

В математике XVII в. самым большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших сотрудников и учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших, революционных преобразований, быстро изменивших все лицо математики и поднявших ее роль в системе естественнонаучных знаний человечества.

Однако появление анализа бесконечно малых не было делом рук одного или нескольких ученых, их гениальной догадки. Оно в действительности было завершением длительного процесса, внутриматематическая сущность которого состояла в накоплении и выделении элементов дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов.

Побудительными причинами этого процесса были в первую очередь запросы механики, астрономии, физики. Эти науки не только предъявляли к математике требования решения того или иного класса задач. Они обогатили ее представления о непрерывных величинах и непрерывных движениях, о существовании и видах функциональных зависимостей. В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались инфинитезимальные методы — основа математики переменных величин.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились достаточные предпосылки. Это были: наличие сложившейся алгебры и вычислительной техники; введение в математику переменной величины и координатного метода; усвоение инфинитезимальных идей древних, особенно Архимеда; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, кубатур, определения центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т. д.

В решении задач такого рода, в поисках общих методов их решения, а следовательно и в создании анализа бесконечно малых, принимали участие многие ученые: Кеплер, Галилей, Кавальери, Торричелли, Паскаль, Валлис, Роберваль, Ферма, Декарт, Барроу и многие другие. Создание элементов математического анализа представляло собой многосторонний творческий труд большого числа ученых.

Для удобства изучения этого сложного процесса разделим методы, содержащие крупинки анализа бесконечно малых, на две группы. Сначала рассмотрим те из них, в которых проявляются элементы позднейшего интегрального исчисления; их мы назовем интеграционными. Затем рассмотрим дифференциальные методы, т. е. методы решения задач на определение касательных ит. п., тех, что решались позднее средствами дифференциального исчисления. Открытие связей интеграционных и дифференциальных методов — решающий этап, после которого сразу началось формирование математического анализа, — составит последнюю часть этих двух лекций.

Интеграционные методы. Вначале эти методы вырабатывались, накапливались и выделялись в ходе решения задач на вычисление объемов, площадей, центров тяжести и т. п. Древние задачи Архимеда пересматривались вновь и вновь, изучались его инфинитезимальные методы, выяснялись их математические возможности. Интеграционные методы слагались в то время как методы определенного интегрирования. Процесс формирования и внедрения в математику этих методов был очень бурным и скоротечным; уже через 50—60 лет со времени появления первой работы он привел к образованию интегрального исчисления.

Самым ранним по времени опубликования методом этого типа был метод непосредственного оперирования с актуальными бесконечно малыми величинами. Появился он в 1615 г. в сочинениях Кеплера.

Иоганн Кеплер (1571—1630), уроженец Вюртемберга — одного из многочисленных в ту пору немецких государств, — выдающийся астроном и математик. Он посвятил практически всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609—1619 гг. открыл законы движения планет, носящие и поныне его имя: 1) Планеты движутся по эллипсам; Солнце находится в одном из его фокусов; 2) Радиусы-векторы планет «заметают» за равные промежутки времени равные секториальные площади (см. рис. 36); 3) Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний до Солнца.

Формулировка этих законов показывает, что для математического доказательства их справедливости недостаточно владения известной в то время вычислительной техникой, знания конических сечений и алгебраических средств. Задача вычисления секториальных площадей требовала умения пользоваться бесконечно малыми величинами. Этого умения требовали и другие задачи практического характера. И вот по поводу одной из таких практических задач Кеплер, воспользовавшись случаем, изложил свой метод использования бесконечно малых величин.

Речь идет об отыскании наиболее целесообразной формы бочек и о способах измерения их вместимости. Сочинение, посвященное этой проблеме, так и называется: «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии» (Линц, 1615). Состоит оно, не считая предварительных замечаний, из трех частей: часть теоретическая, специальная сте-

реометрия австрийской бочки, правила для измерения вместимости бочек. Для нас наибольший интерес представляет теоретическая часть. Начинается она со «Стереометрии правильных кривых тел».

Это — просто пересказ сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре». Кеплер принимает античный метод исчерпывания, которым пользовался Архимед, называет его глубоким, но отбрасывает заключительный этап приведения к противоречию. Он хочет разгадать замысел Архимеда, приведший того к получению столь замечательных результатов, освободить его от наслоений, вызванных формальными требованиями строгости. Этот замысел, по мнению Кеплера, состоит в том, что любая фигура или тело представляется в виде суммы множества бесконечно малых частей. Круг, например, состоит из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник. Все треугольники имеют одинаковую высоту (радиус круга), а сумма их оснований равна длине окружности. Таким же образом шар оказывается составленным из бесконечного множества конусов, вершины которых сходятся в центре шара, а основания образуют поверхность шара.

Метод суммирования актуально бесконечно малых Кеплер распространяет и на другие несложные геометрические фигуры и тела (конусы и цилиндры) и их части, рассмотренные у Архимеда. В некоторых случаях он еще дальше отходит от строгости изложения, вводя интуитивные соображения. Например, доказано, что боковая поверхность вписанного конуса относится к площади основания (большому кругу шара) как 2:1; эта поверхность вдвое меньше боковой поверхности описанного конуса. И вдруг Кеплер пишет: «Весьма правдоподобно, что поверхность полусферы есть среднее пропорциональное между поверхностями (боковыми) обоих конусов» (изд. 1935, стр. 123). Справедливости ради заметим, что в большинстве высказываний об интуитивной правдоподобности результата или других нестрогих рассуждений Кеплер отсылает к Архимеду, который «это доказывает со всей строгостью».

От правильных кривых тел Архимеда Кеплер переходит к изучению тел, образованных вращением круга около прямой, не проходящей через его центр, а также вращением других конических сечений. Всего он рассмотрел 92 вида тел вращения, называя их по внешнему виду лимонами, яблоками, вишнями, турецкими чалмами и т. п. и даже вообще желваками.

Метод вычисления объемов тел вращения и их частей был у Кеплера единым. Во-первых, изучаемое тело делилось на бесконечное число частиц, «ломтей», занимающих равноправные положения в теле. Эти части тела перегруппировывались, образуя другое тело, объем которого возможно вычислить. Если непосредственное суммирование оказывалось невозможным провести, то они предварительно заменялись другими частицами, эквивалентными данным. Разъясним этот метод на двух примерах.

В теореме 18 Кеплер доказал, что всякое кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру, высота которого равна длине окружности, описываемой центром сечения, а основание — сечению кольца. Метод доказательства: кольцо (тор) пересекается на доли плоскостями, проходящими через центр тора перпендикулярно поверхности. Каждый разновысокий ломтик заменяется цилиндром с тем же основанием и с высотой, равной среднему арифметическому наибольшей и наименьшей высоты. Столбик из этих цилиндров дает наглядное доказательство теоремы. Далее Кеплер обсуждает возможные обобщения, связанные с формой сечения кольца, приходя к выводу, что теорема верна для всех сечений, симметричных относительно вертикали, проведенной через центр сечения.

Вокруг кеплеровских суммирований актуальных бесконечно малых разгорались страсти. Как и во все эпохи, не было недостатка в придирчивых критиках. Ученик Виеты шотландец А. Андерсон выпустил даже специальное сочинение «В защиту Архимеда» (1616, через год после выхода в свет рассматриваемого сочинения Кеплера), где обвинял Кеплера в оскорблении памяти Архимеда.

Тем не менее плодотворность суммирования элементов, вычитанная у Архимеда Кеплером, была очевидной. Первая же попытка создать регулярный алгоритм оперирования с бесконечно малыми стала весьма популярной. Многие ученые посвятили свои работы усовершенствованию оперативной стороны этого предприятия и рациональному разъяснению возникающих при этом понятий. Наибольшую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Кавальери.

Кавальери Бонавентура (1598—1647), ученик Г. Галилея, происходил из знатного рода. Монашеская карьера сочеталась в его жизни с научной и преподавательской деятельностью по математике. С 1629 г., по рекомендации Галилея, он занял кафедру математики в Болонье, будучи одновременно настоятелем католического монастыря ордена иеронимитов. Прекрасный знаток античных авторов, он в то же время глубоко изучал высказанные Галилеем и Кеплером идеи создания исчисления неделимых. Кавальери написал ряд сочинений по астрономии, технике вычислений, коническим сечениям, тригонометрии. В 1632 г. он опубликовал 11-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Но делом его жизни, имевшим наибольшее значение для развития математики, был метод неделимых, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых впервые высказана Б. Кавальери в 1621 г. В рукописи, представленной им при занятии профессорской должности в 1629 г., уже имеет место систематическое применение неделимых.

Итогом многолетнего усовершенствования метода неделимых явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635, 2 изд.— 1653). Этому же предмету была посвящена книга Кавальери «Шесть геометрических опытов» (1647).

Метод неделимых изобретен для определения размеров плоских фигур и тел. Как фигуры, так и тела представляются составленными из элементов, имеющих размерность на единицу меньше. Так, фигуры состоят из отрезков прямых, проведенных параллельно некоей направляющей прямой, называемой регула. Этих воображаемых отрезков бесконечно много. Они заключены между двумя касательными, имеющими название парных.

В геометрических телах неделимыми являются плоскости, параллельные некоторой плоскости, избранной в качестве регулы. Их тоже бесконечно много; границами их совокупности служат две парные касательные плоскости.

Идею своего метода Кавальери образно выражал, предлагая читателям представить паука, непрерывно ткущего геометрию из неделимых.

Совокупность всех неделимых, вводимая Кавальери, по существу вводит понятие определенного интеграла. Однако логические трудности, связанные с пониманием неделимого, составления площадей из линий, не имеющих ширины, и тел из бесконечно тонких плоскостей и т. п.\* не дают еще возможности судить о совокупностях всех неделимых. Поэтому Кавальери вынужден рассматривать отношения тел и фигур, ограничиваясь случаями, когда отношения неделимых постоянны. Таким образом, сущность геометрии неделимых Кавальери можно сформулировать так: плоские фигуры и тела относятся друг к другу, как все их неделимые, взятые вместе; если неделимые находятся в одном и том же отношении друг к другу, то отношение площадей соответствующих фигур (или объемов тел) равно этому отношению.

Эти утверждения практически эквивалентны современным умозаключениям. Другим обобщением метода являлось введение криволинейных неделимых.

Метод неделимых позволил решить множество трудных задач, ранее не поддававшихся решению. У него появились горячие приверженцы. Один из них, Е. Торричелли, писал, что новая геометрия неделимых переходит из рук одних ученых к другим, как чудо науки; она, по мнению Торричелли, убедила мир, что века Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки. Торричелли, активно работавший методами Кавальери, первый сумел определить объем тела, образованного вращением ветви гиперболы вокруг одной из своих осей.

Однако у этого метода были свои недостатки. Во-первых, он был непригоден для измерения длин кривых, так как соответствующие неделимые (точки) оказывались безразмерными. Во-вторых, невыясненность понятия неделимого, невозможность его рационального объяснения создавала для всей теории атмосферу необоснованности. ^ В-третьих, развитие метода сильно задерживалось из-за того, что Кавальери в соответствии со сложившимися в его время представлениями о научной строгости избегал применять символику и приемы алгебры.

Тем не менее определенное интегрирование в форме геометрических квадратур в первой половине XVII в. уже зарекомендовало себя. Все усилия отныне были направлены на уточнение его и на достижение возможно более общих результатов.

Паскаль (1623—1662), например, рассматривал квадратуры в форме, близкой той, которая употребляется Кавальери. Попытка уточнения состоит в том, что он сумму всех неделимых понимал как сумму элементарных площадок, образуемых бесконечно близкими одинаково отстоящими друг от друга ординатами, ограниченными отрезком оси абсцисс и кривой (т. е. сумму вида  $2 y dx$ ). В ряде задач он вводил сумму всех синусов, определяя ее как сумму произведений ординат на элементы дуги (*lyds*), которая в случае окружности единичного радиуса оправдывает свое название (*isincpdcpr*). При помощи этого геометрического эквивалента определенного интегрирования Паскаль сумел разрешить много задач на определение площадей, объемов, статических моментов и т. д.

Важное усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввел деления квадратуемой площади ординатами, отстоящими друг от друга на неравных расстояниях. Это дало ему возможность распространить способы вычисления. В формулировке Ферма речь идет о квадрировании площади, образованной отрезком оси абсцисс, двумя крайними ординатами и кривой. По-видимому, Ферма изобрел этот метод под влиянием сочинений Непера, потому что он сам назвал его логарифмическим.

Математики первой половины XVII в. с большим удивлением и энтузиазмом убеждались, какое большое количество, казалось бы, разнородных задач геометрии и механики приводилось к квадратурам. С каждым годом, с каждым новым результатом все более выявлялась общность операций, которые приходилось применять при решении этих задач. Геометрический эквивалент определенного интегрирования, возникший как специфический метод геометрии, частично воспринятый от Архимеда, постепенно приобретал черты общего метода математики. В нем все больший удельный вес приобретали численные методы и элементы грядущего анализа бесконечно малых.

В этом отношении характерным примером являлись работы Дж. Валлиса (1616—1703), английского математика, профессора Оксфордского университета (с 1649 г.), одного из основателей (с 1663 г.) Лондон-

ского королевского общества. В 1655 г. им была издана «Арифметика бесконечного». Отправляясь от метода Кавальери, он перевел на арифметический язык отношения сумм неделимых.

Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропейских стран. Методы интегрирования охватывали к 60-м годам XVII в. обширные классы алгебраических и тригонометрических функций. Было решено огромное число задач, осветить которые в настоящих лекциях невозможно. Нужен был только один толчок — рассмотрение всей совокупности методов с единой точки зрения, чтобы перевернуть всю интеграционную проблематику и создать интегральное исчисление.

Дифференциальные методы. В математике XVII в. наряду с интеграционными методами складывались и методы дифференциальные. К дифференциальным методам мы отнесем, по образцу определения интегральных методов, те, в которых содержатся элементы будущего дифференциального исчисления. Выработывались эти элементы при решении задач, которые в настоящее время решаются с помощью дифференцирования. Такие задачи были в то время трех видов: определение касательных к кривым, нахождение максимумов и минимумов функций и отыскание условий существования у алгебраических уравнений кратных корней. К этой группе тесно примыкают запросы механики, вытекающие из необходимости в случае неравномерных движений определять скорость в любой точке траектории, не говоря о более сложных задачах.

Научное наследие древних и средневековых авторов в этой области не было столь определенным и значительным, как в случае интегральных методов. Задачи о касательной рассматривались не систематически, единообразных приемов выработано не было. Общим, по-видимому, было стремление понимать касательную как прямую, имеющую с кривой одну общую точку и обладающую свойствами локальной одноственности. В области экстремальных задач, помимо фактов элементарной изопериметрии, существовали лишь диоризмы, т. е. ограничения, накладываемые на условия задачи, чтобы она имела решение в области рациональных и действительных чисел, или геометрических отрезков. Диоризмы часто содержат указания на экстремальные значения. Например, когда алгебраическое уравнение имеет кратные корни, кривые, пересечением которых уравнение решается, не пересекаются, а касаются друг друга. Таким образом, некоторая взаимосвязанность дифференциальных задач к XVII в. уже была отмечена.

В течение XVII в. дифференциальные задачи решались еще самыми различными методами. Как и всегда в науке, наряду с новым существует старое, они находятся во взаимопроникновении. Так происходило и в рассматриваемой нами области. Геометрические построения в духе античных математиков, механические соображения, исследования в духе новой тогда аналитической геометрии Декарта, инфинитезимальные соображения — в их тесном сплетении вызревало дифференциальное исчисление. Приведем несколько примеров, характеризующих этот процесс.

Уже в школе Галилея для нахождения касательных и нормалей к кривым систематически применялись кинематические методы. При этом касательная появляется как диагональ параллелограмма, сторонами которого являются горизонтальная и вертикальная составляющие скорости.

Этот кинематический метод дал начало рассмотрению различных бросаний и сложных движений и к определению касательных в любой точке траектории. Систематическое изложение метода и его главнейших применений дал в 1640 г. Роберваль. Несмотря на важность кинематического метода, он был очень неудобен, так как исходил из индивидуальных особенностей кривых и поэтому был недостаточно алгоритмичен. Поэтому больше перспектив для определения касательных и нормалей в то время представлял метод нормалей Декарта, содержащийся во второй книге его «Геометрии» (изд. 1938, стр. 50 и далее).

Связанная с методом Декарта проблема отыскания кратных корней алгебраических уравнений получила развитие у голландского математика и инженера И. Гудде (1628—1704). Применяемый в наши дни способ, связанный с алгебраическим способом образования последовательных производных левой части алгебраического уравнения, появился, по-видимому впервые, у Ролля в конце XVII в. Однако возвратимся к дифференциальным методам.

Накопление элементов дифференциального исчисления наиболее явную форму приняло у Ферма. В 1638 г. он сообщил в письме Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции. Так же близок к дифференциальному исчислению метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым.

Все функции Ферма — алгебраические полиномиальные. В случаях, когда в исследуемых функциях попадались иррациональности, он освобождался от них возведением обеих частей уравнения в степень. Впрочем, в этом узком, сравнительно, классе функций метод Ферма определения касательных и экстремальных значений общий, символика — единообразная. К сожалению, Ферма не стремился публиковать свои работы. Ему было достаточно научной переписки. Притом он пользовался трудно доступными для понимания алгебраическими средствами Виеты с его громоздкой символикой. Видимо, поэтому не сделал он последнего, уже небольшого, шага на пути к созданию дифференциального исчисления.

К середине XVII в. накопился достаточно большой запас средств решения задач, ныне решаемых с помощью дифференцирования. Однако не было еще выделено особой операции дифференцирования, понятий, равнозначных понятиям производной и дифференциала. Не была ясна связь дифференциальных и инте-

грационных методов. Математический анализ формировался в рамках и в терминах алгебры, геометрии, механики — сложившихся уже к тому времени наук. Так всякое новое математическое исчисление всегда проходит период формирования в пределах уже существующей системы математических наук, используя их средства.

О связи дифференциальных и интегральных методов.

Последним этапом эмбрионального периода анализа бесконечно малых явилось установление связи и взаимнообратности дифференциальных и интегральных исследований. Побудительных причин для этого было много. Одними из важнейших были так называемые обратные задачи на касательные. Задачи этого типа состоят в определении кривых, исходя из заданного общего свойства всех касательных к ней. Речь идет не о нахождении вгибающих семейства прямых, а о таких свойствах касательных, которые зависят от положения точки касания. Таким образом, речь идет о необходимости решить дифференциальное уравнение первого порядка с двумя переменными.

Обратные задачи на касательные имели практическое происхождение. Например, мореплаватели еще в эпоху великих географических открытий обратили внимание на кривую постоянного истинного курса корабля — локсодромию. Это кривая, касательные к которой пересекают меридианы, проведенные в точках касания, под постоянным углом. Различные обратные задачи на касательные были поставлены также в геометрической оптике и в кинематике.

Приближенные графические методы не могли считаться удовлетворительным средством решения этих задач. Попытку дать общий метод первым предпринял Декарт. Он предложил классифицировать все алгебраические кривые (неалгебраических кривых он, как было сказано, не рассматривал), расположить их в ряд, отыскивать их касательные и проверять, обладают ли они заданным свойством. Разумеется, первая же попытка испробовать этот метод проб, предпринятая Декартом при решении задачи де Бона, показала практическую его непригодность.

Опираясь на этот результат, Барроу решил большое число обратных задач на касательные. С его сочинениями знакомились многие ученые, в том числе Ньютон и Лейбниц. Итак, к середине XVII в. математика находилась на грани открытия дифференциального и интегрального исчисления. Точнее сказать, это открытие завершалось. Глубоко прав был Ф. Энгельс, когда в 1875 г. он так характеризовал рассматриваемый нами период истории математики: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем» (Ф. Э н г е л ь с . Диалектика природы, 1949, стр. 206).