

ЛЕКЦИЯ 3

ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ

Математика древнего Египта и Вавилона относится к периоду зарождения математики. Следующий период называется периодом элементарной математики. Характерным обстоятельством, позволяющим выделить начало этого периода, является рассмотрение наряду с узкопрактическими задачами систем основных идей в отдельных областях математики. Эти системы обобщали математическую практику и отражали объективные закономерности математического мышления людей. Они являлись первыми математическими теориями. Процесс их формирования являлся частью более общего процесса становления первых естественнонаучных теорий. Классическим примером образования математических теорий и становления математики как науки является математика древней Греции.

В период VI—IV вв. до н. э., который мы здесь будем рассматривать, античная Греция представляла собой совокупность рабовладельческих государств — полисов (городов), ведущих оживленную торговлю как между собой, так и с другими государствами Средиземноморского бассейна: Египтом, Финикией, Персией и т. д. В государствах античной Греции техника, наука и культура достигли высокого уровня, о чем свидетельствуют с большой убедительностью сохранившиеся прекрасные памятники. Дошедшие до нас естественнонаучные и философские труды античных ученых и сведения о них показали, что в древней Греции сложились все основные типы мировоззрений, действовали естественнонаучные школы. Ведущее место среди греческих натурфилософских школ последовательно занимали: ионийская (VII—VI вв. до н. э.), пифагорейская (VI—V вв. до н. э.) и афинская (со второй половины V в. до н. э.). В этих школах с большой полнотой и обстоятельностью разрабатывались и математические вопросы.

Вклад этих школ в развитие науки оказался настолько значительным, что даже в наше время «теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено возвращаться к грекам»

Обратимся с этой целью к грекам и мы. При этом мы не будем, разумеется, претендовать на монографическое описание богатой фактами истории античной математики. Коснемся лишь отдельных вопросов, представляющих, по нашему мнению, интерес для современной математики. Первым из них выберем вопрос о том, как и в силу каких причин возникают математические теории. В историко-математическом плане это приводит нас к вопросу о путях преобразования накопленных математических фактов, воспринятых и усвоенных греками, в теоретическую науку.

В последующих лекциях мы остановимся на первых аксиоматических построениях античной математики, на разработке инфинитезимальных методов и на античных образах аналитической геометрии.

В античной математике этого времени практические задачи, сопряженные с необходимостью арифметических вычислений и геометрических измерений и построений, продолжали играть большую роль. Однако новым было то, что эти задачи постепенно были выделены в отдельную область математики, получившую наименование логики. В логику были отнесены: операции с целыми числами, численное извлечение корней, счет с помощью вспомогательных устройств, вроде абака, вычисления с дробями, численное решение задач, сводящихся к уравнениям 1-й и 2-й степени, практические вычислительные и конструктивные задачи архитектуры, землемерия и т. д.

В то же время уже в школе Пифагора из арифметики была выделена в отдельную область теория чисел, т. е. совокупность математических знаний, относящихся к общим свойствам операций с натуральными числами. В это время уже стали известными способы суммирования простейших арифметических прогрессий.

Наряду с геометрическим доказательством теоремы Пифагора был найден способ отыскания неограниченного ряда троек «пифагоровых» чисел. Было открыто много математических закономерностей теории музыки. Особенностью школы Пифагора являлось то, что отдельным числам и числовым соотношениям приписывались таинственные, магические свойства, а само занятие теорией чисел рассматривалось как удел «избранных» и «посвященных». Числовой мистицизм пифагорейцев, разумеется, имел не естественнонаучное, а социально-политическое происхождение.

В тот же период времени происходили абстрагирование и систематизация геометрических сведений. Были написаны специальные книги, излагающие сложившуюся к тому времени систему геометрии. Таковы были, например, «Начала» Гиппократы Хиосского. В геометрических работах вводились и совершенствовались приемы геометрического доказательства. Рассматривались, в частности, теорема Пифагора, задачи о квадратуре круга, трисекции угла, удвоение куба, квадрирование ряда площадей, в том числе ограниченных кривыми линиями.

Одной из первых побудительных причин к созданию математических теорий явилось открытие иррациональности, вначале в виде установления геометрического факта несоизмеримости двух отрезков. Значение этого шага в развитии математики трудно переоценить. С ним в математику вошло такое понятие,

которое представляет собой сложную математическую абстракцию, не имеющую достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте.

Едва ли не первой открытой иррациональностью явился корень из 2. Можно предполагать, что исходным пунктом этого открытия были попытки найти общую меру с помощью алгоритма последовательного вычитания, известного под именем алгоритма Евклида. Возможно, что некоторую побудительную роль сыграла задача математической теории музыки: деление октавы, приводящей к решению пропорции $1 : n = n : 2$. Не последнюю роль, по-видимому, играл и характерный для пифагорейской школы общий интерес к проблемам теории чисел.

Очень рано стало известным древним грекам логически строгое доказательство иррациональности путем сведения к противоречию.

Для исследования вновь открываемых квадратичных иррациональностей сразу же оказалось необходимым разработать теорию делимости.

Появление иррациональностей означало для неокрепшей греческой математики одновременное появление серьезных трудностей как в теоретико-числовом, так и в геометрическом плане. Была фактически поставлена под удар вся теория метрической геометрии и теория подобия. Необходимость научного осмысления сущности открытого явления и его сочетания со сложившимися представлениями побудила к дальнейшему развитию математических теорий.

Этот следующий этап был ознаменован попыткой создать для нужд научного исследования общую математическую теорию, пригодную как для рациональных чисел, так и для иррациональных величин. Коль скоро после открытия иррациональности оказалось, что совокупность геометрических величин (например, отрезков) более полна, чем множество рациональных чисел, то представилось целесообразным это более общее исчисление строить в геометрической форме. Это исчисление было создано. В литературе оно получило название геометрической алгебры.

Первичными элементами геометрической алгебры являлись отрезки прямой. С ними были определены все операции исчисления. Сложение интерпретировалось приставлением отрезков, вычитание — отбрасыванием от отрезка части, равной вычитаемому отрезку. Умножение отрезков приводило к построению двумерного образа; произведением отрезков a и b считался прямоугольник. Произведение трех отрезков давало параллелепипед, а произведение большего числа сомножителей в геометрической алгебре не могло быть рассматриваемо. Деление оказывалось возможным лишь при условии, что размерность делимого больше размерности делителя. Оно интерпретировалось эквивалентной задачей приложения площадей:

В геометрическую алгебру входила и совокупность геометрических предложений, интерпретирующих алгебраические тождества.

Метод приложения площадей был распространен и на случаи решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Примерами таких задач являются: определение сторон правильных вписанных многоугольников; так называемое «золотое сечение» отрезка, т. е. деление отрезка a на две части: x и $a - x$, удовлетворяющие соотношению имеющего разные разновидности в зависимости от вида квадратного уравнения.

Очевидно, что подобный метод давал только один положительный корень квадратного уравнения. Древние математики понимали необходимость так формулировать условия задач геометрической алгебры, чтобы они заведомо имели положительное решение. Поэтому на условия задачи они в необходимых случаях накладывали ограничения (диоризмы, *Stohtajios*).

Это обстоятельство выявляло ограниченность области применения методов геометрической алгебры. Еще больше возможности геометрической алгебры ограничивались из-за того, что ее объектами были образы размерности не выше второй. Соответствующими средствами построения являлись только циркуль и линейка. Можно было представить себе в рамках геометрической алгебры операции с трехмерными образами. Этого, однако, не делалось, потому что даже такая простая, казалось бы, задача, как построение куба, имеющего объем вдвое больше данного, не поддавалась решению с помощью циркуля и линейки. Задачи же, приводящиеся к уравнениям степени выше третьей, как было указано, оказывались в геометрической алгебре древних просто невозможными.

Недостаточность геометрической алгебры как общей математической теории была особенно подчеркнута выделением класса задач, неподдающихся решению с помощью циркуля и линейки. Среди этих задач наиболее известны: проблема удвоения куба, трисекции угла и квадратуры круга.

Задача об удвоении куба, т. е. о построении куба с неизвестным ребром x , но имеющего объем вдвое больше заданного, сводится к решению кубического уравнения. Задача была чрезвычайно популярной, о чем говорит дошедшая до нас легенда о требовании оракула на острове Делос увеличить вдвое объем стоящего перед ним кубического жертвенника. Многочисленные попытки решить эту задачу с помощью вычислений в поле рациональных чисел или средствами геометрической алгебры оказались, разумеется, неудачными.

Первого успеха в решении этой задачи добился Гиппократ Хиосский (середина V в. до н. э.). Он свел эту задачу (точнее говоря, несколько более общую задачу преобразования параллелепипеда в куб) к задаче о нахождении двух средних пропорциональных.

История задачи об удвоении куба является одним из примеров того, как происходит обогащение математических методов. Воздействие этой задачи было одной из причин того, что конические сечения вошли в математику, что они стали в античной математике средством решения задач, решение которых не выполняется с помощью циркуля и линейки. Впрочем, для решения задачи удвоения куба применялись и другие способы. Эратосфен, например, построил прибор (мезолабий), удобный для приближенного удвоения куба. Однако ни один из методов не имел столь большого влияния на развитие античной математики, как конические сечения.

Дальнейшая судьба рассматриваемой задачи связана с проблемой: возможно ли принципиально решить ее построениями с помощью циркуля и линейки. Вместе с развитием алгебры постановка задачи приобрела алгебраическую форму: может ли операция извлечения кубического корня из рационального числа быть сведена к конечному числу извлечений квадратного корня? Сомнение в возможности такого решения задачи высказал впервые в 1637 г. Декарт. Но только еще через 200 лет задача удвоения куба получила окончательное разрешение. В 1837 г. Ванцель доказал, что кубические иррациональности не принадлежат ни полю рациональных чисел, ни его расширению посредством присоединения квадратичных иррациональностей.

Второй знаменитой задачей античной древности, не поддававшейся решению средствами геометрической алгебры, была задача о трисекции угла, т. е. о разделении произвольного угла на три равные части. Эта задача, как и предыдущая, сводится к решению кубического уравнения. Поэтому для нас полностью понятно, что многочисленные попытки произвести трисекцию угла с помощью только циркуля и линейки не могли быть успешными и приводили в лучшем случае к сознанию необходимости введения новых методов.

Трисекция угла имела столь же длинную историю, как и удвоение куба. Сведение ее к кубическому уравнению было осознано только к IX—X вв. н. э. Строгое же доказательство невозможности точной трисекции угла циркулем и линейкой есть простое следствие из упомянутого выше результата Ванцеля.

Третьей из знаменитых задач древности является квадратура круга, т. е. задача об отыскании квадрата, равновеликого данному кругу. Эту задачу в античной Греции рассматривали в обоих аспектах: точном и приближенном. Последний подход к задаче привел к введению приближения площади круга вписанными или описанными многоугольниками и к приближенным вычислениям числа π . Огромное же количество попыток точно квадрировать круг к успеху не могли привести вследствие трансцендентной природы этой задачи. Решение же этой проблемы растянулось на много веков.

Только в конце XVIII в. И. Ламберт и А. Лежандр сумели доказать, что π не является рациональным числом. Трансцендентность же этого числа, т. е. тот факт, что оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, была доказана в 1882 г. Линдеманом. Кстати, в геометрии Лобачевского для некоторых значений радиуса параллельности квадратура круга разрешима в квадратичных иррациональностях.

Античные математики, стремившиеся теоретически точно решить задачу о квадратуре круга, этого, разумеется, не знали. Но их усилия принесли развитию математики большую пользу, обогатив ее новыми фактами и методами. Так, был разработан метод исчерпывания, являвшийся предшественником метода пределов (этот метод будет разъяснен позже). Были введены различные трансцендентные кривые, в первую очередь квадратриса. Наконец, впервые в истории математики были найдены квадратуемые фигуры, ограниченные кривыми линиями. Мы имеем здесь в виду луночки (мениски) Гиппократа Хиосского, образованные дугами окружностей.

Исследования Гиппократа опираются на теорему, что в кругах площади подобных сегментов пропорциональны квадратам диаметров.

Открытие несоизмеримостей, как мы уже указывали, поставило в тяжелое положение всю метрическую часть геометрии, теорию подобия и те разделы математики, где приходилось пользоваться начальными формами понятий непрерывности, предельного перехода и т. п. Теория рациональных чисел уже не могла служить основой этих разделов математики. Так, появление иррациональностей обусловило необходимость создания общей теории отношений, способной дать определения и ввести операции, применимые как для рациональных, так и для иррациональных величин.

Первоначальной основой теории отношений античной древности являлся алгоритм попеременного вычитания, известный под именем алгоритма Евклида. В случае, если члены отношения соизмеримы, эта цепочка обрывается; несоизмеримость не дает конечного алгоритма. Алгоритм попеременного вычитания эквивалентен представлениям с помощью непрерывных дробей.

Однако попытка ввести операции над отношениями, определенными таким образом, сразу встретила серьезные математические трудности. Например, чтобы ввести умножение отношений, надо было найти способ определения неполных частных непрерывной дроби — произведения через неполные частные непрерывных дробей — сомножителей. Для этого и в наше время не существует никакой сколько-нибудь эле-

ментарной формулы. Наконец, в то время не существовало еще общего понятия величины. В силу этих обстоятельств алгоритм Евклида не сделался основой теории отношений.

Следующая концепция античной общей теории отношений связывается с именем Евдокса (ок. 408 г. — ок. 355 г. до н. э.). Ему же приписывается создание теории пропорций.

В этой теории введена только одна операция составления отношений, соответствующая операции умножения действительных чисел. Если существуют два отношения $a : b$ и $b : c$, то из них можно составить отношение $a : c$. Это отношение называется двойным. Возможно составление и более сложных отношений. Введение только одной операции объясняется тем, что теория Евдокса применялась лишь в учении о подобии, где служила основой теории пропорций, и при определении площадей и объемов.

Мы уже упоминали о некоторых аналогиях между античной теорией отношений и современными теориями действительного числа. Наибольшее основание для подобных аналогий дает теория сечений Дедекинда. Однако различия между теорией отношений Евдокса и теорией сечений Дедекинда этим замечанием не исчерпываются. Дело в том, что первая из них, хотя и осуществляет разбиение пар целых чисел на классы, но не доказывает обратного. Именно не доказывается, что любому такому разбиению соответствует некоторая пара архимедовых величин, определяющих это разбиение. Кроме того, не определяются условия, которым должны удовлетворять множества пар целых чисел, чтобы быть классами разбиения, т. е. не быть пустыми, не пересекаться и обладать свойством односторонности любого элемента одного множества по отношению к любому элементу другого множества.

Наконец, у Дедекинда предварительно определены все четыре действия арифметики, тогда как у Евдокса введена только одна операция, а множество пар целых чисел осталось неупорядоченным. Иначе говоря, вещественные числа Дедекинда образуют поле, тогда как отношения Евдокса образуют группу.

Дальнейшее развитие античной теории отношений пошло по пути трактования отношений как обобщенных чисел и отождествления их с дробями. Так поступали Архит, Архимед, Герон и многие другие ученые. В этом сказалось влияние практики, требовавшей развития вычислительно-алгоритмических методов и распространения их на все более широкие классы чисел.

Мы остановились на этом примере для того, чтобы показать, что математические теории античности имеют зачастую много общего с современными математическими теориями. Однако надо учиться всегда выделять специфику их исторического развития, чтобы не впасть в одну из двух ошибок: отождествления прошлого с настоящим, или нигилистического отрыва настоящего от прошлого, того отрыва, который делает исследователя слепым перед контурами будущего.