$ вытекает, что $\frac{2}{|z|^2 + 1} = 1 - Z$. Значит, координатное представление отображения обратного стереографической проекции имеет следующий вид:

$$x = \frac{X}{1 - Z}, \quad y = \frac{Y}{1 - Z}.$$

Из этих формул вытекает, что стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости и точками множества $S \setminus \{N\}$. Вершина сферы, точка N , не соответствует ни одной точке комплексной плоскости.

Зафиксируем значение аппликаты Z , полагая $-1 \leq Z < 1$. Координаты точек сферы S , имеющих одну и ту же аппликату Z , удовлетворяют уравнению $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$. Соответствующие точки $z = x + iy$ комплексной плоскости образуют окружность $|z| = \sqrt{(1 + Z)/(1 - Z)}$, с центром в начале. Действительно,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 - Z)^2} = \frac{1 - Z^2}{(1 - Z)^2} = \frac{1 + Z}{1 - Z}.$$

При непрерывном стремлении Z к 1, радиус этой окружности стремится непрерывно к $+\infty$. Таким образом, внешности кругов с центром в начале отображаются стереографической проекцией на сферические окрестности точки N . Это позволяет трактовать точку N как точку, соответствующую *бесконечности*. При этом внешности кругов с центром в начале выступают в роли окрестностей бесконечности в комплексной плоскости.

6. Расширенная комплексная плоскость

В ряде вопросов оказывается удобным трактовать бесконечность как отдельную точку, дополняющую пространство комплексных чисел. Эту точку принято называть *бесконечно удаленной точкой* (или *бесконечностью*) и обозначать символом ∞ . При этом множество

$\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ обозначают символом $\bar{\mathbf{C}}$ и называют *расширенной комплексной плоскостью*. Для элемента ∞ объявляются лишёнными смысла такие понятия как $\operatorname{Re} \infty$, $\operatorname{Im} \infty$, $\operatorname{Arg} \infty$, $\arg \infty$ (отметим, что нет смысла и в понятиях $\operatorname{Arg} 0$, $\arg 0$). Что касается модуля бесконечно удаленной точки $|\infty|$, то для него вводится обозначение $+\infty$ и постулируется, что $+\infty > |z|$ для любого $z \in \mathbf{C}$.

Имеют смысл следующие алгебраические операции с участием ∞ :

$$1) \infty \pm z = z \pm \infty = \infty, \quad z/\infty = 0, \quad \infty/z = \infty \quad \forall z \in \mathbf{C};$$

$$2) \infty z = z \infty = \infty \quad \forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad \infty/0 = \infty.$$

Вместе с тем, объявляются лишёнными смысла операции, называемые *неопределенностями*: $\infty \pm \infty$, 0∞ , $0/0$, ∞/∞ . Таким образом, в $\bar{\mathbf{C}}$ возможно деление на ноль чисел отличных от нуля. Возможно и деление на бесконечность чисел отличных от бесконечности.

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами $\bar{\mathbf{C}}$ и точками сферы S . Это позволяет считать сферу Римана S геометрической интерпретацией $\bar{\mathbf{C}}$. Геометрическим аналогом ∞ является точка N на сфере Римана S . Естественнo перенести на $\bar{\mathbf{C}}$ метрическую структуру из S : $\rho_S(z_1, z_2) := \rho(\zeta_1, \zeta_2)$. Используя представление стереографической проекции в координатной форме для любых $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ получаем

$$\begin{aligned} \rho_S(z_1, z_2) &= \rho(\zeta_1, \zeta_2) = \\ &= \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} = \sqrt{2(1 - X_1 X_2 - Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1) - 8x_1 x_2 - 8y_1 y_2 - 2(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)}}{\sqrt{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}} = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}}, \\ \rho_S(z, \infty) &= \rho(\zeta, N) = \sqrt{X^2 + Y^2 + (1 - Z)^2} = \sqrt{2 - 2Z} = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}, \\ \rho_S(\infty, \infty) &= \rho(N, N) = 0. \end{aligned}$$

Расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbf{C}}$, с этой метрикой, является метрическим пространством изометричным сфере Римана S . Отсюда вытекает, что пространство $\bar{\mathbf{C}}$ является компактным метрическим пространством. При этом для любых $z_1, z_2 \in \bar{\mathbf{C}}$ выполняются очевидные неравенства $\rho_S(z_1, z_2) \leq 2 = \rho_S(0, \infty)$.

Упражнение. Доказать, что пространство $\bar{\mathbf{C}}$, с определенной выше метрикой, является полным метрическим пространством. Полезно провести доказательство без использования изометричности пространств $\bar{\mathbf{C}}$ и S .

7. Метрики в \mathbf{C}

7.1. Определение метрик. Нет необходимости различать \mathbf{R}^2 и \mathbf{C} как метрические пространства. Их своеобразие заметно лишь в связи с использованием различных обозначений. Так *евклидова метрика* в \mathbf{R}^2 , определяемая с помощью соотношения

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

в обозначениях, связанных с пространством комплексных чисел, определяется с помощью эквивалентного соотношения

$$\rho(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|.$$

Поэтому пространство \mathbf{C} с евклидовой метрикой автоматически является полным метрическим пространством. Другими словами, последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ точек из \mathbf{C} сходится тогда и только тогда, когда эта последовательность является фундаментальной (критерий Коши). На практике это утверждение удобно записывать в символьной форме:

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ — сходится} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N)(\forall p \in \mathbf{N}) : |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon. \quad (1)$$

Используя описание компактов в \mathbf{R}^2 , можно сказать, что множество в \mathbf{C} является компактом тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Наряду с евклидовой метрикой, пространство комплексных чисел часто наделяют и другой метрикой, называемой *сферической*. Эта метрика индуцируется в \mathbf{C} из пространства $\bar{\mathbf{C}}$ и определяется с помощью следующего соотношения

$$\rho_S(z_1, z_2) := \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}}.$$

Пространство \mathbf{C} , с этой метрикой, не является полным, так как, например, последовательность натуральных чисел является фундаментальной в этой метрике

$$\rho_S(n, n+p) = \frac{2p}{\sqrt{(n^2 + 1)((n+p)^2 + 1)}} < \frac{2p}{n(n+p)} < \frac{2}{n} < \varepsilon, \quad n \geq \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1,$$

но не является сходящейся

$$\rho_S(n, z) = \frac{2|n - z|}{\sqrt{(n^2 + 1)(|z|^2 + 1)}} \geq \frac{2|n - |z||}{\sqrt{(n^2 + 1)(|z|^2 + 1)}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{(|z|^2 + 1)}} > 0$$

В то же время, эта последовательность не имеет сходящихся подпоследовательностей (докажите это), значит, пространство \mathbf{C} , со сферической метрикой не является компактным, но является ограниченным: для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ справедливо неравенство $\rho_S(z_1, z_2) < 2$, в частности, для любого $z \in \mathbf{C}$ справедливо неравенство $\rho_S(z, 0) < 2$.

7.2. Эквивалентность метрик. Обозначим $V_\varepsilon(z_0)$ — сферическую ε -окрестность точки z_0 , а $U_\varepsilon(z_0)$ — евклидову ε -окрестность точки z_0 .

ТЕОРЕМА 0.1. Для любых $z_0 \in \mathbf{C}$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ такие, что

$$U_{\varepsilon'}(z_0) \subseteq V_\varepsilon(z_0), \quad V_{\varepsilon''}(z_0) \subseteq U_\varepsilon(z_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $z_0 \neq \infty$, то $\rho_S(z_0, \infty) > 0$. Можно считать, что $\varepsilon < \rho_S(z_0, \infty)$. При этом в силу аксиомы треугольника $\rho_S(z, \infty) \geq \rho_S(z_0, \infty) - \rho_S(z_0, z)$. Значит, из следующих соотношений

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= 2 \frac{2|z - z_0|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z_0|^2}} \frac{\sqrt{1 + |z|^2}}{2} \frac{\sqrt{1 + |z_0|^2}}{2} = \\ &= \frac{2\rho_S(z, z_0)}{\rho_S(z, \infty)\rho_S(z_0, \infty)} \leq \frac{2\rho_S(z, z_0)}{(\rho_S(z_0, \infty) - \rho_S(z_0, z))\rho_S(z_0, \infty)}, \\ \rho_S(z, z_0) &= \frac{2|z - z_0|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |z_0|^2}} \leq 2|z - z_0| \end{aligned}$$

вытекает, что в качестве чисел $\varepsilon', \varepsilon''$ можно взять числа $(\rho_S(z_0, \infty) - \varepsilon)\rho_S(z_0, \infty)\frac{\varepsilon}{2}$ и $\frac{\varepsilon}{2}$ соответственно. \square

Из доказанной теоремы вытекает, что сферическая метрика в \mathbf{C} топологически эквивалентна евклидовой метрике, то есть запас открытых множеств (значит, запас замкнутых множеств и запас компактов) не меняется при переходе от одной метрики к другой. Действительно, пусть множество $G \subseteq \mathbf{C}$ открыто в сферической метрике. Покажем, что оно открыто в евклидовой метрике. Выберем произвольную точку $z_0 \in G$. По определению открытого множества, найдется сферическая ε -окрестность $V_\varepsilon(z_0)$ точки z_0 такая, что $V_\varepsilon(z_0) \subseteq G$. По доказанной теореме существует $\varepsilon' > 0$, такое, что $U_{\varepsilon'}(z_0) \subseteq V_\varepsilon(z_0)$, значит, $U_{\varepsilon'}(z_0) \subseteq G$, то есть множество G открыто в евклидовой метрике. Обратно, пусть множество $G \subseteq \mathbf{C}$ открыто в

евклидовой метрике и $z_0 \in U_\varepsilon(z_0) \subseteq G$. По доказанной теореме существует $\varepsilon'' > 0$, такое, что $V_{\varepsilon''}(z_0) \subseteq U_\varepsilon(z_0)$, значит, $V_{\varepsilon''}(z_0) \subseteq G$, то есть множество G открыто в сферической метрике.

7.3. Расстояние между множествами. Пусть $z_0 \in \mathbf{C}$; $A, B \subseteq \mathbf{C}$. Число

$$\rho(A, z_0) := \inf_{z \in A} |z - z_0| \geq 0$$

называется *расстоянием между точкой z_0 и множеством A* .

ТЕОРЕМА 0.2. Если $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$, то

$$\rho(A, z_0) = \min\{\rho(A_1, z_0), \dots, \rho(A_n, z_0)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A_i \subseteq A$, то $\rho(A, z_0) \leq \rho(A_i, z_0)$, $i = 1, \dots, n$. Значит, $\rho(A, z_0) \leq \min\{\rho(A_1, z_0), \dots, \rho(A_n, z_0)\}$. Предположим, что $\rho(A, z_0) < \min\{\rho(A_1, z_0), \dots, \rho(A_n, z_0)\}$. Тогда найдётся точка $z_1 \in A$ такая, что $\rho(z_1, z_0) < \rho(A_i, z_0)$, $i = 1, \dots, n$. Но такая точка не может принадлежать множествам A_1, \dots, A_n и, следовательно, не может принадлежать множеству A . \square

В свою очередь, число

$$\rho(A, B) := \inf_{z \in B} \rho(A, z) = \inf_{z' \in A, z'' \in B} |z' - z''| \geq 0$$

называется *расстоянием между множествами A и B* .

ТЕОРЕМА 0.3. Если компакт $A \subseteq \mathbf{C}$ и замкнутое множество $B \subseteq \mathbf{C}$ не пересекаются, то $\rho(A, B) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольную точку $z \in A$. Так как множество B является замкнутым, то существует окрестность $U_{2\varepsilon}(z)$, которая не пересекается с множеством B . Окрестности $U_\varepsilon(z)$ покрывают компакт A . Из этого покрытия выделяем конечное подпокрытие $U_{\varepsilon_1}(z_1), \dots, U_{\varepsilon_n}(z_n)$. Пусть $z' \in A$, $z'' \in B$. Тогда

$$z' \in U_{\varepsilon_1}(z_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon_n}(z_n), \quad z'' \notin U_{2\varepsilon_1}(z_1) \cup \dots \cup U_{2\varepsilon_n}(z_n).$$

Значит,

$$\begin{aligned} |z' - z''| &\geq \rho\left(U_{\varepsilon_1}(z_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon_n}(z_n), z''\right) = \\ &= \min\{\rho(U_{\varepsilon_1}(z_1), z''), \dots, \rho(U_{\varepsilon_n}(z_n), z'')\} \geq \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0. \end{aligned}$$

\square

Доказанные здесь теоремы носят общий характер. Они остаются справедливыми при замене евклидовой метрики сферической метрикой и при замене пространства \mathbf{C} пространством $\bar{\mathbf{C}}$.

8. Сходящиеся последовательности

Последовательность комплексных чисел определяется как упорядоченная пара (Z, f) , где Z — не более чем счётное множество комплексных чисел, f — некоторое отображение множества натуральных чисел \mathbf{N} во множество Z , удовлетворяющее условию: область определения f совпадает с \mathbf{N} , а область значений f совпадает с Z . Множество Z называется *носителем* последовательности (Z, f) . Отображение f называется *общим членом* последовательности (Z, f) . Значение общего члена последовательности $f(n) \in Z$ в точке $n \in \mathbf{N}$, обычно, обозначается z_n . При этом сама последовательность (Z, f) обозначается $\{z_n\}_{n=1}^\infty$.

8.1. Последовательности в \mathbf{C} . Говорят, что *предел последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ равен a или *последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к a* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbf{N}$, начиная с которого выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. То же самое в символьной форме может быть записано так:

$$z_n \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N) : |z_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

Если неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$ заменить неравенством $\rho_S(z_n, a) < \varepsilon$, то получим определение сходящейся последовательности комплексных чисел в сферической метрике. Из теоремы 0.1 вытекает, что сходимости в евклидовой и сферической метриках равносильны: последовательность комплексных чисел сходится в сферической метрике тогда и только тогда, когда она сходится в евклидовой метрике.

Определение (2) совпадает по форме с определением предела числовой последовательности (последовательности в \mathbf{R}). Поэтому свойства пределов числовых последовательностей, доказанные на основе определения, без особых затруднений переносятся на случай последовательностей комплексных чисел:

- 1) последовательность комплексных чисел может иметь только один предел;
- 2) если предел последовательности комплексных чисел отличен от нуля, то начиная с некоторого номера члены последовательности обладают тем же свойством;
- 3) любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится и имеет тот же предел;
- 4) последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел сходится к a тогда и только тогда, когда числовая последовательность $\{|z_n - a|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю;
- 5) сходящаяся последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел ограничена, т.е. найдется $M > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|z_n| \leq M$;
- 6) из любой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса);
- 7) если $z_n \rightarrow a$ и $z'_n \rightarrow b$, то $z_n + z'_n \rightarrow a + b$, $z_n z'_n \rightarrow ab$, а при дополнительном условии $z_n b \neq 0$, и $\frac{z_n}{z'_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Свойства 1)–5) вытекают из общих свойств последовательностей в метрических пространствах. Свойство 6) вытекает из описания компактов в \mathbf{C} . Сомнение может вызвать лишь свойство 7). Докажем для примера лишь следующую импликацию

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow b, z_n, b \neq 0 \Rightarrow \frac{z_n}{z'_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Действительно, если $z_n \rightarrow a$ и $z'_n \rightarrow b$, то по свойству 4) $|z_n - a| \rightarrow 0$ и $|z'_n - b| \rightarrow 0$. Поэтому из соотношений

$$0 \leq \left| \frac{z_n}{z'_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{(z_n - a) - \frac{a}{b}(z'_n - b)}{(z'_n - b) - (i)^2 b} \right| \leq \frac{|z_n - a| + \left| \frac{a}{b} \right| |z'_n - b|}{||z'_n - b| - |b||}$$

и вытекает, что $\left| \frac{z_n}{z'_n} - \frac{a}{b} \right| \rightarrow 0$. Остаётся снова воспользоваться свойством 4).

8.2. Последовательности в $\bar{\mathbf{C}}$. Предел последовательности элементов из $\bar{\mathbf{C}}$ определяется аналогично:

$$z_n \rightarrow a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N) : \rho_S(z_n, a) < \varepsilon. \quad (3)$$

Если все z_n и a отличны от бесконечности, то из теоремы 0.1 вытекает, что определяя предел этой последовательности в $\bar{\mathbf{C}}$, вместо сферической метрики можно использовать евклидову метрику и заменить неравенство $\rho_S(z_n, a) < \varepsilon$ неравенством $|z_n - a| < \varepsilon$. В случае $a = \infty$

неравенство $\rho_S(z_n, a) < \varepsilon$ заменяется неравенством $|z_n|^{-1} < \varepsilon$. Возможность такой замены вытекает из теоремы

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow z_n^{-1} \rightarrow 0.$$

Эта теорема справедлива для последовательностей в $\bar{\mathbf{C}}$, так как $\rho_S(z_n, \infty) = \rho_S(z_n^{-1}, 0)$. При этом в силу теоремы 0.1 сходимости в правой части может пониматься в евклидовом смысле:

$$z_n^{-1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geq N) : |z_n|^{-1} < \varepsilon.$$

Свойства 1)–3) пределов последовательностей комплексных чисел остаются справедливыми и для последовательностей в $\bar{\mathbf{C}}$. Свойство 4) принимает следующий вид:

4)' последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из $\bar{\mathbf{C}}$ сходится к $a \in \bar{\mathbf{C}}$ тогда и только тогда, когда числовая последовательность $\{\rho_S(z_n, a)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю.

Свойство 5) теряет смысл, так как всё пространство $\bar{\mathbf{C}}$ является компактным, а значит, и ограниченным. Поэтому:

5)' любая последовательность в $\bar{\mathbf{C}}$ является ограниченной;

6)' из любой последовательности в $\bar{\mathbf{C}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Остаётся отметить, что теоремы о сумме, произведении и частном пределов в условиях расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbf{C}}$ справедливы в рамках разрешённых в $\bar{\mathbf{C}}$ операций:

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow b, (z_n, z'_n), (a, b) \neq (\infty, \infty) \Rightarrow z_n + z'_n \rightarrow a + b;$$

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow b, (z_n, z'_n), (a, b) \neq (0, \infty), (\infty, 0) \Rightarrow z_n z'_n \rightarrow ab;$$

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow b, (z_n, z'_n), (a, b) \neq (0, 0), (\infty, \infty) \Rightarrow \frac{z_n}{z'_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

В качестве примера докажем импликацию

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow 0, (z_n, z'_n) \neq (0, 0), (\infty, \infty), a \neq 0 \Rightarrow \frac{z_n}{z'_n} \rightarrow \infty.$$

В силу аксиомы треугольника

$$\rho_S(0, a) - \rho_S(z_n, a) \leq \rho_S(z_n, 0) \leq \rho_S(0, a) + \rho_S(z_n, a).$$

Значит, $\rho_S(z_n, 0) \rightarrow \rho_S(a, 0) \neq 0$. Аналогично показывается, что $\rho_S(z_n, \infty) \rightarrow \rho_S(a, \infty) \leq 2$ и $\rho_S(z'_n, \infty) \rightarrow \rho_S(0, \infty) = 2$. Следовательно, из очевидных соотношений

$$0 \leq \rho_S\left(\frac{z_n}{z'_n}, \infty\right) \leq 2 \left| \frac{z'_n}{z_n} \right| = 2 \frac{\rho_S(z'_n, 0) \rho_S(z_n, \infty)}{\rho_S(z'_n, \infty) \rho_S(z_n, 0)}$$

вытекает, что $\rho_S\left(\frac{z_n}{z'_n}, \infty\right) \rightarrow 0$.

Упражнение. 1. Докажите, что для последовательностей в \mathbf{C} справедлива импликация

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow b \Rightarrow z_n z'_n \rightarrow ab.$$

2. Докажите, что для последовательностей в $\bar{\mathbf{C}}$ справедлива импликация

$$z_n \rightarrow a, z'_n \rightarrow \infty, (z_n, z'_n) \neq (0, 0), (\infty, \infty), a \neq \infty \Rightarrow \frac{z_n}{z'_n} \rightarrow 0.$$

9. Последовательности и представления комплексных чисел

Всякую последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно рассматривать как последовательность $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства \mathbf{R}^2 . Известно, что такие последовательности сходятся тогда и только тогда, когда сходятся их координатные последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. С алгебраической формой записи комплексных чисел связан очевидный эквивалент этого утверждения для последовательностей комплексных чисел:

$$z_n \rightarrow c \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} c, \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} c. \quad (4)$$

Описать сходимость последовательности комплексных чисел в терминах тригонометрической формы записи несколько сложнее. Импликация

$$z_n \neq 0, c \neq 0, z_n \rightarrow c \Rightarrow |z_n| \rightarrow |c|, \arg z_n \rightarrow \arg c$$

не выполняется, например, для последовательности $\{-1 - \frac{i}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Действительно, $-1 - \frac{i}{n} \rightarrow -1$. При этом $\arg(-1 - \frac{i}{n}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \pi \rightarrow -\pi \neq \arg(-1)$.

ТЕОРЕМА 0.4. *Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $c \neq 0$ тогда и только тогда, когда $|z_n| \rightarrow |c|$ и для любого $n \in \mathbf{N}$ существует $\varphi_n \in \operatorname{Arg} z_n$ такое, что $\varphi_n \rightarrow \arg c$. Последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к 0 тогда и только тогда, когда $|z_n| \rightarrow 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_n \rightarrow c \neq 0$. Тогда

$$|z_n| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n)^2 + (\operatorname{Im} z_n)^2} \rightarrow \sqrt{(\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2} = |c|.$$

С другой стороны, пусть $z'_n := z_n \bar{c}$. Тогда

$$\operatorname{Re} z'_n = \operatorname{Re} z_n \operatorname{Re} c + \operatorname{Im} z_n \operatorname{Im} c \rightarrow (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 = |c|^2 > 0,$$

$$\operatorname{Im} z'_n = -\operatorname{Re} z_n \operatorname{Im} c + \operatorname{Im} z_n \operatorname{Re} c \rightarrow -\operatorname{Re} c \operatorname{Im} c + \operatorname{Im} c \operatorname{Re} c = 0.$$

Положим $\varphi_n := \arg z'_n + \arg c$. Начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $\operatorname{Re} z'_n > 0$. Значит, для всех $n \geq N$ имеет место представление $\arg z'_n = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z'_n}{\operatorname{Re} z'_n}$. Следовательно, $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z'_n}{\operatorname{Re} z'_n} + \arg c \rightarrow \arg c$. При этом $\varphi_n \in \operatorname{Arg} z'_n + \operatorname{Arg} c = \operatorname{Arg} z_n$.

Обратная импликация вытекает из соотношений $|z_n| \cos \varphi_n \rightarrow |c| \cos \arg c$, $|z_n| \sin \varphi_n \rightarrow |c| \sin \arg c$. Из которых следует, что $z_n = |z_n|(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \rightarrow |c|(\cos \arg c + i \sin \arg c) = c$.

Если $c = 0$, то утверждение теоремы является простым следствием определения предела последовательности комплексных чисел. \square

10. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим произвольную последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Сумма

$$S_n := \sum_{k=1}^n z_k$$

называется *частичной суммой* элементов последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, а последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *рядом с комплексными членами* и обозначают

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k. \quad (5)$$

При этом последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, как обычно, называется *общим членом* ряда (5). Если ряд (5) сходится, то его предел называют *суммой ряда* и обозначают тем же символом, что

и сам ряд. Ряд (5) сходится *абсолютно*, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|. \quad (6)$$

Определения сходящегося ряда и его суммы повторяют известные определения для числовых рядов. Отсюда вытекает, что основные свойства числовых рядов, доказанные на основе этих определений, допускают свои естественные аналоги для рядов с комплексными членами:

- 1) если ряд (5) сходится, то $z_k \rightarrow 0$ (*необходимый признак сходимости*);
- 2) если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} z'_k$ сходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + z'_k)$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + z'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} z'_k;$$

- 3) если ряд (5) сходится и $c \in \mathbf{C}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} cz_k$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} cz_k = c \sum_{k=1}^{\infty} z_k;$$

4) ряд (5) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbf{N}$, начиная с которого, для всех $p \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon$$

(*критерий Коши*);

- 5) если ряд сходится абсолютно, то он сходится;

6) если подпоследовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности натуральных чисел возрастает и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится (абсолютно), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n$, где

$$z'_1 := z_1 + \dots + z_{k_1}, \quad z'_n := z_{k_{n-1}+1} + \dots + z_{k_n}, \quad n > 1,$$

сходится (абсолютно) и $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{n=1}^{\infty} z'_n$ (*сочетательный закон*);

7) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z'_k$, полученный из данного путём перестановки членов, сходится абсолютно и $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z'_k$ (*переместительный закон*);

- 8) если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} z'_k$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z''_k$, где

$$z''_k := z_1 z'_k + z_2 z'_{k-1} + \dots + z_k z'_1,$$

сходится абсолютно и

$$\sum_{k=1}^{\infty} z''_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \sum_{k=1}^{\infty} z'_k$$

(*теорема о произведении рядов*).

В силу импликации (4) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится и его сумма равна S тогда и только тогда, когда сходятся числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$, где $x_k := \operatorname{Re} z_k$, $y_k := \operatorname{Im} z_k$, и их суммы равны $\operatorname{Re} S$ и $\operatorname{Im} S$ соответственно. Другими словами,

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k, \quad (7)$$

причём, сходимость числовых рядов в правой части равенства влечёт сходимость ряда с комплексными членами в левой части и наоборот. Из очевидных неравенств

$$\max\{|x_k|, |y_k|\} \leq |z_k| \leq |x_k| + |y_k|$$

и известных признаков сравнения вытекает, что то же утверждение справедливо и по отношению к абсолютной сходимости этих рядов.

Используя соотношение (7) свойства 1), 2), 5)–7) легко сводятся к их действительным аналогам (проделайте это в качестве упражнения). Остановимся лишь на доказательствах свойств 3), 4), 8). Свойство 3) доказывается с помощью предельного перехода в очевидном

равенстве $\sum_{k=1}^n cz_k = c \sum_{k=1}^n z_k$ и свойства 7) пределов последовательностей комплексных чисел. Выполнимость свойства 4) вытекает из критерия Коши сходимости последовательности комплексных чисел (1) и равенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} z_k - \sum_{k=1}^n z_k \right|.$$

Докажем теорему о произведении рядов (свойство 8)). Прежде всего, из неравенств

$$\sum_{k=1}^n |z_k''| \leq \sum_{k=1}^n (|z_1||z_k'| + |z_2||z_{k-1}'| + \dots + |z_k||z_1'|) \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \sum_{k=1}^n |z_k'|$$

вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z_1||z_k'| + |z_2||z_{k-1}'| + \dots + |z_k||z_1'|)$$

сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k''$ сходится абсолютно. Остаётся заметить, что

$$\left| \sum_{k=1}^{2n} z_k'' - \sum_{k=1}^n z_k \sum_{k=1}^n z_k' \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|z_1||z_k'| + |z_2||z_{k-1}'| + \dots + |z_k||z_1'|) \rightarrow 0.$$

11. Бесконечные произведения

Рассмотрим произвольную последовательность отличных от нуля комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$. Произведение

$$P_n := \prod_{k=1}^n z_k$$

называется *частичным произведением* элементов последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, а последовательность частичных произведений $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *бесконечным произведением* и обозначают

$$\prod_{k=1}^{\infty} z_k. \quad (8)$$

При этом последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *общим членом* бесконечного произведения (8). Говорят, что бесконечное произведение *сходится*, если оно имеет отличный от нуля предел. Если бесконечное произведение (8) сходится, то

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} z_k = \frac{1}{P_n} \prod_{k=1}^{\infty} z_k \rightarrow 1.$$

ТЕОРЕМА 0.5 (необходимый признак сходимости). *Если бесконечное произведение (8) сходится, то $z_k \rightarrow 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно перейти к пределу в очевидном равенстве $z_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$. \square

Бесконечное произведение удобно записывать в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k), \quad (9)$$

где $z_k \neq -1$. С использованием этой формы записи необходимый признак сходимости бесконечного произведения можно переформулировать так: если бесконечное произведение (9) сходится, то $z_k \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 0.6. *Если $z_k \geq 0$, то бесконечное произведение (9) и знакоположительный ряд (5) сходятся или расходятся одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда (5) и последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ частичных произведений являются монотонными. Сходимость этих последовательностей эквивалентна их ограниченности. Используя очевидное неравенство $1 + z_k \leq e^{z_k}$, получаем

$$z_1 + \dots + z_n \leq (1 + z_1) \dots (1 + z_n) \leq e^{z_1 + \dots + z_n}.$$

Другими словами, $S_n \leq P_n \leq e^{S_n}$. Из этих неравенств следует, что упомянутые последовательности ограничены или нет одновременно. При этом $P_n \geq 1$, значит, предел последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ заведомо отличен от нуля. \square

Говорят, что бесконечное произведение (9) *сходится абсолютно*, если сходится бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |z_k|). \quad (10)$$

Из доказанной теоремы вытекает удобный достаточный признак абсолютной сходимости бесконечного произведения.

ТЕОРЕМА 0.7. *Если ряд (5), $z_k \neq -1$, сходится абсолютно, то сходится абсолютно и бесконечное произведение (9).*

Эта теорема является признаком сходимости бесконечного произведения, так как справедлива следующая

ТЕОРЕМА 0.8. *Абсолютно сходящееся бесконечное произведение является сходящимся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P_n := \prod_{k=1}^n (1 + z_k), \quad P'_n := \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|)$$

и $P'_n \rightarrow P'$. Учитывая очевидное равенство

$$\sum_{n=2}^m (P'_n - P'_{n-1}) = P'_m - P'_1,$$

закключаем, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (P'_n - P'_{n-1})$$

сходится. Для любого $n \geq 2$ имеем

$$|P_n - P_{n-1}| = |1 + z_1| \dots |1 + z_{n-1}| |z_n| \leq (1 + |z_1|) \dots (1 + |z_{n-1}|) |z_n| = P'_n - P'_{n-1}.$$

По признаку сравнения знакоположительный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} |P_n - P_{n-1}|$$

сходится. Значит, сходится ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1}).$$

Его частичные суммы имеют вид $P_m - P_1$. Следовательно, последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Покажем, что предел P последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ отличен от нуля. Так как произведение (10) сходится, то ряд (6) сходится. Значит, $|1 + z_k| \rightarrow 1$. Пусть $\delta := \inf\{|1 + z_k|\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z_k}{1 + z_k} \right| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z_k}{1 + z_k} \right|$$

сходится. Отсюда вытекает, что сходится бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \left| \frac{z_k}{1 + z_k} \right| \right).$$

По доказанному выше сходится последовательность

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z_k}{1 + z_k} \right).$$

Но предел этой последовательности равен $\frac{1}{P}$. Отсюда следует, что $P \neq 0$. □

Упражнение. Исследовать на сходимость бесконечные произведения $\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$, $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.