

ЛЕКЦИЯ 7 ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В КИТАЕ И В ИНДИИ

Факты истории учат, что развитие всех форм деятельности человеческого общества происходит под влиянием единых мотивов экономического развития. Это влияние сказывается, в частности, в области математики тем, что в ней имеет место множественность источников ее возникновения. Математика возникала и формировалась как наука во многих местах, нередко весьма удаленных друг от друга и между собой, казалось бы, не связанных.

При этом всегда действовали и проявлялись общие закономерности: происхождение математики из практической деятельности людей, выделение числовых и геометрических абстракций в качестве отдельной области человеческих знаний, образование логически последовательной системы этих абстракций, применение последних к практическим задачам и т. п. Однако форма осуществления этих общих закономерностей, характер математической науки, соотношение ее элементов имели много различий и особенностей, которые необходимо принимать во внимание, чтобы составить правильное представление о путях и перспективах развития математических наук. В настоящей лекции мы рассмотрим некоторые особенности исторического развития математики в двух великих странах с древней культурой — в Китае и в Индии.

О математике Китая. То, что развитие научных знаний в Китае имеет многовековую и богатую историю, является неоспоримым фактом. Так же неоспоримо и раннее оригинальное развитие китайской математики. Однако сведения о математических познаниях китайцев в древности скудны и разрозненны. Исследования по истории Китая, которые ведутся сейчас с большой энергией и размахом, по-видимому, скоро позволят изменить это положение.

Математические познания китайцев восходят к глубокой древности; по утверждению известного китайского историка математики Ли Яня, — к XXV в. до н. э. В истории математики древнего Китая имеются сведения: о десятичной системе счета, специальной иероглифической символике для чисел, об оперировании большими числами, наличии вспомогательных счетных устройств (узелки, счетная доска), об оперировании циркулем, линейкой и угольником и т. д.

Самым ранним математическим сочинением, если не считать трактата о чжоуби (солнечных часах), является «Математика в девяти книгах», иногда называемая «Математикой в девяти главах», или разделах. Это сочинение появилось как своеобразный итог математических достижений Китая к началу нашей эры. Есть сведения, что оно было составлено выдающимся государственным деятелем и ученым Чжан Цанем (152 г. до н. э.), собравшим и систематизировавшим все известные к его времени математические знания. «Математика в девяти книгах» неоднократно подвергалась переработкам и дополнениям: в I в. до н. э. (Гэн Чоучан), в III в. н. э. (Лю Хуэй), в VI в. (Чжень Луань), в VII в. (Ли Чунфэн) и др.

В результате этих переработок «Математика в девяти книгах» приобрела вид своеобразной математической энциклопедии со сравнительно неоднородным содержанием. В VII—X вв. н. э. она сделалась основным учебником для поступающих на государственную службу и классическим сочинением, от которого отправлялись ученые-математики в своих исследованиях. Текст его стал известен у нас, в СССР, недавно; в 1957 г. Э. И. Березкина выпустила первый перевод «Математики в девяти книгах» на русский язык с обстоятельными комментариями.

Книги, составляющие это сочинение, имели вид отдельных свитков. Они посвящены различным темам, преимущественно практического характера. Различие обуславливалось, по-видимому, тем, что различные книги предназначались для чиновников различных ведомств: землемеров, инженеров, астрономов, сборщиков налогов и т. п. Позднейшие дополнения вносились в книги не по признаку математической общности, а единства темы.

Изложение — догматическое: формулируются условия задач (всего 246 задач) и даются ответы к ним. После группы однотипных задач формулируется алгоритм их решения. Этот алгоритм состоит или из общей формулировки правила или из указания последовательных операций над конкретными числами. Выводов этих правил, объяснений, определений, доказательств нет.

Книга 1 называется «Измерение полей». Единицей измерения служил прямоугольник со сторонами 15 и 16 бу (т. е. шагов, приблизительно равных 133 см). Площади прямолинейных фигур вычисляются верно. При вычислении площадей круга, сектора и кольца принимается, что $\pi=3$. Площадь сегмента вычисляется как площадь трапеции, большее основание которой совпадает с основанием сегмента, а меньшее основание и высота — каждое равно высоте сегмента.

Используемая при этом система счисления — десятичная иероглифическая. Числа делятся на классы по 4 разряда в каждом. Особого знака нуля при такой системе записи, очевидно, не требуется. Ноль действительно появился значительно позднее, только в XII в., и был, видимо, заимствован из Индии. Чтобы придать большую общность постановке основной задачи об измерении площадей, в первой книге введены простые дроби и арифметические действия над ними. Правила действий — обычные; особенностью является только то, что при делении дробей требуется предварительное приведение их к общему знаменателю.

Употребляемое в первой книге значение $\pi=3$, видимо, сохранилось с очень давнего времени. Китайские математики того времени умели и более точно вычислять значения π . Например, в I в. до н. э. у Лю Синя мы встречаем $\pi=3,1547$, во II в. н. э. (Чжан Хэн считал, что квадрат длины окружности относится к квадрату периметра описанного квадрата, как 5: 8.) В III в. н. э. при вычислении сторон вписанных многоугольников Лю Хуэй нашел, что $\pi=3,14$. Он исходил из предложения, что площадь круга аппроксимируется снизу площадями вписанных многоугольников. Для аппроксимации сверху площади этих многоугольников увеличиваются на сумму прямоугольников, описанных вокруг остаточных сегментов.

Книга 2 «Соотношение между различными видами зерновых культур» отражает весьма старинную практику взимания налогов зерном, измеряемым в объемных мерах, и расчетов при переработке этого зерна. Математические задачи, возникающие при этом, — это задачи на тройное правило и пропорциональное деление. Ко второй книге была позднее добавлена группа задач на определение стоимости предметов, число которых берется как целое, так и дробное.

Задачи на пропорциональное деление, деление пропорционально обратным значениям чисел, а также простое и сложное тройное правило составляют содержание и следующей, третьей, книги «Деление по ступеням». Правил суммирования арифметических прогрессий здесь еще нет; они встречаются, по видимому, впервые в математическом трактате Чжан Цзю-цзяна (VI в.).

В четвертой книге «Шао-гуан» вначале речь идет об определении стороны прямоугольника по данным площади и другой стороне. Затем излагаются правила извлечения квадратных и кубических корней, нахождения радиуса круга по его площади. Правила формулированы специально для счетной доски; подкоренное число делится на разряды соответственно по 2 или по 3 знака, затем последовательно подбирается очередное число корня и дается правило перестройки палочек на счетной доске.

В книге 5 «Оценка работ» собраны задачи, связанные с расчетами при строительстве крепостных стен, валов, плотин, башен, ям, рвов и других сооружений. При этом вычисляются как объемы различных тел, так и потребности в рабочей силе, материале, транспортных средствах при различных условиях.

Книга 6 «Пропорциональное распределение» начинается группой задач о справедливом (пропорциональном) распределении налогов. Математические методы здесь те же, что в книге 3, где речь шла о распределении доходов между чиновниками различных классов, — пропорциональное деление, простое и сложное тройное правило. Кроме того, в шестую книгу входит серия задач на суммирование отдельных арифметических прогрессий и задач на совместную работу лиц с разной производительностью.

«Избыток-недостаток» — так называется седьмая книга. В ней подобраны задачи, приводящиеся к линейным уравнениям и их системам, и разработан способ их решения, совпадающий с методом двух ложных положений. Задачи и в этом случае накапливались в возрастающей степени трудности. Метод тоже еще не сформулирован четко и имеет много разновидностей частного характера.

Усовершенствование складывающихся в седьмой книге правил решения систем линейных уравнений и распространение их на системы с большим числом неизвестных изложены в правиле «фанчэн», которому посвящена вся восьмая книга. Задачи этой книги приводят к системам до 5 совместных уравнений линейных с положительными корнями. Для всех систем установлен единый алгоритм вычисления корней — упомянутый кфанчэн. Преобразование производится обычным для теории детерминантов путем, но при этом оперируют только со столбцами; столбцы и строки матрицы здесь еще неравноправны. Преобразованная матрица с нулями соответствует ступенчатой системе уравнений. Откуда последовательно определяют корни системы уравнений.

В процессе преобразований матрицы системы китайские ученые ввели отрицательные числа. Для их сложения и вычитания было введено специальное правило «чжэнфу», которое можно перевести как правило «плюс-минус». Так как все вычисления, в том числе и преобразования матрицы, производились на счетной доске, то для обозначения отрицательных чисел применялись счетные палочки другого цвета или формы, а в случае записи применялись иероглифы разных цветов.

Расширение понятия числа в связи с нуждами обобщения созданного алгоритма, которое мы отметили выше, является характерной особенностью развития математики. Те же стремления обеспечить общность решения в радикалах уравнений 2— 4-й степеней в XVI в. в Италии привели к введению мнимых чисел. Что же касается приоритета китайских математиков относительно правила «фан-чэн», то он бесспорен. Достаточно указать, что в Европе идея создания подобного детерминанта впервые была высказана только Лейбницем в конце XVII в. Отрицательные числа в явном виде появились несколько раньше — в конце XV в. в сочинениях Н. Шюке.

Практическую основу последней книги «Математики в девяти книгах» составляют задачи определения недоступных расстояний и высот с помощью теоремы Пифагора и свойств подобных треугольников. Математически эта книга особенно интересна общей, алгебраической формулировкой правил.

Мы остановились так подробно на обзоре содержания «Математики в девяти книгах» вследствие того, что это сочинение является самым значительным и, пожалуй, единственным крупным памятником древней китайской математики, имеющим к тому же энциклопедический характер. Оно показывает, что в

течение многих веков математика Китая развивалась по преимуществу в вычислительно-алгоритмическом направлении и создала существенные элементы алгебраического подхода к решению задач.

Причины того, что математика Китая (а как мы увидим ниже, и Индии) приобрела такие особенности, коренятся в общественно-экономических условиях жизни общества. Последние были таковы, что эти государства в качестве одной из основных функций вынуждены были принять на себя организацию общественных работ в области ирригации, транспорта и оборонительных сооружений. Постоянные заботы о календаре и об общности и строгости религиозных установлений усугубляли эту направленность научных занятий. Давления феодального правления и религии определили медленный, застойный характер развития всех наук, в том числе и математики.

Вычислительно-алгоритмическую направленность китайская математика сохранила и в последующий период, вплоть до середины XIV в. Наибольшие успехи были опять достигнуты в области алгебры и арифметико-вычислительных методов. Вслед за решением квадратных уравнений мы встречаем у Ван Сяо-туна в VII в. сведение задачи к кубическому уравнению.

В средние века в математике Китая все больше выявлялись и формировались алгебраические элементы как в области создания общих алгебраических методов, так и в формировании и усовершенствовании символики. В «Драгоценном зеркале четырех элементов» (1303 г.; четыре элемента — это четыре неизвестных, образно называемые: небеса, земли, мужчины, вещи) Чжу Ши-цзе решал задачи, приводящиеся к системам четырех уравнений с четырьмя неизвестными путем последовательного исключения неизвестных. Обращает на себя внимание оригинальная символика этого автора.

Другим крупным достижением математиков средневекового Китая было регулярно применяемое суммирование прогрессий Шэнь Ко (XI в.) и Ян Хуэя (XIII в.). Своеобразие приемов вычисления сумм прогрессий данного вида можно проиллюстрировать на задаче вычисления числа ядер, сложенных в пирамиду с квадратным основанием.

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Наряду с арифметико-алгебраическими задачами в Китае развивались элементы комбинаторики; был найден треугольник биномиальных коэффициентов, известный теперь под названием треугольника Паскаля. По-видимому, как одно из обобщений задач арифметики появились теоретико-числовые задачи. Типичным примером таких задач является исследование Сун Цзы (ок. 230 г. н. э.), решавшего задачу нахождения числа, которое при делении на 3, 5, 7 дает соответственно остатки 2, 3, 2. Это — задача на решение линейной системы сравнений с попарно взаимно простыми модулями.

Практический подход к задачам геометрии, наблюдавшийся в «Математике в девяти книгах», сохранился в китайской математике на протяжении всего рассматриваемого периода времени. В геометрическом наследии древнего и средневекового Китая видное место занимало сочинение Лю Хуэя (III в. н. э.) «Математика морского острова», имевшее вначале характер комментария и добавления к последней части «Математики в девяти книгах». В окончательном виде «Математику морского острова» составляют задачи на определение размеров недоступных предметов и расстояний до них. Решаются эти задачи по преимуществу применением теоремы Пифагора или подобия треугольников. Попыток систематического дедуктивного построения математики в Китае не отмечено.

Все известные нам источники утверждают, что с XIV в. в Китае начинается длительный период застоя в развитии наук. Добытые ранее знания не развиваются и даже забываются; математика развивается преимущественно за счет усвоения иностранных знаний. В 1583 г. в Китай проник иезуит-миссионер М. Рич-чи, вслед за которым Китай наводнила целая армия попов и монахов. Видимо, не без их содействия в 1606 г. в Китае впервые появились издания «Начал» Евклида, в 1650 г. — таблицы логарифмов Влакка. Оригинальное же развитие китайской науки под давлением колонизаторов и законсервировавшихся феодальных форм правления прекратилось. Математики-специалисты китайского происхождения готовились к научной деятельности за границей, в большинстве там же и работали.

Китайская отечественная математика, как и вся наука, получила новый стимул к развитию только в XX в. под влиянием народно-освободительного движения, а затем народной революции и руководства Коммунистической партии Китая. В 1928 г. в Нанкине была образована центральная научно-исследовательская академия, среди 13 институтов которой был и институт математики. Собравшиеся в этом институте немногочисленные группы ученых вели работу по многим направлениям одновременно. Ими были получены результаты в области рядов Фурье, аналитической теории чисел, топологии, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и математической статистики, алгебры, теории конечных групп.

После 1949 г. начался быстрый рост китайской математики в тесном содружестве с математиками СССР. Особенно тесное взаимодействие осуществлялось в аналитической теории чисел, где Хуа Ло-кэн и другие до сих пор ведут работы методом тригонометрических сумм, изобретенным академиком

И. М. Виноградовым. К работам Д. Е. Меньшова об ортогональных рядах примыкают работы Чень Цзянгун и Ван Фу-чуна. Исследования Су Бо-цина и других связаны с работами советских математиков школы С. П. Финикова по линейным комплексам. Даже в теории вероятностей, где особо сильное влияние оказывали английские и американские математики, все больше сказывается сближение с советскими специалистами школы А. Н. Колмогорова. Все большую роль играет планирование науки и концентрирование усилий китайских математиков в первую очередь на важнейших направлениях: дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, теория вероятностей. В благоприятных условиях социалистического общественно-экономического строя фронт китайской математики быстро ширится.

О математике Индии. В древней и средневековой математике народов Индии и в ее исторических судьбах имеется много общего с китайской математикой. В Индии математика тоже является очень древней наукой, издавна составляющей часть старинной культуры. В ней тоже преобладали вычислительно-алгоритмические методы и отсутствовали попытки построения дедуктивных систем; геометрия индийцев — также практическая.

Самыми ранними памятниками математической культуры индийцев являются религиозные книги: сутры и веды. Их происхождение относят к VIII—VII вв. до н. э. Написаны они на давно уже умершем языке — санскритском. В них мы находим геометрические построения, составляющие важную часть ритуальных условий при постройке культовых сооружений: храмов, алтарей и т. д. В них можно найти первые способы квадрирования кругов, применение теоремы Пифагора. Видимо, как следствие архитектурных требований решалась и арифметическая задача о нахождении пифагоровых троек натуральных чисел.

Числовая система с древних времен определилась как десятичная. Столь же рано определилась склонность к оперированию большими числами, нашедшая отражение в легендах. Будда, например, отличался феноменальным умением считать; он строил числовые десятичные системы до 10^{54} , давая наименования каждому разряду. Женихи прекрасной богини Земли, добываясь ее руки, обязаны были соревноваться в письме, арифметике, борьбе и стрельбе из лука. Победитель соревнования Сарватасидда придумал, в частности, шкалу чисел, идущих в геометрической прогрессии со знаменателем 100, до $10^{7+9 \cdot 46}$, т. е. до числа с 421 нулем. Пристрастие к операциям с большими числами сохранялось в течение всей истории математики в Индии.

Наиболее яркий период развития, оставивший самые значительные образцы математической литературы, — это V—XII вв. н. э. В это время трудились выдающиеся индийские ученые — математики и астрономы: Ариабхатта (конец V в.), Брахмагупта (род. 598 г.), Магавира (IX в.), Бхаскара Акарья (род. 1114 г.) и др.

От Ариабхатты, жившего в северо-восточной Индии, осталось сочинение в стихах астрономического и математического содержания. В нем формулировались правила элементарной математики: арифметики, геометрии и тригонометрии. Брахмагупта также в стихотворной форме написал огромное сочинение в 20 книгах «Усовершенствованная наука Брамь», в котором 12-я книга посвящена арифметике и геометрии, а 18-я — алгебре и неопределенным уравнениям. Значительное математическое содержание имеют две книги Бхаскары: «Лилавати» и «Виджаганита». «Лилавати» (что значит «прекрасная») Бхаскара посвятил своей дочери. В поэтической манере в 13 отделах книги излагаются: 1. Метрология; 2. Действия над целыми числами и дробями и извлечение корней; 3. Способ обращения, способ ложного положения и другие частные приемы решения задач; 4. Задачи на бассейны и смеси; 5. Суммирование рядов; 6. Планиметрия; 7—11. Вычисление различных объемов; 12. Задачи неопределенного анализа; 13. Задачи комбинаторики.

Другое сочинение Бхаскары — «Виджаганита» — состоит из восьми отделов: 1. Действия над положительными и отрицательными числами; 2—3. Неопределенные уравнения 1-й и 2-й степени; 4. Линейные алгебраические уравнения; 5. Квадратные уравнения; 6. Системы линейных уравнений; 7—8. Неопределенные уравнения 2-й степени.

Мы не ставим себе здесь целью описание всех источников, заслуг и роли отдельных лиц. Нашей целью является оценка уровня достижений математиков Индии, особенностей форм и методов математического исследования и путей развития индийской математики. Поэтому здесь мы, как, впрочем, в значительной части наших лекций, дадим лишь общие характеристики.

Как было уже сказано, главной особенностью индийской математики является преобладание вычислительных приемов, преподносимых учащимся или читателям в догматической форме. Среди арифметических правил обращает на себя внимание широкое распространение правила обращения, которое состоит в следующем: задумывается число, но учащемуся или противнику сообщаются лишь последовательность операций с задуманным числом и конечный результат. Решение задачи состоит в последовательном проведении всех операций в обратном порядке. Например, в сочинении Бхаскары «Лилавати» перед неизвестной красавицей ставится задача: назвать число, которое, будучи умножено на три, увеличено затем на три четверти произведения, разделено на 7, уменьшено на $\frac{1}{7}$ частного, умножено само на себя и уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, даст 2. Среди других правил вычислительной техники индийцев находится правило извлечения корней и действий с иррациональностями.

Оперирование большими числами, помимо отработки единой числовой десятичной системы с нулем и числовой символики, привело к введению в математику представлений о бесконечно больших числах. Бхаскара вводил это представление, поясняя, что это есть тоже число, но не претерпевающее изменений, приращения или ущерба, какое бы большое число мы к нему ни прибавляли или от него ни отнимали; его, по выражению Бхаскары, можно уподобить вечному времени бесконечной цепи существований.

Индийские математики ввели и правильно трактовали и понятие отрицательного числа. Так, Брахмагупта разъясняет, что числа могут трактоваться либо как имущество, либо как долг. Правила операций с числами тогда таковы: сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов — долг, имущества и долга — их разность, а если они равны — нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля — имущество. Произведение двух имуществ или двух неимуществ есть имущество; результат произведения имущества на долг представляет убыток. То же правило справедливо и при делении. Квадрат имущества, или долга, есть имущество; имущество имеет два корня: один составляет прибыль, другой — долг. Корня убытка не существует, ибо таковой не может быть квадратом. Однако, вводя отрицательные числа, индийские математики не использовали их как равноправные элементы математики, считая их только чем-то вроде логических возможностей, потому что, по выражению Бхаскары, люди с ними несогласны.

Кроме правил и задач арифметики, в индийскую математику входили также решения ряда задач алгебры, неопределенного анализа, комбинаторных задач. К алгебре относятся в первую очередь правила решения линейных уравнений, их систем и квадратных уравнений.

Развитие методов решения задач неопределенного или диофантова анализа представляет одно из высших достижений индийской математики. Появление подобных методов — общее явление для всех древних математических культур. Причина того, что математики Индии, Греции, Китая и других стран в равной мере заинтересовывались решением подобных задач, лежит, по-видимому, в необходимости изучения периодически повторяющихся явлений, обильные примеры чего дает астрономия.

К области алгебры и теории чисел в индийской математике отнесем, наконец, элементарные комбинаторные сведения, треугольник Паскаля и другие сведения.

Индийская геометрия носит все черты практического подхода к делу. Есть чертежи, есть правила, иногда же даже правил нет, под чертежом написано только: «смотри!». Некоторый интерес представляют тригонометрические таблицы, в которых хорды заменены полухордами. При этом вводятся в рассмотрение по существу тригонометрические функции: синусы, косинусы.

В истории Индии имеется достаточно фактов, свидетельствующих о наличии экономических и политических связей с греческими, египетскими, арабскими государствами и с Китаем. В математике считается бесспорным индийское происхождение десятичной системы счисления с нулем и правил счета. Можно проследить заимствование индусами от греков некоторых геометрических фактов и т. д. Но количество этих фактов еще невелико. Вопрос о связях и взаимных влияниях математики Индии, Греции, Китая и арабских стран еще остается недостаточно выясненным.

В заключение еще раз отметим, что как относительно китайской, так и индийской математики мы располагаем вообще очень ограниченным запасом сведений. С лица земли исчезли, или еще не обнаружены, многие материальные свидетельства возникновения и накопления математических знаний как части древних культур. Помимо разрушительного влияния времени, в этом виноваты колонизаторы и попы, которые уничтожили целые народы. Где последнее оказалось невозможным, как это имело место в Китае и в Индии, были приложены все усилия для фальсификации истории, для превознесения заслуг капиталистических «цивилизаторов» и «просветителей», несущих якобы свет темным народам.