

ЛЕКЦИЯ 5

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ТВОРЧЕСТВО АРХИМЕДА

При построении математических теорий в античной Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы, непрерывность и т. п. Уже одно из первых открытий теоретического характера — обнаружение несоизмеримости величин — поставило задачу рационального объяснения подобных проблем. В данном случае они связаны: а) с неограниченной продолжимостью процесса нахождения общей меры; б) с бесконечной малостью последней и в) с тем, что она должна содержаться бесконечное множество раз в сравниваемых величинах. С этой группой проблем вскоре были сближены геометрические, решение которых приводило к аналогичным затруднениям (определение большинства длин, площадей и объемов).

Некоторые группы античных ученых искали выход из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Примером наиболее яркого выражения подобных идей является натурфилософская школа Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.). Демокрит считал, что все тела состоят из бесконечно малых атомов — первовеличин. Тела различаются между собой по форме, положению и способу соединения составляющих их атомов. Атомистические взгляды Демокрита распространились и на математику и явились источником некоторых его высказываний о математических бесконечно малых и о применении их к определению некоторых геометрических величин.

Однако о математической стороне подобных высказываний и исследований известно слишком мало. Гораздо больше известно о возражениях их научных противников. Мы имеем здесь в виду апории Зенона (род. ок. 500 г. до н. э.), т. е. логические парадоксы, к которым приводят попытки получать непрерывные величины из бесконечного множества бесконечно малых частиц.

Среди апорий наиболее известны: а) *дихотомия*, т. е. невозможность осуществить движение, так как путь может быть делим до бесконечности (пополам, еще раз пополам и т. д.) и поэтому надо последовательно преодолевать бесконечное множество участков пути (математически это сводится к отрицанию факта, что *Ахиллес*, который не может догнать черепаху, так как ему надо последовательно достигать тех мест, где только что находилась черепаха, т. е. исчерпывать бесконечную последовательность отрезков пути (математически это оказалось возражением против уже известного тогда факта, что делается невозможным, если время считать суммой дискретных мгновений, а пространство — суммой дискретных точек).

Апории Зенона убедительно показали, что, если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные атомистические соображения. Для подобных целей необходимо разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с новизнами суждений о бесконечно малых элементы предельного перехода.

Одним из самых ранних методов такого рода является метод исчерпывания. Изобретение его обычно приписывают Евдоксу. Примеры его употребления находятся в двенадцатой книге «Начал» Евклида и в ряде сочинений Архимеда.

Метод исчерпывания был одним из распространенных методов античной математики. Им широко пользовался Архимед. Ранее этот метод включил в систему «Начал» Евклид, сделав его основой двенадцатой книги. Предельные переходы, достигавшиеся ранее часто в силу интуитивных или эмпирических соображений, получили в методе исчерпывания первое теоретическое оформление, исторически первую форму метода пределов.

Логическая строгость метода исчерпывания оставалась непревзойденной в течение многих веков. По существу только в XIX в. были поставлены и начали получать разрешение проблемы, непосредственно вытекающие из логической сущности античного метода исчерпывания. Однако форма последнего была еще весьма несовершенной. Метод развивался только в связи с конкретными задачами; он не приобрел вида абстрактного метода, имеющего развитую систему исходных понятий и единообразные алгоритмы. Единственность предела доказывалась для всякой задачи наново. Этот недостаток не был частным, случайным. Дело в том, что всякая попытка ввести это доказательство раз навсегда для определенного достаточно широкого класса задач неизбежно влекла за собой необходимость объяснить ряд понятий инфинитезимальной природы. Потребовалось бы дать рациональное объяснение понятия бесконечно близкого приближения, бесконечно малой величины и т. п. Трудностей, связанных с этим, древние математики не могли преодолеть.

Тем не менее метод исчерпывания лежал в основе многих инфинитезимальных методов и выдающихся конкретных достижений античных математиков, в первую очередь Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э.), которому принадлежит приведенный выше пример квадрирования параболического сегмента. Этот замечательный ученый был уроженцем Сиракуз (южная часть Сицилии), сыном астронома и математика Фидия. Для усовершенствования своих знаний он совершил поездку в Александрию, где некоторое время работал в сотрудничестве с другими крупнейшими математиками. Возвратившись в Сиракузы, Архимед про-

должал усиленные научные занятия. В последний период жизни он принял деятельное участие в обороне родного города от римских завоевателей, руководя постройкой сложных технических сооружений и изобретая орудия военного характера. Во время штурма и взятия Сиракуз Архимед был убит, а его библиотека и инструменты разграблены.

Сочинения Архимеда написаны преимущественно в виде писем. До нас дошли десять сравнительно крупных и несколько более мелких сочинений математического характера. Основной особенностью математических сочинений Архимеда является применение строгих математических методов в разработке экспериментально-теоретического материала из области механики и физики

Такая особенность делает труды Архимеда едва ли не наиболее ярким образцом развития прикладных математических знаний, техники вычислений и новых математических методов, в особенности инфинитезимальных, в эпоху поздней античности.

Мы не ставим задачи дать полную характеристику сочинений Архимеда. В соответствии с основной целью лекции мы здесь рассмотрим вопросы: о взаимопроникновении методов математики и механики в трудах Архимеда, о разработке им метода интегральных сумм и об его так называемых дифференциальных методах.

Многочисленные механические изобретения и открытия Архимеда широко известны. Ему принадлежат: архимедов винт, системы рычагов, блоков и винтов для поднятия и передвижения больших тяжестей, определение состава сплавов взвешиванием их в воде, планетарий, метательные машины и т. д. Известны и теоретические работы Архимеда по механике: «О равновесии плоских фигур», где изложен закон рычага, «О плавающих телах», «Книга опор» и т. д.

В творчестве Архимеда работы по механике занимали настолько большое место, что механические приемы и аналогии проникли даже в математические методы. До недавнего времени о таком проникновении нельзя было судить достоверно. Вопрос окончательно прояснился после того, как в 1906 г. было найдено сочинение Архимеда «Послание к Эратосфену (Эфод)» о механическом методе решения геометрических задач.

В соответствии с научной традицией своего времени Архимед переводил доказательства, полученные методом механической аналогии, на общепринятый язык метода исчерпывания с обязательным завершением последнего, в каждом отдельном случае, доказательством от противного.

Механические и физические аналогии и в последующие века часто применялись с успехом для решения трудных математических задач. Например, в середине XVIII в. петербургский академик Д. Бернулли из физических соображений нашел общее решение уравнения колебания струны. Д. Бернулли исходил из того, что звук, издаваемый колеблющейся струной длины с закрепленными концами, равен сумме основного тона и обертонов. Отклонение (ордината) струны в каждой точке в любой момент будет равно алгебраической сумме ординат, соответствующих основному тону и обертонам для данного момента времени. Можно также указать, в качестве примера, на Б. Римана, который в середине XIX в. доказал, исходя из представления о данной поверхности как об однородном заряженном проводнике электричества и рассматривая потенциальное поле, что на каждой замкнутой римановой поверхности существует алгебраическая функция, отличная от постоянной.

Следующей разновидностью инфинитезимальных методов античной древности является метод, могущий быть охарактеризованным как метод интегральных сумм. Наиболее яркие примеры применения этого метода находятся в сочинениях Архимеда: «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сфероидах». Существо этого метода в применении, например, к вычислению объемов тел вращения, состоит в следующем: тело вращения разбивается на части и каждая часть аппроксимируется описанным и вписанным телами, объемы которых можно вычислить. Сумма объемов описанных тел будет больше, а сумма вписанных тел — меньше объема тела вращения. Теперь остается выбрать аппроксимирующие сверху и снизу тела таким образом, чтобы разность их объемов могла быть сделана сколь угодно малой. Это достигается выбором в качестве указанных тел соответствующих цилиндров.

Наконец, в античной математике рассматривались и так называемые вариационные задачи. У Архимеда подобная задача встречается только один раз — в заключительном предложении сочинения «О шаре и цилиндре». Здесь рассматриваются изоповерхностные сегменты различных шаров и доказывается, что сегмент, имеющий форму полушара, имеет наибольший объем. Немного позднее вышло сочинение Зенодора, в котором теория изопериметрических фигур была строго и полно развита для многоугольников, кругов и, в некоторой степени, для многогранников, простейших тел вращения и для сферы. Предложения экстремального характера были широко распространены в то время, подчас нося не чисто математический, а механический или даже натурфилософский характер.

Инфинитезимальные методы древней Греции послужили исходным пунктом многих исследований ученых-математиков XVI и XVII вв. Особенно часто подвергались изучению методы Архимеда. Лейбниц, один из основателей математического анализа, по этому поводу писал: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков».

Инфинитезимальные методы образуют ту часть античной математики, которая формировалась под непосредственным давлением научно-практических запросов. Эта часть выходила за рамки образуемых в то время замкнутых математических систем, построенных на основе минимального числа основных положений. В инфинитезимальных методах получили первое выражение элементы новых математических средств, приведших к созданию анализа бесконечно малых. Отношения противоречия между совокупностью подобных методов и замкнутыми логико-математическими системами в древней Греции представляют один из исторических примеров противоречий, являющихся движущей силой развития математических наук.