МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

А. Б. Шишкин

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественно-математическим профилям педагогического образования

Славянск–на–Кубани
Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
2016

УДК 517.53
ББК 22.141я73
Ш655

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани

Шишкин, А. Б.
Ш655 Элементарные функции комплексной переменной : учеб. пособие для студентов естественно-математических специальностей / А. Б. Шишкин. — Славянск–на–Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2016. — 134 с. 100 экз.
ISBN 978-5-90363-081-3

Книга содержит изложение основных понятий и теорем аксиоматической теории основных элементарных функций действительной и комплексной переменных. Она написана на основе лекций, в течение ряда лет читаемых автором в Армавирском государственном педагогическом университете, в Славянском-на-Кубани государственном педагогическом институте и в филиале Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани. Прилагаются материалы к практическим занятиям.

Пособие предназначено для студентов естественно-математических профилей подготовки направления 44.03.01 Педагогическое образование. Оно может быть использовано при изучении математического анализа, теории функций действительной переменной, теории функций комплексной переменной и др.

УДК 517.53
ББК 22.141я73

ISBN 978-5-90363-081-3

Оглавление

Введение

Современное образование перешло на многоуровневую систему подготовки специалистов. Предусмотрены следующие уровни высшего образования: бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура. В связи с этим меняются задачи и роль математического образования в вузе. Необходимость повышения эффективности подготовки будущих специалистов становится все больше очевидной. На современном этапе система высшего образования играет все большую роль в жизни общества. Время не стоит на месте, наука движется вперед, и ранее сделанные научные открытия занимают свое место в системе учебных знаний. Поэтому возможно рождение нового понимания, нового взгляда на хорошо известные вещи. В связи с этим возникает необходимость изменения традиционных методик и предложения новых оптимизированных подходов к обучению основным понятиям математики.

Одним из важнейших понятий математики является понятие функции, которое Ф. Клейн считал центральным понятием математики. Само понятие «функция» возникло в XVII веке и прошло сложный и трудный путь развития. Среди ученых, внесших большой вклад в развитие представлений о функции, были Г. В. Лейбниц, И. Ньютон, Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский, Л Дирихле, А. Н. Колмогоров и др.

Понятие «элементарной функции» возникает после выделения семейства «основных элементарных функций» и семейства функциональных операций. Функция называется элементарной, если она может быть получена из конечной совокупности основных элементарных функций с помощью конечной последовательности выделенных функциональных операций. Изучение элементарных функций в большой степени связано с поиском эффективных подходов к определению основных элементарных функций, ориентированных на обучение в условиях многоуровневого образования (школа, бакалавриат и магистратура).

Наиболее перспективным является подход основанный на аксиоматическом методе, который предполагает аксиоматическое определение основных элементарных функций. Этот вывод основан на следующих наблюдениях:

– аксиоматический подход позволяет разработать единую аксиоматику элементарных функций действительной и комплексной переменных;

– он допускает простое развитие на семейство многозначных элементарных функций комплексной переменной;

– использование аксиоматического метода эффективнее и экономнее по сравнению с традиционным подходом к введению элементарных функций;

– аксиоматический метод определения основных элементарных функций легко адаптируется к различным уровням образования.

Изучение элементарных функций комплексной переменной предполагает твёрдое знание определений и свойств элементарных функций действительной переменной. Эти знания не могут быть ограничены школьными учебниками по математике, так как последние не обладают достаточной степенью строгости. В учебниках по действительному анализу сложно найти достаточно полный и методически разработанный материал по этому вопросу. По-видимому, следует признать, что вполне элементарного, строгого и одновременно краткого, но лишённого пробелов изложения теории элементарных функций действительной переменной не существует.

Элементарные функции в вузе изучаются в курсе математического анализа и в курсе теории функций комплексной переменной. В этих курсах при рассмотрении основных элементарных функций, как правило, используются традиционные подходы. Имеется не так много математической литературы, в которой теория элементарных функций излагается последовательно и в достаточной мере подробно. Одна из них — книга «Основные понятия школьной математики» В. А. Любецкого. Однако система аксиом В. А. Любецкого распространяется только на функции вещественной переменной и не затрагивает элементарных функций комплексной переменной. Анализ данной книги позволил выделить ее положительные и отрицательные стороны.

Несомненным преимуществом изложения материала заключается в том, что автор показывает место основных элементарных функций в гораздо более широкой системе современных представлений высшей математики. Автор предлагает единый, универсальный подход к изучению элементарных функций действительной переменной, в основании которого лежит аксиоматический метод. Он строго и последовательно излагает материал. При этом автор опирается на фундаментальное наблюдение: каждая из основных алгебраических элементарных функций, т.е. линейная, показательная, логарифмическая и степенная функции, является непрерывным гомоморфизмом всего лишь двух числовых групп $\mathbf{R}_+$ и $\mathbf{R}$ в себя или друг в друга. Это наблюдение позволяет легко сформулировать одну (первую) аксиому для любой основной алгебраической элементарной функции. Вторая аксиома — подобие начального условия Коши для дифференциального уравнения, связана с фиксированием точки, через которую проходит график определяемой элементарной функции. Этих двух аксиом достаточно, если предполагать, что определяемая элементарная функция является непрерывной.

Хотя изложение материала в книге В. А. Любецкого ведется систематически и постепенно, можно выделить и ряд недостатков. Автор с начальных определений предполагает, что читатель уже знаком с основными элементарными функциями на том уровне их понимания, который выносится из средней школы и первых курсов высшей школы. Также он предполагает некоторую опытность читателя в оперировании основными алгебраическими, топологическими и логическими понятиями из математических курсов (алгебры и теории чисел, анализа, геометрии, математической логики и теории алгоритмов). Большинство вопросов рассматривается с точки зрения инвариантов подходящей группы преобразований и для студентов начальных курсов вузов такое изложение материала довольно громоздко. Кроме того, при определении линейной, показательной, степенной и логарифмической функций автор использует естественный порядок введения данных, а потом порядок нарушается, и тригонометрические функции он рассматривает уже после изучения комплексных чисел; вводит их через экспоненциальную функцию комплексной переменной. Это вполне корректно в общих границах высшей математики, но не приемлемо на начальных этапах освоения аксиоматической теории элементарных функций.

Настоящая книга содержит последовательное изложение основных понятий и теорем аксиоматической теории элементарных функций действительной и комплексной переменных и является введением в упомянутую теорию. При этом охватывается случай многозначных элементарных функций комплексной переменной. Книга написана под влиянием книги профессора В. А. Любецкого и не содержит недостатков, которые были отмечены выше.

При различных способах введения элементарных функций сложности локализуются в разных частях тех или иных разделов математического анализа. Если говорить о начальных разделах анализа, то подход с позиций теории функциональных уравнений в классе непрерывных функций, на наш взгляд, является наиболее предпочтительным. Функциональное уравнение

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

рассматривалось еще Лежандром при доказательстве основной теоремы проективной геометрии (1794 г.) и Гауссом при исследовании распределений вероятностей (1809 г.). Решение этого уравнения и уравнений

$$f(x+y)=f(x)f(y),\quad f(xy)=f(x)+f(y),\quad f(xy)=f(x)f(y)$$

в классе непрерывных функций впервые получил Коши (1821 г.). Оказалось, что непрерывные решения этих четырех уравнений исчерпываются функциями

$$x\to ax,\quad x\to a^x,\quad x\to \log_a x,\quad x\to x^a$$

соответственно. Это означает, что уравнения Коши могут быть использованы при аксиоматическом определении основных элементарных функций одной действительной переменной.

Отметим, что к *основным элементарным функциям* действительной переменной относятся:

1) константа,
2) линейная функция,
3) степенная функция,
4) показательная функция,
5) логарифмическая функция,
6) тригонометрические функции (синус и косинус).

Произвольная *элементарная функция* может быть получена из основных за конечное число шагов, каждый из которых предполагает выполнение одной из функциональных операций:

1) переход к сужению,
2) образование композиции,
3) выполнение арифметической операции,
4) переход к обратной функции.

При определении основных элементарных функций целесообразно воспользоваться *аксиоматическим методом.* Этот метод предполагает формулировку двух аксиом и последующую проверку существования и единственности функции, удовлетворяющей данным аксиомам. В качестве первой аксиомы выступает характеристическое свойство выбранной элементарной функции (функциональное уравнение, которому она удовлетворяет); ее содержание определено вполне однозначно. Вторая аксиома содержит условие единственности (начальное условие) и может быть сформулирована в разных формах. Двух этих аксиом достаточно, если предполагать, что определяемая элементарная функция является непрерывной.

Линейной функцией с угловым коэффициентом $k\in\mathbf{R}$ называется непрерывная функция f, определённая на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \quad f(1) = k.$$

Логарифмической функцией с основанием e называется непрерывная действительная функция, определённая на промежутке $(0, +\infty)$ и удовлетворяющая условиям:

$$f(xy) = f(x) + f(y); \quad f(e) = 1.$$

Показательной функцией с основанием e называется непрерывная действительная функция f, определённая на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

$$f(x+y) = f(x)f(y); \quad f(1) = e.$$

Степенной функцией с показателем $\alpha \neq 0$ называется непрерывная действительная функция, определённая на множестве положительных действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

$$f(xy) = f(x)f(y); \quad f(e) = e^{\alpha}.$$

Непрерывные действительные функции s и c, определённые на множестве всех действительных чисел, называются *синусом и косинусом* соответственно, если они удовлетворяют следующим аксиомам:

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y), \quad c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y);$$

$$s\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad c\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

и $c(x) > 0$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$. Корректность данной аксиоматики обсуждалась, например, в книгах [1], [2], [3].

Аксиоматический метод допускает естественный перенос на случай комплексной переменной. Например, опираясь на приведенную выше аксиоматику, легко убедиться в корректности следующих аксиоматических определений основных элементарных (однозначных) функций комплексной переменной.

Линейной функцией с коэффициентом $a \neq 0$ называется непрерывная комплексная функция f, определенная на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям:

$$f(z+w) = f(z) + f(w); \quad f(1) = a, \ f(i) = ia.$$

Показательной функцией комплексной переменной называется непрерывная комплексная функция f, определенная на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям:

$$f(z+w) = f(z)f(w);\quad f(1) = e,\ f\left(\tfrac{\pi}{2}i\right) = i$$

и $\operatorname{Re} f(iy) > 0$ для любого $y \in (0; \frac{\pi}{2})$. Непрерывные комплексные функции s и c, определённые на множестве всех комплексных чисел, называются *комплексными синусом* и *комплексным косинусом* соответственно, если они удовлетворяют следующим условиям:

$$s(z+w) = s(z)c(w) + c(z)s(w),\quad c(z+w) = c(z)c(w) - s(z)s(w);$$

$$s\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1,\quad c\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0,\quad s\left(\tfrac{1}{i}\right) = \operatorname{sh} 1,\quad c\left(\tfrac{1}{i}\right) = \operatorname{ch} 1$$

и $\operatorname{Re}(c(y) \pm s(y)) > 0$ для любого $y \in (0; \frac{\pi}{2})$. Иной подход к проблеме аксиоматизации элементарных (однозначных) функций комплексной переменной, основанный на теории групп, предложен в [4].

Ситуация серьезно меняется, если поставить вопрос об аксиоматическом определении многозначных элементарных функций комплексной переменной. Здесь, в первую очередь, речь идет о *многозначной линейной*, *логарифмической*, *многозначной степенной* и *многозначной показательной* функциях комплексной переменной. Аксиоматический метод может быть применен и в этой ситуации. В случае многозначных решений уравнения Коши дополняются обратными уравнениями Коши и рассматриваются уже системы уравнений:

$$F(z+w) = F(x) + F(w),\quad F(z-w) = F(z) - F(w);$$

$$F(z+w) = F(z)F(w),\quad F(z-w) = \frac{F(z)}{F(w)};$$

$$F(zw) = F(z) + F(w),\quad F\left(\frac{z}{w}\right) = F(z) - F(w);$$

$$F(zw) = F(z)F(w),\quad F\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{F(z)}{F(w)}.$$

Для решения таких систем требуется существенная топологическая подготовка, связанная с определением *фактор-пространства полярного расслоения* (*римановой поверхности аргумента*), которое, в свою очередь, связано с детальным анализом понятия многозначного отображения, его непрерывного представления и определением непрерывного многозначного отображения. Понятие непрерывного многозначного отображения в математической литературе отсутствует и используется автором впервые. Содержание этой книги может служить хорошим обоснованием полезности этого определения.

Содержание книги предназначено для усвоения на разных уровнях образования (в рамках факультатива, элективного курса, спецкурса бакалавриата или магистратуры). Оно может быть использовано учителями средних общеобразовательных школ при рассмотрении элементарных функций в классах и школах с углубленным изучением математики, а также студентами и преподавателями вузов при подготовке к занятиям по математическому анализу, по теории функций действительной переменной и по теории функций комплексной переменной. Учебный материал подобран так, что преподаватель может выносить тему «Элементарные функции действительной переменной» или тему «Элементарные функции комплексной переменной» на самостоятельное изучение (ознакомление).

Глава 1

Элементарные функции действительной переменной

1.1 Число Эйлера и число Пифагора

В основе аксиоматической теории эдементарных функций действительной переменной лежат два замечательных числа. Пусть $n \in \mathbf{N}$ и

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)...(n-n+1))}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Лемма 1.1 *Для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства*

$$2 \leq e_n < e_{n+1} < 3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению числа e_n, имеем

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Каждое слагаемое в последней сумме положительно. Если число n заменить числом $n+1$, то каждое слагаемое в этой сумме не уменьшится и добавится ещё одно положительное слагаемое. Значит, $e_n < e_{n+1}$. С другой стороны, если учесть, что при $k = 1, ..., n$ выполняются неравенства $1 - \frac{k}{n} \leq 1$, $k! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k \geq 2^{k-1}$, то получим

$$e_n \leq 1 + 1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \leq 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

При этом, используя формулу для суммы n первых членов геометрической прогрессии, имеем

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^n}<1.$$

Значит, для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $e_n < 3$. При этом $e_n \geq e_1 = 2$, то есть $2 \leq e_n < 3$ для любого натурального n. Лемма доказана. ■

Из леммы 1.1 вытекает, что числовая последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и ограничена. Ее предел называется *числом Эйлера* и обозначается e. Значит,

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

При этом $e > e_1 = 2$, то есть

$$2 < e \leq 3.$$

Пусть $n \in \mathbf{N}$ и

$$\pi_n := \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{4}{2k+1} = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...+\frac{1}{4n+1}\right).$$

Лемма 1.2 *Для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства*

$$2 < \pi_{n+1} < \pi_n < 4.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению числа π_n, для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\frac{\pi_n}{4} = 1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-...-\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+1}\right)<1,$$

$$\frac{\pi_{n+1}}{4} = \frac{\pi_n}{4}-\left(\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+5}\right)<\frac{\pi_n}{4}.$$

Значит, $\pi_{n+1} < \pi_n$ и

$$\frac{\pi_n}{4} = \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)+\frac{1}{4n+1}>\frac{2}{3}.$$

Отсюда вытекает, что $2 < \frac{8}{3} < \pi_{n+1} < \pi_n < 4$. Лемма доказана. ■

Из леммы 1.2 вытекает, что последовательность $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена и убывает. Ее предел называется *числом Пифагора* и обозначается π. По свойствам знакочередующихся числовых рядов

$$\pi := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{4}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{2k+1}.$$

При этом

$$2 < \pi < 4.$$

1.2 Линейная функция

Определение 1.1 *Линейной функцией с угловым коэффициентом k из $\mathbf{R}$, $k \neq 0$ называется непрерывная функция f, определённая на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:*

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ *для любых* $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$*;*

2) $f(1) = k$*.*

Пусть f — линейная функция. Из равенства $f(0) = f(0)+f(0)$ вытекает, что

$$f(0) = 0.$$

Из равенства $f(0) = f(x) + f(-x)$ вытекает, что для любых $x \in \mathbf{R}$ выполняется соотношение

$$f(-x) = -f(x).$$

Следовательно, линейная функция является нечётной.

Отметим еще, что для любых $x \in \mathbf{R}$ и $r \in \mathbf{Q}$ выполняется равенство

$$f(rx) = rf(x).$$

Действительно, если $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$, то по индукции $nf(x) = f(nx)$. Это означает, что натуральный множитель можно выносить за знак функции. В силу нечётности линейной функции $-nf(x) = f(-nx)$. Учитывая очевидное соотношение $0f(x) = f(0x)$, заключаем, что требуемое равенство выполняется для всех $r \in \mathbf{Z}$. Значит, произвольный целый множитель тоже можно выносить за знак функции. В то же время, если $n \in \mathbf{N}$, то

$$f(x) = f\left(n\frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right),$$

то есть
$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x).$$
Если $r \in \mathbf{Q}$, то сущестуют такие $m \in Z$ и $n \in N$, что $r = \frac{m}{n}$. Значит, по доказанному
$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} f\left(x\right) = rf(x).$$

Теорема 1.1 *Не существует двух различных непрерывных функций, определённых на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющих аксиомам* 1) *и* 2).

Доказательство. Допустим что функции f и g удовлетворяют аксиомам 1), 2) и $f(1) = g(1) = k$. Выберем произвольное $x \in \mathbf{R}$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ символом m_n обозначим целую часть $[nx]$ числа nx. Тогда
$$m_n \leq nx \leq m_n + 1$$
и
$$\frac{m_n}{n} \leq x \leq \frac{m_n + 1}{n}.$$
Последовательность $\left\{\frac{m_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x. Действительно,
$$\left|x - \frac{m_n}{n}\right| = x - \frac{m_n}{n} \leq \frac{m_n + 1}{n} - \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$
при $n \to \infty$. При этом
$$f\left(\frac{m_n}{n}\right) = f\left(\frac{m_n}{n} \cdot 1\right) = \frac{m_n}{n} f\left(1\right) = \frac{m_n}{n} k,$$
$$g\left(\frac{m_n}{n}\right) = g\left(\frac{m_n}{n} \cdot 1\right) = \frac{m_n}{n} g\left(1\right) = \frac{m_n}{n} k.$$
В силу непрерывности функций f и g имеем
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{m_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} k = kx,$$
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{m_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} k = kx.$$
Значит, функции f и g совпадают. Теорема доказана. ■

Из доказанной теоремы вытекает, что семейство всех линейных функций исчерпывается функциями вида
$$x \to kx.$$

1.3 Логарифмическая функция

Определение 1.2 *Логарифмической функцией с основанием e называется непрерывная действительная функция, определённая на промежутке* $(0,+\infty)$[1] *и удовлетворяющая условиям:*

1) $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ *для любых* $x_1, x_2 > 0$;

2) $f(e) = 1$.

Пусть f — какая-либо логарифмическая функция с основанием e. Из равенства $f(1) + f(1) = f(1)$ вытекает, что

$$f(1) = 0.$$

Из равенства $f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0$ вытекает, что $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ для любого $x > 0$. Следовательно, для любых $x_1, x_2 > 0$ имеем $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2)+f\left(\frac{1}{x_1}\right) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)$. Значит, для любых $x_1, x_2 > 0$ выполняется равенство

$$f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Кроме того, для любых $x > 0$ и $n \in \mathbf{Z}$ выполняется равенство

$$nf(x) = f(x^n).$$

Действительно, если $n \in \mathbf{N}$, то по индукции получаем $nf(x) = f(x^n)$. При этом $-nf(x) = f(x^{-n})$. Учитывая очевидные соотношения $0f(x) = 0 = f(1) = f(x^0)$, заключаем, что требуемое равенство выполняется для всех $n \in \mathbf{Z}$.

Далее убедимся, что логарифмическая функция f является монотонной. Для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем $1 + \frac{1}{n} > 1$. Значит, последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{1; 1+\frac{1}{n}; \left(1+\frac{1}{n}\right)^2; \ldots\right\}$$

[1] Если предположить, что логарифмическая функция определена в нуле, то $f(0\cdot x) = f(0)+f(x)$ или $f(x) = 0$. Это означает, что функция f совпадает с тождественным нулем, то есть является константой. Отсюда следует, что логарифмическая функция не может быть определена в нуле.

Если предположить, что логарифмическая функция определена в точке -1, то $f(-1)+f(-1) = f(1)$ и $f(-x) = f(-1) + f(x)$. Из этих соотношений вытекает, что функция f четная. Понятно, что в этих условиях сужение функции f на промежуток $(0,+\infty)$ является естественным.

Отметим, что функция $x \to \ln|x|$ является элементарной функцией, так как совпадает с композицией $\ln\sqrt{x^2}$, но не является основной элементарной функцией. Однако ее сужения на промежуток $(0,+\infty)$ является основной элементарной функцией. Аналогично, функция $x \to x^2$, как и любая рациональная функция, является элементарной функцией, а ее сужение на промежуток $(0,+\infty)$ является основной элементарной функцией, то есть степенной функцией с показателем 2.

возрастает и стремится к $+\infty$. Элементы этой последовательности разбивают промежуток $[1; +\infty)$ на полуинтервалы $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}\right)$, $k \in \mathbf{N}$. Следовательно, для любого $x \geq 1$ найдётся такое натуральное k_n, что выполняются неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n-1} \leq x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n}.$$

Из следующих соотношений

$$\left|x-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n-1}\right| = x-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n-1} \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n-1} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n-1} \leq \frac{1}{n}x$$

вытекает, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n} \to x$ при $n \to +\infty$. В силу непрерывности логарифмической функции имеем

$$f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n}\right) \to f(x),\ n \to +\infty.$$

Так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \to e$ и $f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \to 1$ при $n \to +\infty$, то для достаточно больших n выполняется неравенство

$$f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k_n}\right) = \frac{1}{n}k_n f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) \geq 0.$$

Следовательно, $f(x) \geq 0$ для любого $x \geq 1$. Значит, для любых $x_2 \geq x_1 > 0$ имеем $f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \geq 0$. Это означает, что логарифмическая функция с основанием e возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.

Теорема 1.2 *Не существует двух различных непрерывных функций, определённых на промежутке* $(0, +\infty)$ *и удовлетворяющих аксиомам* 1), 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим что функции f и g удовлетворяют аксиомам 1), 2). Рассмотрим последовательность $\left\{e^{k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Она возрастает и стремится к $+\infty$. При этом $e^0 = 1$. Значит, для любого $x \geq 1$ и любого натурального n найдётся такое натуральное k_n, что

$$e^{k_n-1} \le x^n < e^{k_n}.$$

В силу монотонности функций f и g для всех натуральных n выполняются неравенства

$$k_n - 1 \le f(x^n) \le k_n,\ k_n - 1 \le g(x^n) \le k_n.$$

Значит, числа $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат отрезку $\left[\frac{k_n-1}{n}, \frac{k_n}{n}\right]$. Следовательно,

$$|f(x) - g(x)| \le \frac{k_n}{n} - \frac{k_n - 1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Но это возможно только при условии, что $f(x) = g(x)$. Если $x \in (0;1)$, то $\frac{1}{x} > 1$. Значит,

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) = -g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x).$$

Следовательно, $f(x) = g(x)$ для любого $x > 0$. Теорема доказана. ■

Доказанная теорема решает вопрос единственности логарифмической функции. Обратимся к вопросу существования логарифмической функции и покажем, что функция

$$f(x) := \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$$

удовлетворяет аксиомам 1), 2). Во-первых, по свойствам интеграла с переменным верхним пределом функция f является непрерывной на промежутке $(0;+\infty)$. При этом

$$f(x_1x_2) := \int\limits_1^{x_1x_2} \frac{dt}{t} = \int\limits_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int\limits_{x_1}^{x_1x_2} \frac{dt}{t} = f(x_1) + f(x_2).$$

Действительно, осуществив замену переменной $t \to \frac{t}{x_1}$ в интеграле $\int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{dt}{t}$, мы сводим этот интеграл к интегралу $\int_1^{x_2} \frac{dt}{t}$. Значит, функция f удовлетворяет аксиоме 1). Во-вторых, по теореме о среднем для любого натурального n существует такое $c_n \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$, что

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{nc_n}.$$

При этом
$$f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = nf\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{c_n} \to 1$$
при $n \to +\infty$. Значит,
$$f(e) = \lim_{n\to\infty} f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1.$$

Следовательно, функция f удовлетворяе аксиоме 2).

Значение логарифмической функции с основанием e в точке $x > 0$ обозначается $\ln x$ и называется *натуральным логарифмом числа* x. По свойствам интеграла с переменным верхним пределом из представления
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$
вытекает, что логарифмическая функция с основанием e дифференцируема и
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$
При этом
$$\frac{d}{dx}\ln x\bigg|_{x=1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Область значений логарифмической функции совпадает с множеством всех действительных чисел. Действительно,
$$\ln n = \int\limits_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_k^{k+1}\frac{dt}{t} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \to +\infty,$$
$$\ln\frac{1}{n} = -\ln n \to -\infty,$$
при $n \to \infty$. Остальное вытекает из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Логарифмическая функция с основанием $a > 0$ и $a \neq 1$ определяется по следующему правилу:
$$x \to \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Ее значение в точке $x > 0$ обозначается $\log_a x$ и называется *логарифмом числа x по основанию a*. Непосредственно из определения вытекает, что логарифмическая функция по основанию a возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$. При этом

$$\log_a a = 1.$$

и для любых $x_1, x_2 > 0$ выполняется равенство

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Пусть $b > 0$ и $b \neq 1$. Тогда

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln b}\frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x.$$

Кроме того, для любых $x > 0$ и $m \in \mathbf{Z}$ выполняется равенство

$$\log_a x^m = m \log_a x.$$

Следовательно,

$$\log_{a^m} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^m} = \frac{1}{m}\log_a x,$$

в частности,

$$\log_{a^{-1}} x = -\log_a x.$$

1.4 Показательная функция

Определение 1.3 *Показательной функцией*[2] *с основанием e называется непрерывная действительная функция f, определённая на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:*

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ *для любых* $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$*;*

2) $f(1) = e$.

Пусть f — показательная функция с основанием e. Если предположить, что при некотором $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $f(x) = 0$, то

[2]Функцию $x \to e^{cx}$, $c \neq 0$ называют *экспонентой с показателем* c, значит, показательная функция с основанием e является экспонентой с показателем 1. Эту функцию иногда называют просто *экспонентой*. Показательная функция с произвольным основанием $a > 0$, $a \neq 1$ совпадает с экспонентой с показателем $c := \ln a$.

$f(1) = f(x + (1 - x)) = f(x)f(1 - x) = 0$. Но это противоречит аксиоме 2). Следовательно, $f(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Более того, из теоремы о промежуточных значениях вытекает, что $f(x) > 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Из равенства $f(0 + 0) = f(0)f(0)$ вытекает, что

$$f(0) = 1,$$

а из равенства $f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x)$ вытекает, что $f(-x) = f(x)^{-1}$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$f(x_2 - x_1) = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}.$$

Кроме того, для любых $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{Z}$ выполняется равенство

$$f(mx) = f(x)^m.$$

Следовательно, для любого $m \in \mathbf{Z}$ имеют место равенства

$$f(m) = f(m \cdot 1) = f(1)^m = e^m.$$

Далее убедимся, что функция f является монотонной. Выберем произвольное действительное число x. Для любого натурального n выполняется неравенство $[nx] \leq nx < [nx] + 1$, где $[nx]$ — целая часть числа nx. Значит,

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx] + 1}{n}.$$

Из соотношений

$$\left| x - \frac{[nx]}{n} \right| = x - \frac{[nx]}{n} < \frac{[nx] + 1}{n} - \frac{[nx]}{n} = \frac{1}{n}$$

вытекает, что

$$\frac{[nx]}{n} \to x$$

при $n \to +\infty$. В силу непрерывности функции f имеем

$$f\left(\frac{[nx]}{n}\right) \to f(x)$$

при $n \to \infty$. Так как

$$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = f(1) = e > 1,$$

то $f\left(\frac{1}{n}\right) > 1$ при любом натуральном n. При этом, если $x \geq 0$, то $[nx] \geq 0$. Значит,

$$f\left(\frac{[nx]}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{[nx]} \geq 1.$$

Следовательно,

$$f(x) \geq 1$$

для любого $x \geq 0$. Значит, для любых $x_2 \geq x_1$ имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)} - 1\right) f(x_1) = (f(x_2 - x_1) - 1)\, f(x_1) \geq 0.$$

Следовательно, показательная функция с основанием e не убывает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 1.3 *Не существует двух различных непрерывных функций, определённых на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющих аксиомам* 1), 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим что функции f и g удовлетворяют аксиомам 1), 2). Выберем произвольные $x \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$. В силу монотонности функций f и g имеем

$$f([nx]) \leq f(nx) \leq f([nx]+1),\ \ g([nx]) \leq g(nx) \leq g([nx]+1),$$

$$e^{[nx]} \leq f(x)^n \leq e^{[nx]+1},\ \ e^{[nx]} \leq g(x)^n \leq e^{[nx]+1}.$$

Значит, в силу монотонности логарифмической функции

$$[nx] \leq n \ln f(x) \leq [nx] + 1,\ \ [nx] \leq n \ln g(x) \leq [nx] + 1.$$

Следовательно, значения $\ln f(x)$ и $\ln g(x)$ лежат на отрезке с концами в точках $\frac{[nx]}{n}$ и $\frac{[nx]+1}{n}$. Длина этого отрезка равна $\frac{1}{n}$, следовательно, для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$|\ln f(x) - \ln g(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Но это возможно лишь при условии, что $\ln f(x) = \ln g(x)$. Логарифмическая функция является взаимно однозначной, значит, $f(x) = g(x)$. Таким образом показано, что функции f и g совпадают. Теорема доказана. ■

Данная теорема решает вопрос единственности показательной функции. Рассмотрим вопрос существования хотя бы одной показательной функции и покажем, что функция f, обратная к логарифмической функции с основанием e, удовлетворяет аксиомам 1), 2). Действительно, пусть x_1 и x_2 принадлежат $\mathbf{R}$. Область значений логарифмической функции совпадает с областью определения функции f и совпадает с $\mathbf{R}$. Значит, найдутся такие положительные y_1 и y_2, что $x_1 = \ln y_1$ и $x_2 = \ln y_2$. При этом выполняются равенства $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Следовательно,

$$f(x_1 + x_2) = f(\ln y_1 + \ln y_2) = f(\ln y_1 y_2) = y_1 y_2 = f(x_1) f(x_2).$$

Кроме того, $\ln e = 1$, значит, $f(1) = e$. Таким образом, вопрос существования показательной функции сводится к вопросу существования логарифмической функции.

Значение показательной функции с основанием e в точке x обозначается e^x и называется *экспонентой числа* x (от лат. *exponens* — «показывающий»). Из свойств обратных функций вытекает, что показательная функция с основанием e возрастает, дифференцируема и

$$\frac{d}{dx} e^x = \left. \frac{1}{\frac{d}{dy} \ln y} \right|_{y = e^x} = e^x.$$

При этом

$$\left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Показательная функция с основанием a определяется по правилу

$$x \to e^{x \ln a}.$$

Её значение в точке $x \in \mathbf{R}$ обозначается a^x и называется *степенью числа* a *с показателем* x. Согласно этому определению, имеем

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Это определение согласовано с определением степени числа a с целым показателем. Действительно, для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$e^{n \ln a} = e^{\ln a + \ldots + \ln a} = e^{\ln a} \ldots e^{\ln a} = a \cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

$$e^{-n \ln a} = e^{n \ln a^{-1}} = (a^{-1})^n = a^{-n}.$$

При этом

$$e^{0\ln a} = e^0 = 1 = a^0$$

В качестве примера вычислим предел функции $x \to (1+x)^{\frac{1}{x}}$ в точке $x = 0$. Так как

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

при $x \in (-1;1)$ и $\frac{1}{x}\ln(1+x) \to 1$ при $x \to 0$, то в силу непрерывности показательной функции $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ при $x \to 0$, то есть

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Показательная функция с основанием a является обратной к логарифмической функции с основанием a, то есть для любого $x > 0$ справедливо равенство

$$a^{\log_a x} = x.$$

Действительно, для любого $x > 0$ имеем

$$a^{\log_a x} = e^{(\log_a x)(\ln a)} = e^{\ln x} = x.$$

С другой стороны, логарифмическая функция с основанием a является обратной к показательной функции с основанием a, то есть для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$\log_a a^x = x.$$

В то же время, если $b > 0$, то для любого $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$\log_a b^x = x\log_a b.$$

Действительно, при $b = 1$ равенство, очевидно, выполнено, а если $b \neq 1$, то

$$x = \log_b b^x = \frac{\log_a b^x}{\log_a b}.$$

Далее рассмотрим основные свойства степени с произвольным показателем. Во-первых, для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}.$$

Действительно,

$$a^{x_1+x_2} = e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{x_1\ln a}e^{x_2\ln a} = a^{x_1}a^{x_2}.$$

Во-вторых,

$$(ab)^x = a^x b^x.$$

В самом деле,

$$(ab)^x = a^{\log_a (ab)^x} = a^{x(1+\log_a b)} = a^{x+\log_a b^x} = a^x a^{\log_a b^x} = a^x b^x.$$

Наконец, для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$$

Действительно,

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{\log_a (a^{x_1})^{x_2}} = a^{x_2 \log_a a^{x_1}} = a^{x_2 x_1}.$$

1.5 Степенная функция

Определение 1.4 *Степенной функцией с показателем $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ называется непрерывная действительная функция, определённая на множестве положительных действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:*

1) *$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$ для любых $x_1, x_2 > 0$;*
2) *$f(e) = e^\alpha$.*

Пусть f — какая-либо степенная функция с показателем α и $x > 0$. Если предположить, что $f(x) = 0$, то $f(e) = f\left(\frac{e}{x} x\right) = f\left(\frac{e}{x}\right) f(x) = 0$. Но это противоречит аксиоме 2). Значит, $f(x) \neq 0$ для любого $x > 0$. Более того, $f(x) > 0$ для любого $x > 0$. Действительно,

$$x = e^{\ln x} = \left(e^{\frac{1}{2}\ln x}\right)^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x) = f\left(\left(e^{\frac{1}{2}\ln x}\right)^2\right) = \left(f\left(e^{\frac{1}{2}\ln x}\right)\right)^2 > 0.$$

Теорема 1.4 *Не существует двух различных непрерывных функций, определённых на множестве положительных действительных чисел и удовлетворяющих аксиомам 1), 2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — какая-либо степенная функция с показателем α. Убедимся, что функция $g : x \to \frac{1}{\alpha}\ln f(x)$ удовлетворяет аксиомам логарифмической функции с основанием e. Действительно, по аксиоме 1)

$$\ln f(x_1x_2) = \ln f(x_1)f(x_2) = \ln f(x_1) + \ln f(x_1).$$

Значит,

$$g(x_1x_2) = \frac{1}{\alpha}\ln f(x_1x_2) = \frac{1}{\alpha}\ln f(x_1) + \frac{1}{\alpha}\ln f(x_1) = g(x_1) + g(x_2).$$

При этом в силу аксиомы D_2

$$g(e) = \frac{1}{\alpha}\ln f(e) = \frac{1}{\alpha}\ln e^{\alpha} = 1.$$

Таким образом, из теоремы единственности для логарифмической функции вытекает, что $\frac{1}{\alpha}\ln f(x) = g(x) = \ln x$ или $\ln f(x) = \alpha \ln x$, то есть значения функции f определяются однозначно

$$f(x) = e^{\alpha \ln x} = x^{\alpha}.$$

Теорема доказана. ■

Доказанная теорема решает и вопрос единственности и вопрос существования степенной функции. Рассмотрим свойства степенной функции. Прежде всего, из представления $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ вытекает, что степенная функция с показателем α является строго монотонной. Она возрастает, если $\alpha > 0$, и убывает, если $\alpha < 0$. Обратная к степенной функции $f : x \to x^{\alpha}$ с показателем α является степенной функцией $g : x \to x^{\frac{1}{\alpha}}$с показателем $\frac{1}{\alpha}$. Действительно, для любого $x > 0$ имеет место равенство

$$g(f(x)) = (x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} = x.$$

Кроме того, степенная функция с показателем α является дифференцируемой и

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha} = \frac{d}{dx}e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x}\frac{d}{dx}(\alpha \ln x) = x^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

При этом

$$\left.\frac{d}{dx}x^{\alpha}\right|_{x=1} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha.$$

1.6 Определение тригонометрических функций

Определение 1.5 *Непрерывные действительные функции s, c, определённые на множестве всех действительных чисел, называются синусом и косинусом соответственно, если они удовлетворяют следующим условиям:*

1) $s(x_1+x_2) = s(x_1)c(x_2)+c(x_1)s(x_2)$, $c(x_1+x_2) = c(x_1)c(x_2)-s(x_1)s(x_2)$ *для любых* $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$*;*

2) $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *и* $c(x) > 0$ *на интервале* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$[3].

Пусть функции s и c удовлетворяют аксиомам 1) и 2). Из аксиомы 1) вытекает, что функция $f := s^2 + c^2$ удовлетворяет соотношению

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Значит, функция

$$g : x \to e^x f\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

удовлетворяет соотношению

$$g(x_1 + x_2) = g(x_1)g(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. При этом в силу аксиомы 2) справедливы равенства

$$g(1) = ef\left(\frac{\pi}{2}\right) = e\left(s^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + c^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e.$$

По теореме единственности для показательной функции $g(x) = e^x$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Следовательно,

$$s^2(x) + c^2(x) = 1$$

для любого $x \in \mathbf{R}$. Кроме того, если $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$, то

$$1 = s\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = c(0).$$

В то же время, если $x_1 = x_2 = 0$, то $s(0) = s(0 + 0) = 2s(0)$. Значит,

$$s(0) = 0, \ c(0) = 1.$$

[3]Условие $c(x) > 0$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ является существенным. Если его удалить, то аксиомам 1) и 2) будут удовлетворять, например, две различные пары функций: $(\sin x, \cos x)$ и $(\sin 5x, \cos 5x)$.

Следовательно, для любого $x \in \mathbf{R}$

$$0 = s(x - x) = s(x)c(-x) + c(x)s(-x),$$

$$1 = c(x - x) = c(x)c(-x) - s(x)s(-x).$$

Решая эту систему уравнений относительно $c(-x)$ и $s(-x)$, получаем

$$c(-x) = c(x),\ s(-x) = -s(x),$$

то есть функция s является нечётной, а функция c является чётной. Отсюда вытекает естественное дополнение к аксиоме 1)

$$s(x_1 - x_2) = s(x_1)c(x_2) - c(x_1)s(x_2),\ c(x_1 - x_2) = c(x_1)c(x_2) + s(x_1)s(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. Из этих соотношений и аксиомы 1) вытекает, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$s(x_1)s(x_2) = \frac{c(x_1 - x_2) - c(x_1 + x_2)}{2},$$

$$s(x_1)c(x_2) = \frac{s(x_1 + x_2) + s(x_1 - x_2)}{2},$$

$$c(x_1)c(x_2) = \frac{c(x_1 + x_2) + c(x_1 - x_2)}{2}$$

и равенства

$$s(x_1) + s(x_2) = 2s\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)c\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),$$

$$s(x_1) - s(x_2) = 2c\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)s\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),$$

$$c(x_1) + c(x_2) = 2c\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)c\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right),$$

$$c(x_1) - c(x_2) = -2s\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)s\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right).$$

Осталось отметить, что функции s и c являются периодическими функциями с периодом 2π. Действительно,

$$s(\pi) = s(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = 0, c(\pi) = c(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = 1,$$

$$s(2\pi) = s(\pi + \pi) = 0, c(2\pi) = c(\pi + \pi) = 1.$$

Значит,

$$s(x + 2\pi) = s(x),\ c(x + 2\pi) = c(x)$$

для любого $x \in \mathbf{R}$.

Теорема 1.5 *Не существует двух различных пар* (s, c) *непрерывных действительных функций, определённых на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющих аксиомам* 1), 2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим что функции s и c удовлетворяют аксиомам 1), 2). Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняются соотношения

$$s\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) c\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \tfrac{1}{2} s\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

$$s^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 - c(\frac{\pi}{2^n})}{2},\ c^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1 + c(\frac{\pi}{2^n})}{2},$$

Так как $c\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$ для всех натуральных $n > 1$, то из первого соотношения и аксиомы 2) вытекает, что $s\left(\frac{\pi}{2^n}\right) > 0$ для всех натуральных $n > 1$. Значит, из второго и третьего соотношений следует, что

$$s\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 - c(\frac{\pi}{2^n})}{2}},\ c\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + c(\frac{\pi}{2^n})}{2}}$$

для всех натуральных n. Из этих рекуррентных соотношений вытекает, что значения функций s и c в точках вида $\frac{\pi}{2^n}$ определяются однозначно. Кроме того, для любых $n, m \in \mathbf{N}$ имеем

$$s\left(\frac{(m+1)\pi}{2^n}\right) = s\left(\frac{m\pi}{2^n}\right) c\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + c\left(\frac{m\pi}{2^n}\right) s\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

$$c\left(\frac{(m+1)\pi}{2^n}\right) = c\left(\frac{m\pi}{2^n}\right) c\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - s\left(\frac{m\pi}{2^n}\right) s\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Из этих рекуррентных соотношений следует, что значения функций s и c в точках вида $\frac{m\pi}{2^n}$, где $m, n \in \mathbf{N}$, тоже определяются однозначно.

Пусть $x > 0$ и

$$k_n := \left[\frac{2^n x}{\pi}\right]$$

— целая часть числа
$$\frac{2^n x}{\pi}.$$
Тогда
$$\frac{2^n x}{\pi} - 1 < k_n \le \frac{2^n x}{\pi}.$$
Следовательно,
$$\frac{k_n \pi}{2^n} \le x < \frac{(k_n+1)\pi}{2^n}.$$
Из соотношений
$$\left| x - \frac{k_n \pi}{2^n} \right| = x - \frac{k_n \pi}{2^n} \le \frac{(k_n+1)\pi}{2^n} - \frac{k_n \pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n}$$
вытекает, что последовательность
$$\left\{ \frac{k_n \pi}{2^n} \right\}_{n=n_0}^{\infty}$$
сходится к x. В силу непрерывности функций s и c
$$s(x) = \lim_{n\to+\infty} s\left(\frac{k_n \pi}{2^n}\right),\ c(x) = \lim_{n\to+\infty} c\left(\frac{k_n \pi}{2^n}\right).$$
Значит, значения функций s и c в точках $x > 0$ определяются однозначно. Нечётность функции s и чётность функции c позволяют распространить этот вывод на произвольные $x \in \mathbf{R}$. Теорема доказана. ■

Рассмотрим вопрос существования синуса и косинуса. Для этого определим две функции s и c с помощью следующих соотношений
$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ c(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
Рассмотренные степенные ряды сходятся на всей числовой прямой. Значит, функции s и c определены и бесконечно дифференцируемы на $\mathbf{R}$. При этом ряды можно почленно дифференцировать, следовательно,
$$s'(x) = c(x),\ c'(x) = -s(x)$$
для любого $x \in \mathbf{R}$.

Покажем, что функции s и c удовлетворяют аксиоме 1). Пусть

$$f(x,y) := s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y),$$

$$g(x,y) := c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y),$$
$$w(x,y) := f(x,y)^2 + g(x,y)^2.$$

Тогда

$$f'_x(x,y) = g(x,y), \ g'_x(x,y) = -f(x,y),$$
$$w'_x(x,y) = 2f(x,y)g(x,y) - 2g(x,y)f(x,y) = 0,$$

то есть функция w не зависит от переменной x. Значит,

$$w(x,y) = w(0,y) = (s(y) - s(y))^2 + (c(y) - c(y))^2 = 0.$$

Следовательно, $f(x,y) = 0$ и $g(x,y) = 0$ для любых $x, y \in \mathbf{R}$. Таким образом, проверка выполнимости аксиомы 1) завершена.

Проверка аксиомы 2) требует некоторой подготовки. Рассмотрим функцию

$$t \to x(t) := \int_0^t \frac{2d\tau}{1+\tau^2}, \ t \in [-1;1].$$

По свойствам интеграла с переменным верхним пределом она дифференцируема на отрезке $[-1;1]$ и $x'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ для любого $t \in [-1;1]$. Значит, функция $x(t)$ возрастает на отрезке $[-1;1]$.

Лемма 1.3 *Значения функции $x(t)$ на концах отрезка $[-1;1]$ равны $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ соответственно.*

Доказательство. Вычислим значение функции $x(t)$ в точке 1. Пусть $t \in (0;1)$. Тогда

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(it)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}.$$

По теореме о почленном интегрировании степенных рядов имеем

$$\frac{x(t)}{2} = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t \tau^{2k} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Значит,

$$\frac{x(1)}{2} = \lim_{t\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$$

и для любого натурального n имеем

$$\frac{x(1)}{2} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \lim_{t\to 1-0} \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

По свойствам знакочередующихся рядов для любого $t \in (0;1)$ выполняются неравенства

$$0 < \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \le \frac{t^{4n+1}}{4n+1} < \frac{1}{4n+1},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to 1-0} \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{x(1)}{2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} =: \frac{\pi}{4},$$

то есть $x(1) = \frac{\pi}{2}$.

Осуществив замену переменной $t \to -t$ в интеграле

$$\int_0^t \frac{2d\tau}{1+\tau^2},$$

убеждаемся, что функция $x(t)$ является нечетной, то есть $x(-t) = -x(t)$ для любого $t \in [-1;1]$. Значит, $x(-1) = -\frac{\pi}{2}$. ■

Покажем, что функции s и c удовлетворяют аксиоме 2). По свойствам непрерывных функций область значений функции $t \to x(t)$ совпадает с отрезком $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Пусть

$$[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}] \to [-1;1] \Big| \, x \to t(x)$$

— обратная функция к функции $t \to x(t)$. Она дифференцируема и по теореме о производной обратной функции

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)}\Big|_{t=t(x)} = \frac{1+t^2(x)}{2}$$

для любого $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Рассмотрим функции $\tilde{s}$ и $\tilde{c}$, определяемые с помощью соотношений[4]

$$\tilde{s}(x) := \frac{2t(x)}{1+t^2(x)},\ \tilde{c}(x) := \frac{1-t^2(x)}{1+t^2(x)}.$$

Эти функции определены на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, дифференцируемы и

$$\tilde{s}'(x) = 2\frac{1-t^2(x)}{(1+t^2(x))^2}t'(x) = \tilde{c}(x),$$

$$\tilde{c}'(x) = -\frac{4t(x)}{(1+t^2(x))^2}t'(x) = \tilde{s}(x)$$

для любого $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Это означает, что функции $\tilde{s}$ и $\tilde{c}$ являются бесконечно дифференцируемыми на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. При этом

$$\tilde{s}(0) = \frac{2t(0)}{1+t^2(0)} = 0,\ \tilde{c}(0) = \frac{1-t^2(0)}{1+t^2(0)} = 1,$$

то есть

$$\tilde{s}^{(2n+1)}(0) = \tilde{c}^{(2n)}(0) = (-1)^n,\ \tilde{s}^{(2n)}(0) = \tilde{c}^{(2n+1)}(0) = 0$$

для любого целого $n \geq 0$. Сравнивая коэффициенты рядов Тейлора для функций $\tilde{s}$ и s и функций $\tilde{c}$ и c, заключаем, что $\tilde{s}(x) = s(x)$ и $\tilde{c}(x) = c(x)$ для любого $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. В силу непрерывности рассматриваемых функций эти равенства продолжаются на весь отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Отсюда вытекает, что

$$s(\tfrac{\pi}{2}) = \tilde{s}(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{2t(\frac{\pi}{2})}{1+t^2(\frac{\pi}{2})} = 1,\ c(\tfrac{\pi}{2}) = \tilde{c}(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1-t^2(\frac{\pi}{2})}{1+t^2(\frac{\pi}{2})} = 0.$$

---

[4]Здесь используются хорошо известные тригонометрические формулы

$$\sin x(t) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x(t)}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x(t)}{2}},\ \cos x(t) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x(t)}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x(t)}{2}}$$

и интегральное представление арктангенса

$$\frac{x(t)}{2} = \operatorname{arctg} t = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2}.$$

Осталось заметить, что в силу строгой монотонности функции $x \to t(x)$ все ее значения на интервале $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ лежат в интервале $(-1; 1)$. Следовательно,

$$c(x) = \tilde{c}(x) = \frac{1 - t^2(x)}{1 + t^2(x)} > 0$$

для любого $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Таким образом, проверка выполнимости аксиомы 2) завершена.

Значения функций синуса и косинуса в точке $x \in \mathbf{R}$ принято обозначать $\sin x$ и $\cos x$ соответственно. При этом

$$\frac{d}{dx} \sin x \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

и

$$\frac{d}{dx} (1 - \cos x) \Big|_{x=0} = \sin 0 = 0.$$

Используя определение производной, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

1.7 Экспонента с мнимым показателем. Формула Эйлера

Примером комплексной функции действительной переменной является экспоненциальная функция с мнимым показателем. Дадим аксиоматическое определение этой функции.

Определение 1.6 *Экспоненциальной функцией с мнимым показателем называется непрерывная*[5] *комплексная функция f, определённая на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая условиям:*

1) $f(t_1 + t_2) = f(t_1) f(t_2)$ *для любых* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$*;*

2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ *и* $\operatorname{Re} f(t) > 0$ *на интервале* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Предположим, что непрерывная комплексная функция f, определена на множестве всех действительных чисел и удовлетворяет указанным условиям. Тогда действительная и мнимая части $c := \operatorname{Re} f$ и $s := \operatorname{Im} f$ функции

[5] То есть действительная и мнимая части функции f непрерывны.

f удовлетворяют условиям:

$$c(t_1+t_2)=c(t_1)c(t_2)-s(t_1)s(t_2),\ s(t_1+t_2)=s(t_1)c(t_2)+c(t_1)s(t_2),$$
$$c\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0,\ s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1$$

и $c(t)>0$ на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Из определения тригонометрических функций действительной переменной вытекает, что $c(t)=\cos t$, $s(t)=\sin t$ для любых вещественных t. Значит, функция f совпадает с функцией $t\to\cos t+i\sin t$.

Значение экспоненциальной функции с мнимым показателем в точке $t\in\mathbf{R}$ обозначается e^{it} или $\exp it$. Следовательно,

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

для любого $t\in\mathbf{R}$. Это знаменитая *формула Эйлера*. Из этой формулы вытекает, что функция $t\to e^{it}$ является периодической функцией с основным периодом 2π. Непосредственно из определения функции $t\to e^{it}$ вытекает, что для нее имеет место обычная для показательной функции теорема сложения

$$e^{i(t_1+t_2)}=e^{it_1}e^{it_2},\ t_1,t_2\in\mathbf{R}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{Re}e^{it}=\cos t,\ \operatorname{Im}e^{it}=\sin t,\ \overline{e^{it}}=e^{-it},$$
$$|e^{it}|=1,\ \operatorname{Arg}e^{it}=t+2\pi\mathbf{Z}.$$

Область значений функции $t\to e^{it}$ совпадает с окружностью $\{z:|z|=1\}$. Сужение функции $t\to e^{it}$ на полуинтервал $(-\pi,\pi]$ осуществляет биекцию полуинтервала $(-\pi,\pi]$ на окружность $\{z:|z|=1\}$.

С экспоненциальной функцией мнимой переменной связана отдельная форма записи комплексного числа. Пусть $z\in\mathbf{C}$ и $z\neq0$. Используя тригонометрическую форму записи комплексного числа, получаем

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \text{где}\ r=|z|,\ \varphi\in\operatorname{Arg}z.$$

Согласно принятым обозначениям, то же самое можно переписать в виде

$$z=re^{i\varphi},\ \text{где}\ r=|z|,\ \varphi\in\operatorname{Arg}z.$$

Эту форму записи принято называть показательной формой записи комплексного числа. Свойство единственности этой формы записи повторяет свойство единственности тригонометрической формы записи комплексного числа:

$$r_1e^{i\varphi_1}=r_2e^{i\varphi_2}\Leftrightarrow r_1=r_2,\ \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2\pi}\in\mathbf{Z}.$$

Глава 2

Однозначные элементарные функции комплексной переменной

2.1 Линейная функция комплексной переменной

Определение 2.1 *В точном смысле линейной функцией с коэффицентом $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ называется функция f, удовлетворяющая условиям:*
1) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;
2) $f(1) = a$ и $f(i) = ia$.

Покажем что эти условия определяют единственную комплексную функцию f. Пусть $\alpha = \operatorname{Re} a$, $\beta = \operatorname{Im} a$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Тогда для любых действительных t_1 и t_2 имеем

$$u(t_1 + t_2) = u(t_1) + u(t_2),\ v(t_1 + t_2) = v(t_1) + v(t_2).$$

$$u(it_1 + it_2) = u(it_1) + u(it_2),\ v(it_1 + it_2) = v(it_1) + v(it_2).$$

При этом $u(1) = \alpha$, $v(1) = \beta$, $u(i) = -\beta$, $v(i) = \alpha$. По теореме единственности для линейной функции (как действительной функции действительной переменной) $u(t) = \alpha t$, $v(t) = \beta t$, $u(it) = -\beta t$, $v(it) = \alpha t$ для любых $t \in \mathbf{R}$. Следовательно,

$$u(z) = u(x) + u(iy) = \alpha x - \beta y,$$

$$v(z) = v(x) + v(iy) = \beta x + \alpha y$$

и

$$f(z) = u(z) + iv(z) = (\alpha x - \beta y) + i\,(\beta x + \alpha y) = az.$$

Таким образом, линейная функция с коэффицентом $a \neq 0$ совпадает с функцией

$$z \to az.$$

В традиционном смысле линейной функцией называется функция вида

$$z \to az + b,\ \ a, b \in \mathbf{C},\ \ a \neq 0.$$

Эта функция определена на всей комплексной плоскости и имеет в произвольной точке $z_0 \in \mathbf{C}$ производную

$$\lim_{z \to z_0} \frac{a\Delta z}{\Delta z} = a.$$

Это значит, что линейная функция является целой. С другой стороны линейная функция является взаимно однозначной. Обратная функция

$$w \to \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$$

тоже является линейной функцией. Таким образом, всякая линейная функция осуществляет взаимно однозначное конформное отображение комплексной плоскости на себя.

При $a = 1$, $b = x_0 + iy_0$ имеем

$$az + b = x + iy + x_0 + iy_0 = x + x_0 + i(y + y_0).$$

Значит, в этом случае линейная функция осуществляет параллельный перенос на вектор (x_0, y_0):

$$\begin{cases} u = x + x_0 \\ v = y + y_0 \end{cases}$$

При $a = e^{i\varphi}$, $b = 0$ имеем

$$az + b = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(x + iy) = x\cos\varphi - y\sin\varphi + i(x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$

Значит, линейная функция осуществляет поворот вокруг начала на угол φ:

$$\begin{cases} u = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ v = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

При $a > 0$, $b = 0$ имеем $az + b = a(x + iy) = ax + iay$. Значит, линейная функция осуществляет гомотетию с центром в начале и коэффициентом гомотетии a:

$$\begin{cases} u = ax \\ v = ay \end{cases}$$

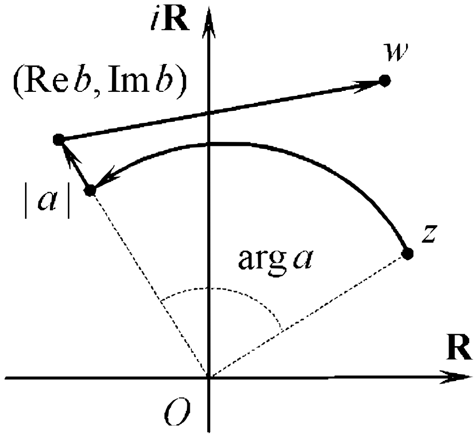

Рис. 1

В общем случае

$$az + b = |a|e^{i \arg a} z + b.$$

Таким образом, линейная функция осуществляет последовательно поворот плоскости на угол $\arg a$, гомотетию с центром в начале и коэффициентом гомотетии $|a|$ и последующий параллельный перенос на вектор $(\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b)$ в соответствии с рисунком 1.

2.2 Целая степенная функция

Для любого натурального $n \geq 2$ функция $z \to z^n$ называется *целой степенной функцией с показателем n*. Эта функция определена на всей комплексной плоскости и имеет в произвольной точке z_0 производную[1]

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k \left(z_0 + \Delta z\right)^{n-k-1} = n z_0^{n-1}.$$

[1] Здесь использована формула сокращенного умножения

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Это значит, что целая степенная функция является целой. Производная функция $z \to nz^{n-1}$ определена на всей комплексной плоскости и отлична от нуля в области $\dot{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Таким образом, функция $z \to z^n$ осуществляет конформное отображение области $\dot{\mathbf{C}}$ на себя.

В начале комплексной плоскости конформность отображения $z \to z^n$ нарушается. Убедимся в этом. Рассмотрим произвольную кривую l, задаваемую уравнением $z = \lambda(t)$, $t \in [a, b\rangle$, исходящую из начала, то есть $\lambda(a) = 0$. Считаем, что существует отличная от нуля производная $\lambda'(a)$ функции λ в точке a. Образом кривой l при отображении $z \to z^n$ является кривая L, задаваемая уравнением $w = \lambda^n(t)$, $t \in [a, b\rangle$. Понятно, что эта кривая тоже исходит из начала комплексной плоскости. При этом производная $n\lambda^{n-1}\lambda'$ функции λ^n в точке a равна нулю. Кривая l имеет касательную в точке $z = 0$, которая образует угол $\alpha := \arg \lambda'(a)$ с действительной осью. Для того чтобы найти угол, который образует касательная к кривой L в точке $w = 0$ с действительной осью, проведем в уравнении $w = \lambda^n(t)$, $t \in [a, b\rangle$ замену параметра:

$$t \to \varphi(t) := \sqrt[n]{t} + a.$$

Уравнение тождественной кривой имеет вид $w = \lambda^n(\varphi(t))$, $t \in [0, (b-a)^n\rangle$. Вычислим производную функции $w = \lambda^n(\varphi(t))$ в нуле:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\lambda^n(\varphi(t))}{t} = \left(\frac{\lambda(\varphi(t)) - \lambda(\varphi(0))}{\varphi(t) - \varphi(0)}\right)^n \frac{(\varphi(t) - \varphi(0))^n}{t} =$$

$$= \left(\frac{\lambda(\varphi(t)) - \lambda(\varphi(0))}{\varphi(t) - \varphi(0)}\right)^n \to (\lambda'(a))^n \neq 0,\ \Delta t \to 0.$$

Таким образом, касательная к кривой L в точке $w = 0$ образует угол $n\alpha = n \arg \lambda'(t_0)$. Отсюда следует, что отображение, осуществляемое функцией $z \to z^n$, увеличивает углы между кривыми, пересекающимися в нуле, ровно в n раз.

Целая степенная функция не является взаимно однозначной. Точка $z := re^{i\varphi}$, лежащая на окружности c радиуса r с центром в начале отображается этой функцией в точку $w := r^n e^{in\varphi}$, лежащую на окружности C радиуса $R := r^n$ с центром в начале. Изменение φ связано с движением точки z по окружности c. Если φ изменяется от φ_0 до $\varphi_0 + 2\pi$, то точка z совершает один полный оборот вокруг начала против часовой стрелки. При этом ее образ w совершит n полных оборотов по окружности C в том же направлении. В каждой точке окружности L она побывает ровно n раз.

Это означает, что прообраз каждой точки w, лежащей на окружности C, содержит ровно n различных точек, лежащих на окружности l. Прообраз произвольной точки $w \neq 0$ исчерпывается точками

$$z_k := |w|^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{1}{n}(\arg w + 2\pi k)},\ \ k = 0, ..., n-1.$$

Прообраз точки $w = 0$ состоит из одной $z = 0$.

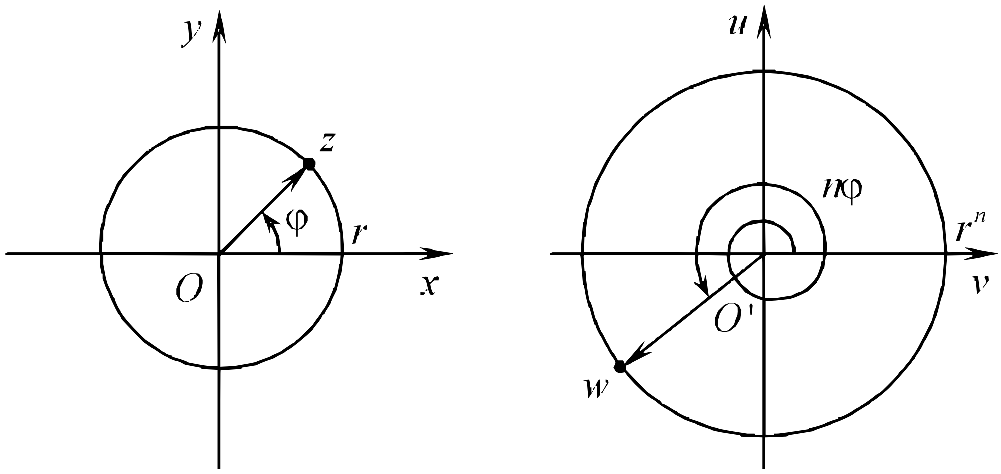

Рис. 2

Зафиксируем $\varphi \in \mathbf{R}$. Функция $z \to z^n$ отображает взаимно однозначно открытый луч l_φ, задаваемый уравнением $z = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$, на открытый луч L_φ, задаваемый уравнением $w = t^n e^{in\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$. В последнем уравнении можно произвести замену параметра $t \to \sqrt[n]{t}$ и записать его в традиционном виде $w = te^{in\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$. Возникшую ситуацию иллюстрирует рисунок 2.

Изменение φ связано с поворотом луча l_φ и его образа L_φ вокруг начала. Если φ увеличится на величину $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{n}]$, то луч l_φ повернется против часовой стрелки на угол $\alpha \leq \frac{2\pi}{n}$, а луч L_φ повернется на угол $n\alpha \leq 2\pi$. Лучи из семейств

$$\{l_{\varphi'} : \varphi' \in (\varphi, \varphi + \alpha)\},\ \{L_{\varphi'} : \varphi' \in (\varphi, \varphi + \alpha)\}$$

попарно не пересекаются. Отсюда следует, что функция $z \to z^n$ осуществляет взаимно однозначное отображение открытой угловой области

$$G := \{(r, \varphi') : \varphi < \varphi' < \varphi + \alpha\}$$

на открытую угловую область

$$D := \{(r, \varphi') : n\varphi < \varphi' < n\varphi + n\alpha\}$$

в соответствии с рисунком 3. Это отображение является конформным, так как в точках области G производная функции $z \to z^n$ отлична от нуля.

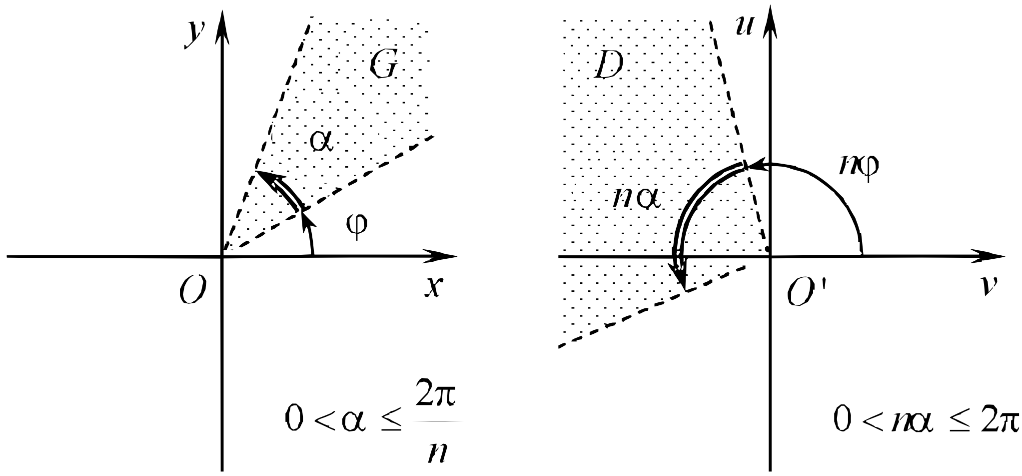

Рис. 3

В случае $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ область D совпадает со всей комплексной плоскостью, из которой удалены луч l_φ и начало. Такая область называется плоскостью с разрезом вдоль луча l_φ.

2.3 Целая рациональная функция

Пусть P — многочлен над полем комплексных чисел с коэффициентами $a_0, \dots, a_n$ и его старший коэффициент a_n отличен от нуля. Комплексная функция $f : z \to P(z)$ называется *целой рациональной функцией порядка* n. Например, линейная функция является целой рациональной функцией порядка 1. Корни многочлена P называются нулями функции f, кратности корней многочлена P называются порядками (или кратностями) соответствующих нулей функции f. Нули порядка 1 называются простыми нулями функции f, а нули порядка > 1 называются кратными нулями функции f. Если z_0 — нуль функции f порядка $k \le n$, то по свойствам многочленов для любого z

$$f(z) = (z - z_0)^k f_0(z),$$

где f_0 — целая рациональная функция порядка $n - k$ и $f_0(z_0) \ne 0$.

По известной теореме из алгебры многочлен P имеет ровно n корней с учетом их кратностей. Это означает, что функция f имеет ровно n нулей с учетом их порядков. Этот вывод имеет простое развитие. Пусть $a \in \mathbf{C}$.

Корень многочлена $P - a$ кратности k называется a-точкой функции f порядка k, совокупность $f^{-1}(a)$ всех a-точек функции f называют a-слоем или a-множеством функции f. В частности, совокупность $f^{-1}(0)$ всех нулей функции f называется нулевым множеством этой функции. Согласно той же теореме, многочлен $P-a$ имеет ровно n корней с учетом их кратностей. Это означает, что любой a-слой функции f состоит ровно из n a-точек с учетом их порядков.

Производная функция f' функции f совпадает с функцией $z \to a_1 + 2a_2z + \ldots + na_nz^{n-1}$ и является целой рациональной функцией порядка $n-1$. Нулевое множество $(f')^{-1}(0)$ производной функции состоит не более чем из $n-1$ отдельных точек. Функция f осуществляет конформное отображение области $\mathbf{C} \setminus (f')^{-1}(0)$ на область $\mathbf{C} \setminus f((f')^{-1}(0))$.

В нулях производной функции конформность отображения f нарушается. Действительно, пусть z_0 — нуль производной функции порядка $k \geq 1$. Тогда

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)f_0(z)$$

и

$$f'(z) = f_0(z) + (z - z_0)f_0'(z)$$

для любого $z \in \mathbf{C}$. Здесь f_0 — целая рациональная функция порядка $n-1$. Из равенства $f'(z_0) = 0$ следует, что $f_0(z_0) = 0$. Это означает, что z_0 — кратный нуль функции $f - f(z_0)$. Из соотношения

$$f_0(z) = f'(z) - (z - z_0)f_0'(z)$$

вытекает, что его порядок равен $k+1$, то есть в некоторой окрестности точки z_0

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^{k+1}f_1(z) = f(z_0) + \left((z - z_0)\sqrt[k+1]{f_1(z)}\right)^{k+1},$$

где $z \to \sqrt[k+1]{z}$ — обратная к функции $z \to z^{k+1}$ в окрестности точки $f_1(z_0) \neq 0$. Функция

$$z \to (z - z_0)\sqrt[k+1]{f_1(z)}$$

дифференцируема в точке z_0, ее производная в этой точке равна

$$\sqrt[k+1]{f_1(z_0)}$$

и отлична от нуля, так как

$$\left|\sqrt[k+1]{f_1(z_0)}\right|^{k+1} = |f_1(z_0)| \neq 0.$$

Эта функция отображает кривые, исходящие из точки z_0, в кривые, исходящие из нуля, и не изменяет угла между ними. Целая степенная функция $z \to z^{k+1}$ увеличивает углы между кривыми, пересекающимися в нуле в $k+1$ раз. Отсюда следует, что функция f увеличивает углы между кривыми в точке z_0 тоже в $k+1$ раз.

В окрестности бесконечности поведение функции f определяется поведением функции $z \to a_n z^n$. Действительно,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{a_n z^n} = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{a_0}{a_n z^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + 1 \right) = 1.$$

Значит, $\lim_{z\to\infty} f(z) = a_n \lim_{z\to\infty} z^n = \infty$. Если доопределить функцию f в бесконечности, положив $f(\infty) = \infty$, то мы получим непрерывную на $\bar{\mathbf{C}}$ функцию, которую обозначаем тем же символом f. При этом $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$. Конформность отображения f нарушается и в бесконечно удаленной точке. Действительно, для любого $z \neq 0$ имеем

$$\frac{1}{f(\frac{1}{z})} = z^n g(z) = \left(z \sqrt[n]{g(z)} \right)^n,$$

где g — функция

$$z \to \frac{1}{a_0 z^n + \ldots + a_{n-1} z + a_n},$$

$z \to \sqrt[n]{z}$ — обратная к функции $z \to z^n$ в окрестности точки $\frac{1}{a_n} \neq 0$. Функция

$$z \to z \sqrt[n]{g(z)}$$

дифференцируема в нуле, и ее производная в нуле равна

$$\sqrt[n]{g(0)} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \neq 0.$$

Эта функция отображает кривые, пересекающиеся в нуле, в кривые пересекающиеся в нуле, и не изменяет угла между ними. Значит, функция

$$z \to \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$$

увеличивает углы в нуле ровно в n раз, а это означает, что функция f увеличивает углы в бесконечно удаленной точке тоже в n раз.

2.4 Рациональная функция

Рациональной функцией порядка $\max\{n, m\}$ называется функция f вида

$$z \to \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P, Q — взаимно простые многочлены над полем комплексных чисел с коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$, и $b_0, \ldots, b_m$, $b_m \neq 0$ соответственно. Например, функция

$$z \to \frac{z^2+1}{z-i}$$

не является рациональной функцией. Она совпадает с сужением целой рациональной функции $z \to z + i$ порядка 1 на множество $\mathbf{C} \setminus \{i\}$.

Корни многочлена P называются *нулями* функции f, а кратности корней многочлена P — порядками (или кратностями) соответствующих нулей функции f. Корни многочлена Q называются *полюсами* функции f, а кратности корней многочлена Q — порядками соответствующих полюсов функции f. Из определения рациональной функции вытекает, что множество ее нулей и множество ее полюсов не пересекаются. Нули и полюса порядка 1 называются простыми нулями и полюсами функции f, а нули и полюса порядка > 1 — кратными нулями и полюсами функции f. Если z_0 — нуль функции f порядка $k \leq n$, то по свойствам полиномов для любого z из области определения функции f

$$f(z) = (z - z_0)^k f_0(z),$$

где f_0 — рациональная функция порядка $\max\{n-k, m\}$, для которой точка z_0 не является ни нулем, ни полюсом. Если z_0 — полюс функции f порядка $k \leq n$, то для любого z из области определения функции f

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} f_0(z),$$

где f_0 — рациональная функция порядка $\max\{n, m-k\}$, для которой точка z_0 не является ни нулем, ни полюсом.

Любую рациональную функцию можно рассматривать как функцию из $\bar{\mathbf{C}}$ в $\bar{\mathbf{C}}$. При этом на множество полюсов функция f продолжается по непрерывности, то есть значение функции f в каждом полюсе приравнивается к ∞. Так же поступают и в случае бесконечно удаленной точки. Если $n > m$, то полагают $f(\infty) := 0$. Число $n - m$ при этом называется порядком нуля функции f в бесконечности. Если $n = m$, то полагают

$$f(\infty) := \frac{a_n}{b_n} \notin \{0; \infty\}.$$

Если $n < m$, то полагают $f(\infty) = \infty$. Число $m - n$ при этом называется порядком полюса функции f в бесконечности. Замечаем, что число нулей функции f в расширенной комплексной плоскости с учетом их порядков совпадает с числом полюсов функции f с учетом их порядков и совпадает с порядком функции f. Например, всякая целая рациональная функция порядка n имеет полюс порядка n в бесконечно удаленной точке по определению. Это замечание распространяется на произвольные A-точки функции f, $A \notin \{0; \infty\}$. Так называются нули рациональной функции

$$f_A : z \to \frac{P(z) - AQ(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} - A$$

(0-точки — нули функции f, ∞-точки — полюса функции f). Порядком A-точки функции f называется ее порядок как нуля функции f_A. Утверждаем, что число A-точек функции f в расширенной комплексной плоскости с учетом их порядков совпадает с порядком функции f. Действительно, если $n \neq m$, то степень многочлена $P - AQ$ равна $\max\{n, m\}$, если $n = m$, то степень этого многочлена $\leq m$. В любом случае порядок функции f_A совпадает с порядком функции f и совпадает с числом нулей функции f_A в расширенной комплексной плоскости с учетом их кратностей.

Производная функция f' функции f определена вне корней многочлена Q и совпадает там с функцией

$$z \to \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}$$

(которая, вообще говоря, не является рациональной функцией, так как в кратных нулях функции $z \to Q(z)$ она не определена), где P' и Q' — многочлены

$$a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$$

и

$$b_1 + 2b_2 z + \ldots + m b_m z^{m-1}$$

соответственно. Вне корней многочлена $(P'Q - PQ')\,Q$ производная функция f' определена и отлична от нуля, значит, функция f является там конформной, например, f конформна в простых нулях. Отображение f остается конформным и в простых полюсах. Действительно, функция $\frac{1}{f}$ является рациональной функцией

$$z \to \frac{Q(z)}{P(z)},$$

и простой полюс z_0 рациональной функции f не является корнем многочлена $(Q'P - QP')\,P$. Если $m = n - 1$, то есть функция f имеет простой полюс в бесконечности, то функция

$$z \to \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$$

в окрестности нуля совпадает с функцией

$$z \to \frac{zQ_1(z)}{P_1(z)},$$

где

$$P_1(z) := a_0 z^n + \ldots + a_{n-1}z + a_n,\ Q_1(z) := b_0 z^m + \ldots + b_{m-1}z + b_m,$$

производная которой в нуле равна $\frac{b_m}{a_n} \neq 0$. Значит, в этом случае функция f конформна в бесконечности. Тот же вывод справедлив, если $m = n + 1$, то есть функция f имеет простой нуль в бесконечности. Действительно, функция $z \to f(\frac{1}{z})$ в окрестности нуля совпадает с функцией

$$z \to \frac{zP_1(z)}{Q_1(z)},$$

производная которой в нуле равна $\frac{a_m}{b_n} \neq 0$. Если $m = n$ и $b_n a_{n-1} \neq a_n b_{n-1}$, то функция $z \to f(\frac{1}{z})$ в окрестности нуля совпадает с функцией

$$z \to \frac{P_1(z)}{Q_1(z)},$$

производная которой в нуле равна

$$\frac{b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1}}{b_n^2} \neq 0.$$

Значит, и в этом случае функция f является конформной в бесконечности.

В остальных точках конформность функции f нарушается. Эти точки описываются как нули целой рациональной функции

$$z \to P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)$$

и бесконечность, если $m < n-1$ или $m > n+1$ или $m = n$, но тогда $b_n a_{n-1} = a_n b_{n-1}$. Действительно, пусть z_0 — корень многочлена $P'Q - PQ'$. Если $Q(z_0) = 0$, то $P(z_0) \neq 0$ и, значит, $Q'(z_0) = 0$. Следовательно, точка z_0 является кратным полюсом функции f и в некоторой окрестности точки z_0 имеет место представление

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^k f_2(z),$$

где $k > 1$ — порядок z_0 как полюса функции f, f_2 — некоторая рациональная функция и $f_2(z_0) \neq 0$. Это означает, что функция f увеличивает углы в точке z_0 в k раз. Если $Q(z_0) \neq 0$, то точка z_0 является кратным нулем рациональной функции

$$f - f(z_0) = \frac{P}{Q} - \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} = \frac{(z - z_0)\left(\frac{P-P(z_0)}{z-z_0}Q(z_0) - \frac{Q-Q(z_0)}{z-z_0}P(z_0)\right)}{QQ(z_0)},$$

значит, в окрестности точки z_0 имеет место представление

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^k f_1(z),$$

где $k > 1$ — порядок z_0 как нуля функции $f - f(z_0)$, f_1 — некоторая рациональная функция и $f_1(z_0) \neq 0$. Из этого представления вытекает, что функция f увеличивает углы в точке z_0 в k раз. Если $m < n-1$, то есть функция f имеет кратный полюс в бесконечности, то функция

$$z \to \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$$

в окресности нуля совпадает с функцией

$$z \to \frac{z^{n-m}Q_1(z)}{P_1(z)}.$$

Если $m > n+1$, то есть функция f имеет кратный нуль в бесконечности, то функция $z \to f(\frac{1}{z})$ в окресности нуля совпадает с функцией

$$z \to \frac{z^{m-n}P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

В первом случае функция f увеличивает углы в бесконечности в $n-m$ раз, а во втором случае в $m-n$ раз. Если $m=n$ и $b_n a_{n-1} = a_n b_{n-1}$, то функция $z \to f(\frac{1}{z})$ в окрестности нуля совпадает с функцией

$$z \to \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

Значит, в этом случае функция f увеличивает углы в бесконечности в k раз, где $k>1$ — кратность начала комплексной плоскости как нуля функции

$$z \to \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} - \frac{a_n}{b_n}.$$

2.5 Дробно-линейная функция

Рациональная функция первого порядка

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},\ \Delta := ad-bc \neq 0,\ c \neq 0$$

по традиции называется *дробно-линейной функцией*. Как функция из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$, эта функция определена на всей комплексной плоскости, кроме полюса первого порядка $z_0 := -\frac{d}{c}$. Обратная функция

$$w \to \frac{dw-b}{-cw+a}$$

тоже является дробно-линейной. Она определена в области $\mathbf{C} \setminus \{w_0\}$, где $w_0 := \frac{a}{c}$ — ее полюс. Дробно-линейная функция имеет отличную от нуля производную

$$\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2}$$

в каждой точке области определения. Значит, эта функция является аналитической в области $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$ и осуществляет ее конформное отображение на область $\mathbf{C} \setminus \{w_0\}$.

Дробно-линейную функцию часто рассматривают как отображение из $\bar{\mathbf{C}}$ в $\bar{\mathbf{C}}$. При этом ее значение в точке z_0 считают равным ∞. Обратная функция тоже определена всюду на $\bar{\mathbf{C}}$. Она равна ∞ в точке w_0. Таким образом, дробно-линейная функция осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение $\bar{\mathbf{C}}$ на $\bar{\mathbf{C}}$. Действительно, непрерывность этого отображения в точке z_0 вытекает из соотношения $a(-\frac{d}{c}) + b = -\frac{1}{c}\Delta \neq 0$, в силу которого

$$\lim_{z \to z_0} \frac{az+b}{cz+d} = \infty.$$

Производная $-\frac{\Delta}{(dz+c)^2}$ композиции $\frac{b\frac{1}{z}+a}{d\frac{1}{z}+c}$ в точке $z = 0$ отлична от нуля. Следовательно, отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, является конформным в точке $z = \infty$. Производная $-\frac{\Delta}{(az+b)^2}$ функции $\frac{cz+d}{az+b}$ в точке z_0 принимает значение $c \neq 0$. Следовательно, отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией, является конформным в точке z_0. Таким образом, дробно-линейная функция осуществляет взаимно однозначное непрерывное и конформное отображение $\bar{\mathbf{C}}$ на $\bar{\mathbf{C}}$.

При $a = c = 1$, $b = d = 0$ дробно-линейная функция $z \to \frac{1}{z}$ является композицией $f_2 \circ f_1$ двух функций: $f_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ и $f_2(z) = \bar{z}$. Пусть $z := r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Учитывая, что

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

получаем: $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{r}$, $\arg\frac{1}{\bar{z}} = \arg z$. Значит, функция f_1 осуществляет инверсию плоскости относительно единичной окружности с центром в начале. В то же время из соотношений

$$\bar{z} = \overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

вытекает, что отображение f_2 осуществляет симметрию относительно действительной оси. Геометрическая интерпретация отображения $z \to \frac{1}{z}$ показана на рисунке 4.

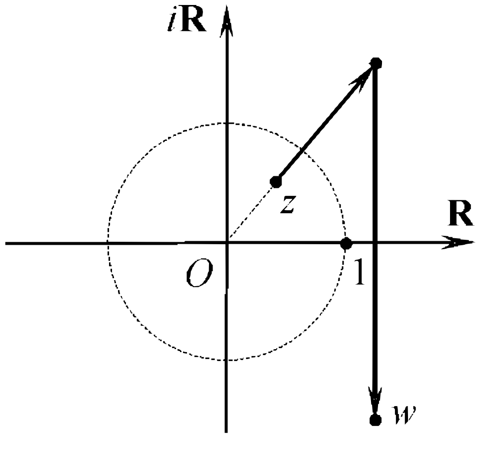

Рисунок 4

В общем случае
$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d},$$
следовательно, дробно-линейная функция представляется в виде композиции $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ двух линейных функций: $f_1 : z \to cz+d$, $f_3 : z \to -\frac{\Delta}{c}z + \frac{a}{c}$ и функции $f_2 : z \to \frac{1}{z}$.

Рассмотрим ключевые свойства семейства дробно-линейных функций.

Круговое свойство

Любой элемент семейства прямых и окружностей на комплексной плоскости задается уравнением вида
$$\bar{a}z + a\bar{z} + b + cz\bar{z} = 0,$$
где $a \in \mathbf{C}$, $b, c \in \mathbf{R}$ и $|a|^2 > bc$. Убедимся в этом. При $c = 0$ данное уравнение принимает следующий вид
$$2\alpha x + 2\beta y + b = 0,$$
где $\alpha := \operatorname{Re} a$, $\beta := \operatorname{Im} a$, и, значит, в этом случае оно определяет некоторую прямую в комплексной плоскости. При $c \neq 0$ уравнение приводится к виду
$$z\bar{z} + \frac{\bar{a}}{c}z + \frac{a}{c}\bar{z} + \frac{b}{c} = 0.$$
В этом случае оно определяет окружность с центром в точке $z_0 := -\frac{a}{c} \in \mathbf{C}$ радиуса
$$R := \sqrt{\frac{|a|^2}{c^2} - \frac{b}{c}} = \frac{1}{|c|}\sqrt{|a|^2 - bc} > 0.$$
Действительно, уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиуса R имеет вид $|z - z_0| = R$ или $|z - z_0|^2 - R^2 = 0$. При этом
$$|z - z_0|^2 - R^2 = \left|z + \frac{a}{c}\right|^2 - \frac{|a|^2}{c^2} + \frac{b}{c} =$$
$$= \left(z + \frac{a}{c}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{a}}{c}\right) - \frac{|a|^2}{c^2} + \frac{b}{c} = z\bar{z} + \frac{\bar{a}}{c}z + \frac{a}{c}\bar{z} + \frac{b}{c}.$$
Если $c \to 0$, то центр этой окружности и ее радиус стремятся к бесконечности. Это и есть аналитическое обоснование известного утверждения, что прямая — это окружность бесконечного радиуса с центром в бесконечности.

Выберем произвольный элемент семейства прямых и окружностей на плоскости. Его образ при отображении $z \to \frac{1}{z}$ описывается уравнением

$$\bar{a}\frac{1}{z} + a\frac{1}{\bar{z}} + b + c\frac{1}{z\bar{z}} = 0$$

или уравнением

$$az + \bar{a}\bar{z} + c + bz\bar{z} = 0.$$

Но, как уже показано, это уравнение определяет либо прямую, либо окружность. Если $b = 0$, то это уравнение определяет прямую. Если $b \neq 0$, то это уравнение определяет окружность с центром в точке $z_0' := -\frac{\bar{a}}{b}$ и радиусом

$$R' := \sqrt{\frac{|a|^2}{|b|^2} - \frac{c}{b}} = \frac{1}{|b|}\sqrt{|a|^2 - bc} > 0.$$

Таким образом доказано, что *при отображении посредством функции* $z \to \frac{1}{z}$ *семейство прямых и окружностей переходит в семейство прямых и окружностей.* Этим свойством обладает любая дробно-линейная функция, поскольку очевидно, что семейство прямых и окружностей инвариантно относительно поворотов вокруг начала, параллельных переносов и гомотетий с центром в начале. Если прямая или окружность l проходит через полюс дробно-линейной функции, то ее образ l' при этом отображении проходит через бесконечность и, значит, является прямой. Если кривая l не проходит через полюс, то ее образ l' не проходит через бесконечность и, значит, является окружностью.

Групповое свойство

Совокупность всех линейных и дробно-линейных функций состоит из функций вида

$$f : z \to \frac{az + b}{cz + d},$$

где $\Delta = ad - bc \neq 0$. Условие $c \neq 0$ опускается. Далее покажем, что эта совокупность образует группу с композицией в качестве групповой операции.

Действительно, в качестве нейтрального элемента групповой операции выступает линейная функция $z \to z$. Обратный элемент f^{-1} определяется как обратная функция

$$w \to \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Непосредственно из определения сложной функции вытекает, что композиция ассоциативна. Осталось убедиться, что совокупность всех линейных и дробно-линейных функций замкнута относительно композиции. Пусть

$$f_1 : z \to \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},\ f_2 : z \to \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

и $\Delta_1 := a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$, $\Delta_2 := a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$. Непосредственная проверка показывает,что

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a_1 w_2(z) + b_1}{c_1 w_2(z) + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2)z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)}.$$

Причем

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 + c_1 b_2 & b_1 a_2 + d_1 b_2 \\ a_1 c_2 + c_1 d_2 & b_1 c_2 + d_1 d_2 \end{vmatrix} = \Delta_1 \Delta_2 \neq 0.$$

Это означает, что композиция $f_1 \circ f_2$ дробно-линейных функций в свою очередь является дробно-линейной функцией.

Инвариантность двойного отношения

Для любых попарно различных чисел z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbf{C}$ двойное отношение

$$\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

не меняется, если заменить их образами w_1, w_2, w_3, w_4 при отображении

$$z \to \frac{az + b}{cz + d},$$

где $ad - bc \neq 0$. Действительно,

$$w_4 - w_1 = \frac{az_4 + b}{cz_4 + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(ad - bc)(z_4 - z_1)}{(cz_4 + d)(cz_1 + d)}.$$

Значит,

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d},\ \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}.$$

Следовательно,

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Предел
$$\lim_{z_4\to\infty}\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$
равен 1. Значит, если $z_4=\infty$, то отношение
$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$
следует заменить единицей. Обратное к дробно-линейному отображению, в свою очередь, является дробно-линейным. Следовательно, отношение
$$\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}$$
нужно тоже заменить единицей, если $w_4=\infty$.

Всякое дробно-линейное отображение однозначно определяется указанием любых трех попарно различных точек z_1, z_2, z_3 и их попарно различных образов w_1, w_2, w_3 соответственно. Действительно, из соотношения
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$
значение w дробно-линейной функции в произвольной точке $z\notin\{z_1,z_2,z_3\}$ определяется однозначно
$$w=$$
$$=\left(w_1\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}-w_2\frac{(z-z_1)\,(z_3-z_2)}{(z-z_2)\,(z_3-z_1)}\right):\left(\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}-\frac{(z-z_1)\,(z_3-z_2)}{(z-z_2)\,(z_3-z_1)}\right).$$
Если $z_3=\infty$ и (или) $w_3=\infty$, то в последних соотношениях полагаем
$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=1$$
и (или)
$$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=1.$$
Три попарно различные точки определяют кривую из семейства прямых и окружностей однозначно. Значит, выбор трех попарно различных точек z_1, z_2, z_3 и их попарно различных образов w_1, w_2, w_3 определяют однозначно кривую l из семейства прямых и окружностей и ее образ l' из того же семейства.

Если попарно различные точки z_1, z_2, z_3 являются неподвижными, то есть $z_1 = w_1$, $z_2 = w_2$, $z_3 = w_3$, то

$$w = \left(z_1 - z_2 \frac{z - z_1}{z - z_2}\right) : \left(1 - \frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = z.$$

Отсюда вытекает, что всякая дробно-линейная функция отличная от тождественного отображения, для которого все точки являются неподвижными, может иметь не более двух неподвижных точек.

Сохранение симметрии

Комплексная функция вида

$$z \to z^* := -\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + \bar{a}},\ b, c \in R,\ |a|^2 - bc > 0$$

называется *отображением симметрии* относительно кривой[2] l, задаваемой уравнением $c\bar{z}z + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$. Точка z^* называется *симметричной* точке z относительно кривой l. Легко убедиться, что $z^{**} = z$. Действительно,

$$z^{**} = -\frac{a\overline{z^*} + b}{c\overline{z^*} + \bar{a}} = -\left(-a\frac{\bar{a}z + b}{cz + a} + b\right) : \left(-c\frac{\bar{a}z + b}{cz + a} + \bar{a}\right) =$$

$$= \frac{-|a|^2 z - ab + b(cz + a)}{c\bar{a}z + cb - \bar{a}(cz + a)} = \frac{-|a|^2 z + bcz}{cb - |a|^2} z = z.$$

Поэтому точки z и z^* называются *симметричными* относительно кривой l. Точка $-\frac{a}{c}$ является симметричной бесконечно удаленной точке относительно кривой l и называется *центром симметрии* относительно кривой l. Отображение симметрии относительно действительной оси совпадает с операцией сопряжения $z \to \bar{z}$. В самом деле, действительная прямая задается уравнением $\bar{a}z + a\bar{z} = 0$, где a — произвольное мнимое число, и в этом случае $z^* = -\frac{a\bar{z}}{\bar{a}} = \bar{z}$. Центром симметрии относительно любой прямой является бесконечность.

Отображение симметрии является композицией дробно-линейной функции $z \to \frac{az+b}{-cz-\bar{a}}$ и операции сопряжения $z \to \bar{z}$. Значит, отображение симметрии не является конформным ни в одной точке $\bar{\mathbf{C}}$, так как оно в любой точке $z \in \bar{\mathbf{C}}$ сохраняет углы по абсолютной величине, но меняет их по знаку.

[2]Дальнейшие рассуждения не зависят от ориентации кривой, и речь, вообще говоря, идет не о кривых, а о их носителях — прямых и окружностях.

Упражнение 1 *Докажите, что множество решений уравнения $z = z^*$ совпадает с носителем кривой l.*

Упражнение 2 *Докажите, что отображение симметрии относительно прямой $z = z_0 + e^{i\varphi}t$, $t \in (-\infty, +\infty)$ представляется в виде*

$$z \to z_0 + e^{2i\varphi}(\bar{z} - \overline{z_0}),$$

а относительно окружности с центром в точке z_0 и радиуса R отображение симметрии представляется в виде

$$z \to z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \overline{z_0}}.$$

Всякое дробно-линейное отображение f отображает симметричные относительно кривой l точки в симметричные относительно кривой $l' := f(l)$ точки, то есть $f(z^*) = f(z)^*$. Действительно, пусть кривая l задана уравнением $c\bar{z}z + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ и f — сдвиг $z \to z + b_1$. Тогда кривая l' задана уравнением

$$c\,(z - b_1)\left(\bar{z} - \bar{b}_1\right) + \bar{a}\,(z - b_1) + a\left(\bar{z} - \bar{b}_1\right) + b = 0$$

или уравнением

$$cz\bar{z} + (\bar{a} - c\bar{b}_1)z + (a - cb_1)\bar{z} + cb_1\bar{b}_1 - \bar{a}b_1 - a\bar{b}_1 + b = 0.$$

При этом

$$f(z)^* = -\frac{(a - cb_1)\left(\bar{z} + \bar{b}_1\right) + cb_1\bar{b}_1 - \bar{a}b_1 - a\bar{b}_1 + b}{c\left(\bar{z} + \bar{b}_1\right) + \bar{a} - c\bar{b}_1} =$$

$$= -\frac{a\bar{z} + b - b_1c\bar{z} - b_1\bar{a}}{c\bar{z} + \bar{a}} = -\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + \bar{a}} + b_1 = f(z^*).$$

Если f — линейная функция $z \to a_1 z$, то кривая l' задается уравнением

$$c\bar{z}z + \bar{a}\bar{a}_1 z + aa_1\bar{z} + ba_1\bar{a}_1 = 0.$$

При этом

$$f(z)^* = -\frac{aa_1\,(\bar{a}_1\bar{z}) + ba_1\bar{a}_1}{c\,(\bar{a}_1\bar{z}) + \bar{a}\bar{a}_1} = -a_1\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + \bar{a}} = f(z^*).$$

Если f — это функция $z \to \frac{1}{z}$, то кривая l' задается уравнением

$$bz\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + c = 0.$$

При этом

$$f(z)^* = -\frac{\bar{a}\frac{1}{\bar{z}} + c}{b\frac{1}{\bar{z}} + a} = 1 : \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + \bar{a}} = f(z^*).$$

В общем случае любое дробно-линейное отображение является композицией линейных функций и функции $z \to \frac{1}{z}$. Тем самым высказанное утверждение доказано.

Упражнение 3 *Докажите, что прямая или окружность l', проходящая через симметричные относительно кривой l точки z и z^*, ортогональна кривой l, то есть обязательно пересекается с кривой l и образует с ней в точках пересечения прямой угол.*

2.6 Показательная функция комплексной переменной

Определение 2.2 *Показательной функцией комплексной переменной называется непрерывная комплексная функция f, определенная на всей комплексной плоскости и удовлетворяющая условиям:*

1) $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

2) $f(1) = e$, $f\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i$ *и* $\operatorname{Re} f(iy) > 0$ *для любого* $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Покажем что эти условия определяют функцию f однозначно. Пусть u — сужение функции f на действительную ось, а v — сужение функции $z \to f(iz)$ на действительную ось. Тогда $f(x + iy) = f(x)f(iy) = u(x)v(y)$ для любых вещественных x и y. При этом функция u удовлетворяет условиям $u(x_1 + x_2) = u(x_1)u(x_2)$, $u(1) = e$. Из определения показательной функции действительной переменной вытекает, что функция u является действительной и совпадает с функцией $x \to e^x$. Функция v удовлетворяет условиям $v(y_1+y_2) = v(y_1)v(y_2)$, $v(\frac{\pi}{2}) = i$ и $\operatorname{Re} v(y) > 0$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Из определения экспоненты с мнимым показателем вытекает, что функция v является комплексной и совпадает с функцией $y \to e^{iy} := \cos y + i \sin y$. Следовательно, показательная функция комплексной переменной совпадает с функцией

$$x + iy \to e^x(\cos y + i \sin y).$$

Значение показательной функции в точке $z := z + iy$ принято обозначать e^z или $\exp z$ и называть экспонентой комплексного числа z. Непосредственно из определения показательной функции вытекает, что имеет место обычная для показательной функции действительной переменной теорема сложения:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. При этом

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y,\ \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y,\ \overline{e^z} = e^{\bar{z}},$$

$$|e^z| = e^x,\ \operatorname{Arg} e^z = \{y + 2\pi n : n \in \mathbf{Z}\}.$$

Из формулы $|e^z| = e^x$ вытекает, что показательная функция не имеет нулей. Отметим также, что значение e^∞ показательной функции в бесконечно удаленной точке лишено смысла, так как предел функции $z \to e^z$ в бесконечной точке не существует. Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty} \left|e^{x+iy}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$$

и

$$\lim_{x\to-\infty} \left|e^{x+iy}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Из теоремы сложения вытекает, что для любого комплексного числа z и любого $n \in \mathbf{Z}$ верно равенство

$$e^{z+i2\pi n} = e^z e^{i2\pi n} = e^z(\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n) = e^z.$$

Это равенство показывает, что экспоненциальная функция комплексной переменной является периодической функцией с периодом $2\pi i$. Легко увидеть, что этот период является основным, то есть выполнение равенства $e^{z+a} = e^z$ при некотом $a := \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ и всех комплексных z влечет включение $\frac{a}{2\pi i} \in \mathbf{Z}$. Действительно, $e^a = e^{0+a} = e^0 = 1$. Значит, $e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta) = 1$ и $\alpha = 0$, $\frac{\beta}{2\pi} \in \mathbf{Z}$.

Периодичность показательной функции означает, что множество A-точек этой функции для любого $A \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ является бесконечным. Найдем все A-точки отображения $z \to e^z$. Пусть при некотором $z := x+iy$ выполняется равенство $e^z = A$. Воспользуемся тригонометрической формой записи $A = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |A|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} A$. Тогда

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа вытекает, что $e^x = r$, $\frac{\varphi - y}{2\pi} \in \mathbf{Z}$. Следовательно,

$$z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$$

при некотором $k \in \mathbf{Z}$. Отсюда вытекает, что показательная функция отображает комплексную плоскость на плоскость с выколотой точкой $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Пусть $u := \operatorname{Re} e^z$, $v := \operatorname{Im} e^z$. Из определения

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y), \ x := \operatorname{Re} z, \ y := \operatorname{Im} z$$

вытекает, что

$$u(x, y) = e^x \cos y, \ v(x, y) = e^x \sin y.$$

При этом для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ имеем

$$u'_x(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0, \ u'_y(x_0, y_0) = -e^{x_0} \sin y_0,$$

$$v'_x(x_0, y_0) = e^{x_0} \sin y_0, \ v'_y(x_0, y_0) = e^{x_0} \cos y_0.$$

Следовательно,

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0), \ u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0).$$

Значит, показательная функция дифференцируема в любой точке комплексной плоскости, то есть является целой. Ее производная функция совпадает с ней. Действительно, производная функция $z \to (e^z)'$ в точке $z_0 := x_0 + iy_0$ принимает значение

$$u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0) = e^{z_0}.$$

Так как $|e^z| = e^x \neq 0$ для любого z, то производная экспоненциальной функции всюду отлична от нуля. Значит, экспоненциальная функция осуществляет конформное отображение плоскости на плоскость с выколотой точкой $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Пусть $\varphi \in \mathbf{R}$. Экспоненциальная функция отображает взаимно однозначно прямую l_φ, задаваемую уравнением $z = t + i\varphi$, $t \in (-\infty, +\infty)$, на открытый луч L_φ, задаваемый уравнением $w = e^t e^{i\varphi}$, $t \in (-\infty, +\infty)$. В последнем уравнении можно произвести замену параметра $t \to e^t$ и записать его в виде $w = te^{i\varphi}$, $t \in (0, +\infty)$. Возникшая ситуация проиллюстрирована на рисунке 5.

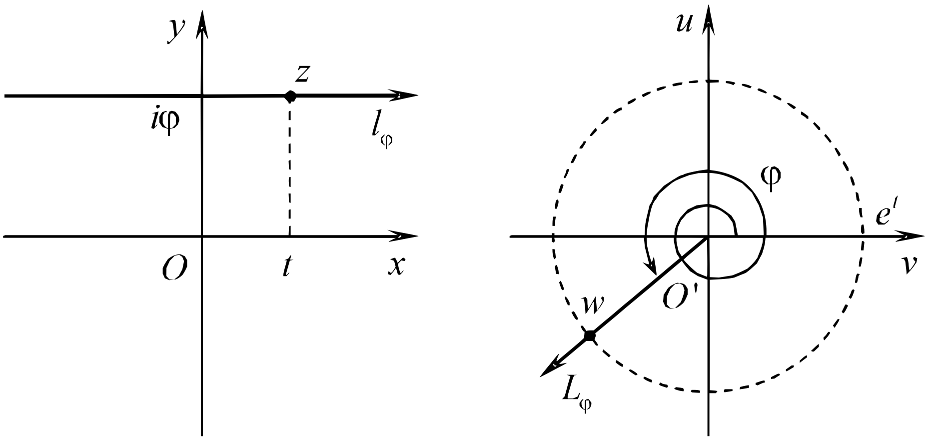

Рисунок 5

Увеличение значения φ связано с перемещением прямой l_φ в направлении мнимой оси и поворотом луча L_φ вокруг начала против часовой стрелки. Если значение φ увеличится на величину α, то прямая l_φ переместится на величину α, а луч L_φ повернется на угол α. Отсюда следует, что функция $z \to e^z$ осуществляет конформное взаимно однозначное отображение открытой полосы

$$G := \{z : \varphi - \alpha < \operatorname{Im} z < \varphi + \alpha\}, \ \alpha \in (0; \pi],$$

на открытую угловую область

$$D := \left\{w : -\alpha < \arg(we^{-i\varphi}) < \alpha\right\}$$

в соответствии с рисунком 6.

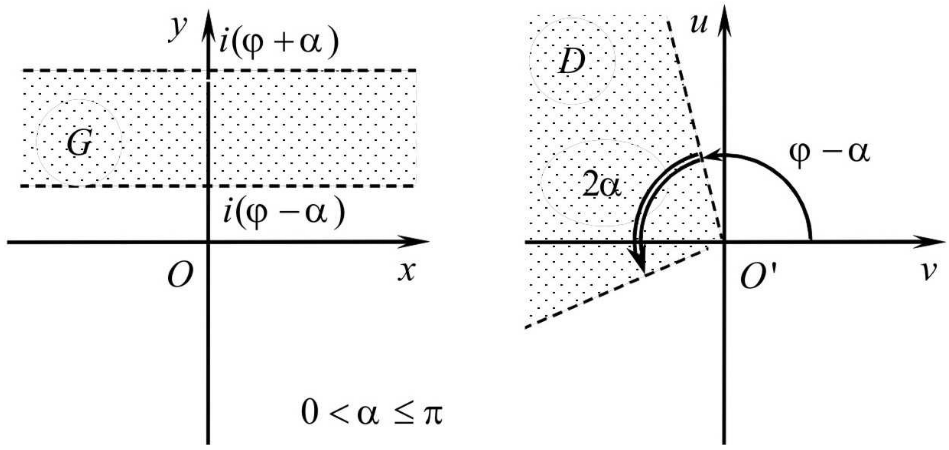

Рисунок 6

В случае $\alpha = \pi$ область D совпадает с плоскостью с разрезом вдоль луча $L_{\varphi+\pi}$ (см. Рис. 6).

2.7 Тригонометрические и гиперболические функции

Определение 2.3 *Непрерывные комплексные функции s и c, определённые на множестве всех комплексных чисел, называются комплексными синусом и косинусом соответственно, если они удовлетворяют следующим условиям:*

1) $s(z_1+z_2)=s(z_1)c(z_2)+c(z_1)s(z_2),\ c(z_1+z_2)=c(z_1)c(z_2)-s(z_1)s(z_2)$ *для любых* $z_1,z_2\in\mathbf{C}$*;*

2) $s\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{e-e^{-1}}{2i},\ c\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{e+e^{-1}}{2},\ s\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ c\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ *и* $\mathrm{Re}\,(c(y)\pm is(y))>0$ *на интервале* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Покажем, что эти условия определяют функции s и c однозначно. Для этого определим на $\mathbf{C}$ комплексные функции f и g с помощью соотношений:

$$f(iz):=c\,(z)+is\,(z)\,,\ g(iz):=c\,(z)-is\,(z)\,.$$

Тогда для любых $z_1,z_2\in\mathbf{C}$ получим

$$f(iz_1+iz_2)=c\,(z_1+z_2)+is\,(z_1+z_2)=$$

$$=c\,(z_1)\,c\,(z_2)-s\,(z_1)\,s\,(z_2)+is\,(z_1)\,c\,(z_2)+ic\,(z_1)\,s\,(z_2)=$$

$$=(c\,(z_1)+is\,(z_1))\,(c\,(z_2)+is\,(z_2))=f(iz_1)f(iz_2).$$

и

$$g(iz_1+iz_2)=c\,(z_1+z_2)-is\,(z_1+z_2)=$$

$$=c\,(z_1)\,c\,(z_2)-s\,(z_1)\,s\,(z_2)-is\,(z_1)\,c\,(z_2)-ic\,(z_1)\,s\,(z_2)=$$

$$=(c\,(z_1)-is\,(z_1))\,(c\,(z_2)-is\,(z_2))=g(iz_1)g(iz_2).$$

Отсюда следует, что функциия f и g удовлетворяют условиям

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2),\ g(z_1+z_2)=g(z_1)g(z_2)$$

для любых $z_1,z_2\in\mathbf{C}$. При этом функция g отлична от нуля в любой точке комплексной плоскости, так как равенство $g(z_0)=0$ при каком-либо $z_0\in\mathbf{C}$ влечет равенства

$$-i=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(z_0)g\left(\frac{\pi}{2}-z_0\right)=0.$$

При этом для функции f имеем

$$f(1) = c\left(\frac{1}{i}\right) + is\left(\frac{1}{i}\right) = e,\ f\left(\frac{\pi}{2}i\right) = c\left(\frac{\pi}{2}\right) + is\left(\frac{\pi}{2}\right) = i,$$

а для функции g имеем

$$g(1) = c\left(\frac{1}{i}\right) - is\left(\frac{1}{i}\right) = e^{-1},\ g\left(\frac{\pi}{2}i\right) = c\left(\frac{\pi}{2}\right) - is\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{i}.$$

При этом $\operatorname{Re} f(iy) = \operatorname{Re} g(iy) = c(y) > 0$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. По определению показательной функции комплексной переменной функции f и $\frac{1}{g}$ совпадают с функцией $z \to e^z$. Следовательно, для любого комплексного z имеем

$$e^{iz} = c(z) + is(z),\ e^{-iz} = c(z) - is(z).$$

Откуда вытекает, что

$$s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ c(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Из равенств $e^{it} = \cos t + i\sin t$ и $e^{-it} = \cos t - i\sin t$, которые справедливы для любого вещественного t, вытекает, что сужения функций s и c на вещественную прямую совпадают с вещественными синусом и косинусом соответственно. Значения функций s и c в точке $z \in \mathbf{C}$ называются синусом и косинусом комплексного числа z и обозначается $\sin z$ и $\cos z$ соответственно.

Теоремы сложения для функций $z \to \cos z$ и $z \to \sin z$ имеют привычную форму

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

следовательно, все известные тригонометрические тождества на вещественной прямой, вытекающие из теорем сложения для синуса и косинуса, распространяются и на комплексную плоскость. Например, для любого $z \in \mathbf{C}$ имеем

$$\sin z = \cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right),\ \cos z = -\sin\left(z - \tfrac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,\ \sin(z + 2\pi) = \sin z,\ \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

Действительно,

$$\sin\left(z-\tfrac{\pi}{2}\right)=\sin z\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+\cos z\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=-\cos z,$$

$$\cos\left(z-\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos z\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)-\sin z\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=\sin z,$$

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\cos z\cos z+\sin z\sin z=\cos(z-z)=1,$$

$$\sin\left(z+2\pi\right)=\sin z\cos 2\pi+\cos z\sin 2\pi=\sin z,$$

$$\cos\left(z+2\pi\right)=\cos z\cos 2\pi-\sin z\sin 2\pi=\cos z.$$

Вообще говоря, любое тригонометрическое тождество можно проверить подстановкой вместо синуса и косинуса их представлений с помощью экспонент.

Упражнение 4 *Докажите, что для любых $z_1, z_2 \in C$ выполняются следующие равенства:*

$$\sin z_1-\sin z_2=2\cos\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2},$$

$$\cos z_1-\cos z_2=-2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}.$$

С тригонометрическими функциями тесно связаны гиперболические функции — гиперболические синус $z\to\operatorname{sh} z$ и косинус $z\to\operatorname{ch} z$. Гиперболические функции комплексного переменного определяются с помощью следующих соотношений

$$\operatorname{sh} z:=\frac{e^z-e^{-z}}{2};\ \operatorname{ch} z:=\frac{e^z+e^{-z}}{2}.$$

Связь тригонометрических и гиперболических функций выражается следующими формулами:

$$\sin iz=i\operatorname{sh} z,\ \cos iz=\operatorname{ch} z.$$

Из этих соотношений вытекает, что всякое тригонометрическое тождество имеет свой гиперболический аналог. Покажем как получить, например, теоремы сложения для функций $z\to\operatorname{sh} z$ и $z\to\operatorname{ch} z$. Пусть $z_1, z_2\in\mathbf{C}$. Тогда

$$\operatorname{sh}(z_1+z_2)=\frac{1}{i}\sin i(z_1+z_2)=$$

$$= \frac{1}{i}(\sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \cos i(z_1 + z_2) =$$

$$= \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2 = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Для всякого $z := x + iy$ из $\mathbf{C}$ выполняются равенства

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \ \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

следовательно,

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y, \ \operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y, \ \overline{\sin z} = \sin \bar{z},$$

$$\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y, \ \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y, \ \overline{\cos z} = \cos \bar{z},$$

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y},$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}.$$

В частности комплексные синус и косинус не ограничены на комплексной плоскости. Действительно, $|\sin(\frac{\pi}{2} + iy)| = |\operatorname{ch} y| \to \infty$ и $|\cos(\frac{\pi}{2} + iy)| = |\operatorname{sh} y| \to \infty$ при $y \to \infty$.

Упражнение 5 *Докажите, что гиперболические синус и косинус, как непрерывные на всей комплексной плоскости функции, определяются однозначно условиями:*

1) $\operatorname{sh}(z_1+z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2+\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2, \operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$ *для любых* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

2) $\operatorname{sh} 1 = \frac{e-e^{-1}}{2}, \ \operatorname{ch} 1 = \frac{e+e^{-1}}{2}, \ \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}i = 1, \ \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}i = 0$ *и* $\operatorname{Re}(\operatorname{ch} iy \pm \operatorname{sh} iy) > 0$ *для любого* $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Опишем A-точки комплексных синуса и косинуса. Пусть $A \in \mathbf{C}$ и $t = e^{iz}$. Из уравнения $A = \sin z$ вытекает, что $A = \frac{t-t^{-1}}{2i}$ или $t^2 - 2Ait - 1 = 0$. Произведение корней $t_1 t_2$ последнего уравнения равно -1. Пусть $t_1 =: \tau \neq 0$, $t_2 =: -\tau^{-1} \neq 0$. Тогда множество A-точек синуса исчерпывается решениями уравнений $e^{iz} = \tau$, $e^{iz} = -\tau^{-1}$, то есть множество A-точек синуса исчерпывается точками вида $\operatorname{Arg} \tau - i \ln |\tau|$ и $\pi - \operatorname{Arg} \tau + i \ln |\tau|$. Если $A = 0$, то $\tau = 1$, значит, нулевое множество синуса исчерпывается точками πk, где $k \in \mathbf{Z}$.

Из уравнения $A = \cos z$ вытекает, что $A = \frac{t+t^{-1}}{2}$ или $t^2 - 2At + 1 = 0$. Произведение корней $t_1 t_2$ последнего уравнения равно 1. Пусть $t_1 =: \tau \neq 0$,

$t_2 =: \tau^{-1} \neq 0$. Тогда множество A-точек косинуса исчерпывается решениями уравнений $e^{iz} = \tau$, $e^{iz} = \tau^{-1}$, то есть множество A-точек косинуса исчерпывается точками вида $\operatorname{Arg}\tau - i\ln|\tau|$ и $-\operatorname{Arg}\tau + i\ln|\tau|$. Если $A = 0$, то $\tau = i$, значит, нулевое множество косинуса исчерпывается точками $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Из свойств показательной функции комплексной переменной вытекает, что функции $z \to \cos z$ и $z \to \sin z$ являются целыми. При этом

$$(\cos z)' = -\sin z, \ (\sin z)' = \cos z$$

для любого комплексного z. Действительно, используя теорему о производной сложной функции, получаем

$$(\sin z)' = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$(\cos z)' = \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z.$$

Значит, конформность отображения $z \to \sin z$ нарушается только в нулях косинуса, то есть в точках множества $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, а конформность отображения $z \to \cos z$ нарушается только в нулях синуса, то есть в точках множества $\pi\mathbf{Z}$.

Из легко проверяемого тождества

$$\cos z - \cos \pi k = (-1)^{k+1} 2 \sin^2 \frac{z - \pi k}{2}$$

вытекает, что функция $z \to \cos z$ в окрестности точки πk представляется в виде $\cos z = \cos \pi k + (z - \pi k)^2 f(z)$, где f — некоторая дифференцируемая в точке πk функция и $f(\pi k) \neq 0$. Следовательно, функция $z \to \cos z$ увеличивает углы в точках множества $\pi\mathbf{Z}$ в два раза. Из тождества $\sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2})$ вытекает, что аналогичным образом ведет себя функция $z \to \sin z$ в окрестностях точек множества $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$.

Рассмотрим подробнее отображение комплексной плоскости, осуществляемое функцией $z \to \sin z$. Пусть $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $a = \sin\varphi$, $b = \cos\varphi$. Функция $z \to \sin z$ отображает взаимно однозначно прямую l_φ, задаваемую уравнением $z = \varphi + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$, на одну из ветвей L_φ гиперболы, задаваемую уравнением $z = \sin(\varphi + it)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. При этом прямая $l_{-\varphi}$ отображается взаимно однозначно на другую ветвь гиперболы $L_{-\varphi}$. Прямые и соответствующие им ветви гиперболы изображены на рисунке 7.

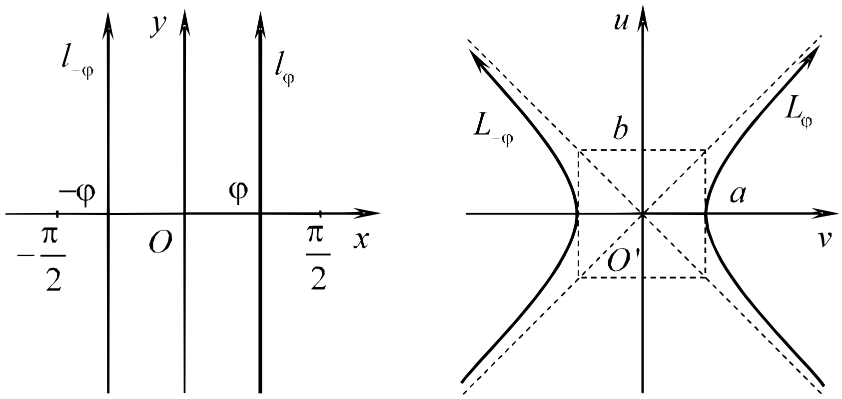

Рисунок 7

Каноническое уравнение гиперболы $\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$ вытекает из тождеств

$$\sin(\varphi + it) = a \operatorname{ch} t + ib \operatorname{sh} t, \ \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Асимптоты гиперболы имеют угловые коэффициенты $\pm\frac{b}{a} = \pm \operatorname{ctg} \varphi$. Изменение значения φ связано с перемещением луча l_φ, перемещением и деформацией ветвей гиперболы. При стремлении φ к 0 обе ветви гиперболы сближаются и сливаются в пределе с мнимой осью. При стремлении φ к $\frac{\pi}{2}$ ветви гиперболы удаляются и сливаются в пределе с лучами $L_{-\frac{\pi}{2}}$, $L_{\frac{\pi}{2}}$, задаваемыми уравнениями $w = t, t \in (-\infty, -1]$ и $w = t, t \in [1, +\infty)$ соответственно. Отсюда следует, что функция $z \to \sin z$ осуществляет взаимно однозначное отображение открытой полосы

$$G := \left\{(x, y) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$$

на открытую область D, получаемую из плоскости удалением лучей $L_{-\frac{\pi}{2}}$ и $L_{\frac{\pi}{2}}$, в соответствии с рисунком 8.

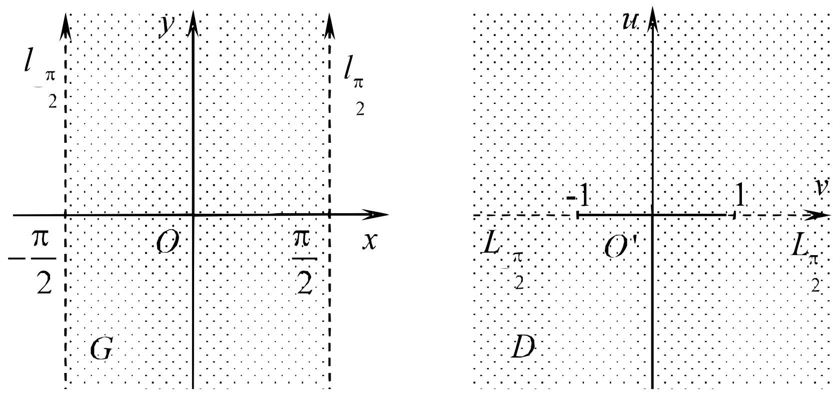

Рисунок 8

Это отображение является конформным, так как производная функции $z \to \sin z$ совпадает с функцией $z \to \cos z$ и, как, видно из соотношения,

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y},$$

отлична от нуля в любой точке области G.

Из формулы приведения $\sin(z + \pi) = -\sin z$ вытекает, что открытая полоса

$$G + \pi := \left\{(x, y) : \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

отображается взаимно однозначно и конформно на ту же область D. Замечаем, что при переходе луча l_φ через точку $z = \frac{\pi}{2}$ происходит смена ветви гиперболы. Меняется также ориентация ветви гиперболы как кривой. Аналогичная ситуация возникает и при переходе через точку $z = -\frac{\pi}{2}$.

Представление об отображении комплексной плоскости функцией $z \to \cos z$ можно получить, используя формулу

$$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right).$$

Из нее вытекает, в частности, что эта функция отображает область $G + \frac{\pi}{2}$ взаимно однозначно и конформно на область D. Аналогично, из формул

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{i}\sin iz, \ \operatorname{ch} z = \cos iz$$

вытекает, что функции $z \to \operatorname{sh} z$ и $z \to \operatorname{ch} z$ отображают взаимно однозначно и конформно область $\frac{1}{i}G = -iG$ на области $\frac{1}{i}D = -iD$ и D соответственно.

Глава 3

Многозначные отображения

3.1 Однозначные и многозначные отображения

Однозначные отображения

С общих позиций (однозначное) *отображение* $f : X \to Y$ из множества X в множество Y определяется как непустое множество в декартовом произведении $X \times Y$, удовлетворяющее *условию однозначности*

$$(x, y_1), (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2.$$

При этом для любого $A \subseteq X$ множество

$$\{y : (x, y) \in f,\ x \in A\} \subseteq Y$$

называется *образом* множества A и обозначается символом $f(A)$. Образ $f(X) = \{y : (x, y) \in f\}$ называется *полным образом* отображения f или *областью значений* отображения f и обозначается E_f. Если $E_f = Y$, то отображение f называют *сюръективным.* Для любого $B \subseteq Y$ множество

$$\{x : (x, y) \in f,\ y \in B\} \subseteq X$$

называется *прообразом* множества B и обозначается символом $f^{-1}(B)$. Прообраз $f^{-1}(Y) = \{x : (x, y) \in f\}$ называется *полным прообразом* отображения f или *областью определения* отображения f и обозначается D_f. Если $D_f = X$, то отображение f называют *инъективным*[1].

Если $x \in X \setminus D_f$, то образ $f(x)$ точки x является пустым. Если $x \in D_f$, то образ $f(x)$ точки x содержит единственный элемент, который обозначают тем же символом $f(x)$. Этот элемент называют *значением* отображения f в точке x и говорят, что отображение f точке $x \in D_f$ ставит в соответствие точку $y := f(x) \in E_f$. Для того, чтобы задать отображение $f : X \to Y$, достаточно указать его область определения D_f и его значения $f(x)$ в точках $x \in D_f$. В этом случае

$$f = \{(x, y) : x \in D_f,\ y = f(x)\}.$$

Аналогично, если задана область значений E_f и прообразы $f^{-1}(y)$ точек $y \in E_f$, то

$$f = \{(x, y) : y \in E_f,\ x \in f^{-1}(y)\}.$$

Если выполнено условие *взаимной однозначности*

$$(x_1, y), (x_2, y) \in f \implies x_1 = x_2,$$

то множество

$$f^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in f\} \subseteq Y \times X$$

является отображением из множества Y в множество X, $D_{f^{-1}} = E_f$, $E_{f^{-1}} = D_f$. Это отображение называется *обратным* к отображению f. Само отображение f при этом называют *взаимно однозначным* (обратимым, однолистным). Обратное к взаимно однозначному отображению f, в свою очередь, является обратимым. При этом

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Если взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$ инъективно и сюръективно, то его называют *биективным* (биекцией X на Y). Для любого $A \subseteq X$ пересечение f с декартовым произведением $A \times Y$ называется *сужением* f на множество A и обозначается $f|_A$. Множество $A \subseteq D_f$ называется *множеством однолистности* для отображения f, если сужение $f|_A$ является биекцией A на образ $f(A)$.

---

[1]В традиционном смысле символ $f : X \to Y$ означает, что каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y := f(x) \in Y$. Это уже означает, что $D_f = X$. С общих позиций символ $f : X \to Y$ предполагает лишь включения $D_f \subseteq X$ и $E_f \subseteq Y$. Кроме того, в традиционном смысле от инъективного отображения требуется еще и взаимная однозначность. Мы этого не делаем, так как в противном случае данное понятие потеряет смысл для многозначных отображений.

Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз $f^{-1}(U) \subseteq X$ всякого открытого множества $U \subseteq Y$ является открытым множеством в подпространстве $D_f \subseteq X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфным* (гомеоморфизмом пространства X на пространство Y), а сами пространства X и Y — *гомеоморфными*, если оно биективно и *бинепрерывно*, то есть само отображение $f : X \to Y$ и его обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ являются непрерывными.

Если $X \times Y$ — топологическое произведение и отображение $f \subseteq X \times Y$ наделено индуцированной топологией, то подпространство $f \subseteq X \times Y$ и любое гомеоморфное ему топологическое пространство называется *графиком* отображения f.

Многозначные отображения

Многозначное отображение[2] $F : X \to Y$ из множества X в множество Y определяется как непустое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Условие однозначности опускается. Если $Y \subseteq \bar{\mathbf{C}}$ и $X \subseteq \bar{\mathbf{C}}$, то многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *многозначной функцией*. Для любого $A \subseteq X$ множество

$$\{y : (x, y) \in F,\ x \in A\} \subseteq Y$$

называется *образом* множества A и обозначается символом $F(A)$. Образ $F(X) = \{y : (x, y) \in F\}$ называется *полным образом* многозначного отображения F или *областью значений* отображения F и обозначается E_F. Если $E_F = Y$, то отображение $F : X \to Y$ называют *сюръективным*, или отображением множества X «на» множество Y. Для любого $B \subseteq Y$ множество

$$\{x : (x, y) \in F,\ y \in B\} \subseteq X$$

называется *прообразом* множества B и обозначается символом $F^{-1}(B)$. Прообраз $F^{-1}(Y) = \{x : (x, y) \in F\}$ называется *полным прообразом* многозначного отображения F или *областью определения* многозначного отображения F и обозначается D_F. Если $D_F = X$, то отображение F называют *инъективным* или отображением множества X «в» множество Y.

Если $x \in X \setminus D_F$, то образ $F(x)$ точки x является пустым. Если $x \in D_F$, то образ $F(x)$ точки x не является пустым и его элементы называются *значениями* отображения F в точке x. Для того, чтобы задать многозначное

[2] Понятие многозначного отображения совпадает с алгебраическим понятием двузначного (бинарного) отношения.

отображение $F : X \to Y$, достаточно указать его область определения D_F и образы $F(x)$ точек $x \in D_F$. В этом случае

$$F = \{(x, y) : x \in D_f,\ y \in F(x)\}.$$

Всякое многозначное отображение $F : X \to Y$ можно рассматривать как однозначное отображение

$$f_F : X \to \beta(Y) |\, x \to F(x),$$

где $\beta(Y)$ — булеан Y. В этом случае образы $F(x)$ точек $x \in D_F = D_{f_F}$ совпадают со значениями $f_F(x)$ функции f_F.

Пусть X, Y — топологические пространства. Если $X \times Y$ — топологическое произведение и многозначное отображение $F \subseteq X \times Y$ наделено индуцированной топологией, то подпространство $F \subseteq X \times Y$ и любое гомеоморфное ему топологическое пространство называется *графиком* многозначного отображения F. Говорят, что многозначное отображение $F : X \to Y$ имеет *замкнутый график*, если F замкнуто в топологическом произведении $X \times Y$.

Определение функциональных операций

Уточним определение основных функциональных операций над многозначными отображениями. Пусть $F : X \to Y$ — многозначное отображение, $A \subseteq X$. Пересечение F с декартовым произведением $A \times Y \subseteq X \times Y$ называется *сужением* F на множество A и обозначается $F|_A$. В связи с этим обозначением образ точки $x_0 \in X$ иногда обозначают $F|_{x_0}$ или $F(x)|_{x=x_0}$. Условием существования сужения $F|_A$ служит условие $A \cap D_F \neq \varnothing$. При этом условии область определения сужения $F|_A$ непуста и совпадает с множеством $A \cap D_F \subseteq X$, а область значений совпадает с образом $F(A) \subseteq Y$.

Пусть $F_1 : X \to Y$ и $F_2 : Y \to Z$ — многозначные отображения. *Композицией* отображений F_1 и F_2 называют множество $F \subseteq X \times Z$, состоящее из пар (x, z), удовлетворяющих условию: существует $y \in Y$, такое, что $(x, y) \in F_1$ и $(y, z) \in F_2$. Композицию отображений F_1 и F_2 принято обозначать $F_2 \circ F_1$. Условием существования композиции $F_2 \circ F_1$ является условие $E_{F_1} \cap D_{F_2} \neq \varnothing$. При этом условии область определения композиции $F_2 \circ F_1$ непуста и совпадает с прообразом $F_1^{-1}(F_2^{-1}(Z)) \subseteq X$, а область значений совпадает с образом $F_2(F_1(X)) \subseteq Z$.

Всякое многозначное отображение имеет *обратное* многозначное отображение, так называется многозначное отображение

$$F^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in F\} \subseteq Y \times X.$$

Легко увидеть, что $D_{F^{-1}} = E_F$ и $E_{F^{-1}} = D_F$. При этом для любых $x \in D_F$ и $y \in E_F$ имеют место следующие теоретико-множественные соотношения:

$$x \in F^{-1} \circ F(x) = \{x' \in X : F(x') \cap F(x) \neq \varnothing\},$$

$$y \in F \circ F^{-1}(y) = \{y' \in Y : F^{-1}(y') \cap F^{-1}(y) \neq \varnothing\}.$$

Далее рассмотрим определения алгебраических операций над многозначными функциями. При этом ограничимся лишь отображениями из $\bar{\mathbf{C}}$ в $\bar{\mathbf{C}}$. Предоставляем читателю сформулировать определения алгебраических операций над функциями из $\bar{\mathbf{C}}$ в $\mathbf{C}$, из $\mathbf{C}$ в $\bar{\mathbf{C}}$ и из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$.

Суммой двух многозначных функций F_1 и F_2 называется многозначная функция $F_1 + F_2$, которая определяется следующим образом. Область определения $D_{F_1+F_2}$ этой функции совпадает с пересечением $D_{F_1} \cap D_{F_2}$, из которого удалено множество

$$\{z : F_1(z) = F_2(z) = \{\infty\}\}.$$

Образ $(F_1 + F_2)(z)$ точки $z \in D_{F_1+F_2}$ совпадает с множеством $F_1(z) + F_2(z)$, состоящим из всевозможных сумм вида $w_1 + w_2$, где $w_1 \in F_1(z)$, $w_2 \in F_2(z)$ и

$$\frac{1}{|w_1|} + \frac{1}{|w_2|} \neq 0$$

(то есть w_1 и w_2 не равны ∞ одновременно). Сумма $F_1 + F_2$ имеет смысл только если выполнено условие существования: $D_{F_1+F_2} \neq \varnothing$.

Аналогичным образом определяются *произведение* F_1F_2 и *частное* $F_1 : F_2$ многозначных функций. Область определения $D_{F_1F_2}$ произведения F_1F_2 совпадает с пересечением $D_{F_1} \cap D_{F_2}$, из которого удалено множество

$$\{z : F_1(z) = \{0\},\ F_2(z) = \{\infty\}\} \cup \{z : F_1(z) = \{\infty\},\ F_2(z) = \{0\}\},$$

область определения $D_{F_1:F_2}$ частного $F_1 : F_2$ совпадает с пересечением $D_{F_1} \cap D_{F_2}$, из которого удалено множество

$$\{z : F_1(z) = F_2(z) = \{0\}\} \cup \{z : F_1(z) = F_2(z) = \{\infty\}\}.$$

При этом образ $(F_1F_2)(z)$ точки $z \in D_{F_1F_2}$ совпадает с множеством $F_1(z)F_2(z)$, состоящим из всевозможных произведений вида w_1w_2, где $w_1 \in F_1(z)$, $w_2 \in F_2(z)$ и

$$|w_1| + \frac{1}{|w_2|} \neq 0,\ \frac{1}{|w_1|} + |w_2| \neq 0,$$

а образ $(F_1 : F_2)(z)$ точки $z \in D_{F_1:F_2}$ совпадает с множеством $F_1(z) : F_2(z)$, состоящим из всевозможных частных вида $w_1 : w_2$, где $w_1 \in F_1(z)$, $w_2 \in F_2(z)$ и

$$|w_1| + |w_2| \neq 0,\ \frac{1}{|w_1|} + \frac{1}{|w_2|} \neq 0.$$

3.2 Непрерывные представления многозначных отображений

Непрерывные представления и непрерывные отображения

Пусть X, Y — топологические пространства. Символом $c[X, Y]$ обозначаем совокупность всех непрерывных (однозначных) отображений $f : X \to Y$. Отображение $f : X \to Y$ принадлежит совокупности $c[X, Y]$, если прообраз $f^{-1}(U) \subseteq X$ всякого открытого множества $U \subseteq Y$ является открытым множеством в подпространстве $D_f \subseteq X$. Если $f \in c[X, Y]$ и область определения $D_f \subseteq X$ отображения f открыта, то пишем $f \in c(X, Y)$. Легко увидеть, что отображение $f : X \to Y$ принадлежит совокупности $c(X, Y)$ тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U) \subseteq X$ всякого открытого множества $U \subseteq Y$ является открытым множеством в пространстве X.

Выберем произвольное многозначное отображение $F : X \to Y$. Подмножество $\mathcal{F} \subseteq c[X, Y]$ будем называть *непрерывным представлением* многозначного отображения F, если

$$F = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f.$$

В терминах образов последнее условие означает, что выполнены следующие условия:

1) область определения D_f любого отображения $f \in \mathcal{F}$ лежит в D_F и

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} D_f = D_F;$$

2) для любых $f \in \mathcal{F}$ и $z \in D_f$ выполняется включение $f(z) \in F(z)$;

3) для любых $z \in D_F$ и $w \in F(z)$ найдется отображение $f \in \mathcal{F}$, такое, что $f(z) = w$.

Любое многозначное отображение F допускает непрерывное представление $\mathcal{F}$. Действительно, можно положить, например, что каждое отображение $f \in \mathcal{F}$ состоит из одной точки $(x, y) \in F$. Оно определено на одноточечном множестве $\{x\} \subseteq D_F$ и принимает свое единственное значение y, лежащее в множестве $F(x) \subseteq Y$. Тогда семейство $\mathcal{F} = \{f\}$ является непрерывным представлением F. Такое непрерывное представление многозначного отображения F называют *поточечным*. Верно и обратное: каждое семейство $\mathcal{F}$ непрерывных отображений $f : X \to Y$ определяет многозначное отображение

$$F := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f \subseteq X \times Y.$$

Область определения D_F этого отображения совпадает с объединением

$$D_{\mathcal{F}} := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} D_f,$$

область значений E_F этого отображения совпадает с объединением

$$E_{\mathcal{F}} := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} E_f,$$

а образ $F(x)$ точки $x \in D_F = D_{\mathcal{F}}$ — с множеством

$$\mathcal{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{F}, x \in D_f\}.$$

Определим на булеане множества $c[X, Y]$ отношение $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ по следующему правилу: $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ тогда и только тогда, когда

$$\bigcup_{f \in \mathcal{F}_1} f = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_2} f.$$

В терминах образов, последнее условие означает, что $D_{\mathcal{F}_1} = D_{\mathcal{F}_2}$ и $\mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_2(x)$ для любого $x \in D_{\mathcal{F}_1} = D_{\mathcal{F}_2}$. Легко убедиться, что это отношение является отношением эквивалентности. Оно разбивает булеан множества $c[X, Y]$ на классы эквивалентности. Все семейства из отдельного класса эквивалентности представляют одно и то же многозначное отображение.

С другой стороны, каждое многозначное отображение F определяет конкретный класс эквивалентности. Это класс, который содержит поточечное представление отображения F. Таким образом, любое многозначное отображение можно отождествить с конкретным классом эквивалентных семейств непрерывных отображений $f : X \to Y$. Задать многозначное отображение F можно с помощью выбора произвольного представителя этого класса, то есть указанием конкретного непрерывного представления $\mathcal{F}$ этого отображения. При этом, элементы непрерывного представления $\mathcal{F}$ многозначного отображения F называются *непрерывными ветвями представления* $\mathcal{F}$. Если непрерывное представление $\mathcal{F}$ конкретного многозначного отображения F является традиционным и задано по умолчанию, то его непрерывные ветви называют *непрерывными ветвями отображения* F.

Многозначное отображение $F : X \to Y$ называем *непрерывным* и пишем $F \in C(X, Y)$, если оно допускает непрерывное представление $\mathcal{F} \subseteq c(X, Y)$. Согласно этому определению область определения любой непрерывной ветви $f \in \mathcal{F}$ является открытым множеством в X. Так, например, непрерывная на отрезке $[a, b]$ действительная (однозначная) функция принадлежит классу $C([a, b], \mathbf{R})$, но не принадлежит классу $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. С другой стороны, непрерывная на интервале (a, b) действительная (однозначная) функция принадлежит классам $C((a, b), \mathbf{R})$, $C([a, b], \mathbf{R})$ и $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Непрерывные представления и функциональные операции

Уточним определения основных операций над непрерывными представлениями многозначных отображений. Пусть $F : X \to Y$ — многозначное отображение, $\mathcal{F}$ — непрерывное представление F, $A \subseteq X$, $F|_A$ — сужение F на множество A. Непрерывное представление $\mathcal{F}|_A$ сужения $F|_A$ определяется как совокупность сужений $f|_A$, где $f \in \mathcal{F}$ и $A \cap D_f \neq \varnothing$. Если множество $A \subseteq X$ и область определения D_f открыты, то область определения $D_{f|_A} = A \cap D_f$ тоже открыта. Значит, сужение $F|_A$ непрерывного многозначного отображения $F : X \to Y$ на открытое множество $A \subseteq X$ также является непрерывным многозначным отображением из X в Y.

Пусть $F_1 : X \to Y$ и $F_2 : Y \to Z$ — многозначные отображения, $\mathcal{F}_1$ — непрерывное представление отображения F_1, а $\mathcal{F}_2$ — непрерывное представление отображения F_2. Если $E_{F_1} \cap D_{F_2} \neq \varnothing$, то определена композиция $F_2 \circ F_1$. Непрерывное представление $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$ композиции $F_2 \circ F_1$ определяется как семейство композиций $f_2 \circ f_1$, где $f_1 \in \mathcal{F}_1$, $f_2 \in \mathcal{F}_2$ и $f_1^{-1}\left(f_2^{-1}(Z)\right) \neq \varnothing$.

Если $f_1 \in c(X,Y)$ и $f_2 \in c(Y,Z)$, то область определения $f_1^{-1}\left(f_2^{-1}(Z)\right) \subseteq X$ композиции $f_2 \circ f_1$ открыта, то есть $f_2 \circ f_1 \in c(X,Z)$; значит, композиция $F_2 \circ F_1$ непрерывных многозначных отображений F_1 и F_2 является непрерывным многозначным отображением из X в Z.

Пусть F_1 и F_2 — многозначные функции и $D_{F_1+F_2} \neq \varnothing$. Если $\mathcal{F}_1$ — непрерывное представление многозначной функции F_1, а $\mathcal{F}_2$ — непрерывное представление многозначной функции F_2, то соответствующее непрерывное представление $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ многозначной функции $F_1 + F_2$ совпадает с семейством непрерывных функций $f_1 + f_2$, где $f_1 \in \mathcal{F}_1$, $f_2 \in \mathcal{F}_2$ и $D_{f_1+f_2} \neq \varnothing$. Если множества D_{f_1} и D_{f_2} открыты в $\bar{\mathbf{C}}$, то множество

$$D_{f_1+f_2} := (D_{f_1} \cap D_{f_2}) \setminus \left(f_1^{-1}(\infty) \cup f_2^{-1}(\infty)\right)$$

тоже открыто в $\bar{\mathbf{C}}$. Отсюда вытекает, что сумма F_1+F_2 непрерывных многозначных функций F_1 и F_2 тоже является непрерывной многозначной функцией.

Аналогичным образом определяются непрерывные представления

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 : \mathcal{F}_2$$

произведения F_1F_2 и частного $F_1 : F_2$ многозначных функций F_1 и F_2 соответственно.

Упражнение 6 *Убедитесь, что произведение и частное непрерывных многозначных функций (при условии их существования) сами являются непрерывными многозначными функциями.*

Непрерывная многозначная функция $F : \bar{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ называется *аналитической*, если она допускает непрерывное представление $\mathcal{F} \subseteq c(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$, состоящее из аналитических функций.

Упражнение 7 *Убедитесь, что сумма, произведение и частное аналитических многозначных функций (при условии их существования) сами являются аналитическими многозначными функциями.*

3.3 Фактор-пространства многозначных отображений

Дизъюнктные объединения и кратные пространства

Пусть J — множество, наделенное дискретной топологией, X — топологическое пространство. Декартово произведение $X \times J$ можно рассматривать как объединение

$$\bigcup_{j \in J} X_j$$

множеств

$$X_j := (X)_j := \{(x, j) : x \in X\}.$$

В этом случае топологическое произведение $X \times J$ называется *дизъюнктным объединением* (топологической суммой) копий (экземпляров) пространства X и обозначается

$$\coprod_{j \in J} X.$$

С другой стороны, декартово произведение $X \times J$ можно рассматривать как объединение

$$\bigcup_{x \in X} x_J$$

множеств

$$x_J := (x)_J := \{(x, j) : j \in J\}.$$

В этом случае топологическое произведение $X \times J$ называется *кратным пространством* и обозначается X_J или $(X)_J$. Можества x_J называются *кратными элементами* пространства X_J. Мощность $|J|$ множества J называется *кратностью пространства* X_J. Элементы $x_j := (x)_j := (x, j) \in x_J$ называются *поднятиями элемента* $x \in X$. Если U — окрестность точки x в пространстве X, то множество

$$U_j := (U)_j := \{x_j : x \in U\} \subseteq X_j$$

является окрестностью точки x_j в пространстве X_J и называется *поднятием окрестности* U. Подпространства $X_j \subseteq X_J$ называются *поднятиями пространства* X. Пространство X называется *проекцией* пространства X_J, а отображение

$$p : X_J \to X |\, x_j \to x$$

— *оператором проектирования*, или *проектором*. Связные подпространства пространства X_J называют *листами* этого пространства. Если пространство X является связным, то поднятия X_j являются листами пространства X_J.

Фактор-пространство семейства непрерывных отображений

Пусть F — многозначное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y, $\mathcal{F} = \{f_j : j \in J\}$ — его непрерывное представление. Можно считать, что каждая непрерывная ветвь $f_j \in \mathcal{F}$ определена на своем поднятии $X_j \subseteq X_J$ пространства X. В этом случае отображение $F : X \to Y$ можно рассматривать как однозначное отображение из кратного пространства X_J в пространство Y. Точке $x_j := (x)_j \in X_J$ оно ставит в соответствие точку $y := f_j(x) \in Y$. В этом случае область опредения отображения F совпадает с дизъюнктным объединением

$$\coprod_{j\in J} D_{f_j} := \{x_j : x \in D_{f_j}\} \subseteq X_J.$$

Введем на подпространстве

$$\coprod_{j\in J} D_{f_j} \subseteq X_J$$

отношение эквивалентности: $(x)_j \sim (x')_{j'}$ тогда и только тогда, когда $x = x' \in D_{f_j} \cap D_{f_{j'}}$ и $f_j(x) = f_{j'}(x)$. Фактор-пространство $X_\mathcal{F}$ пространства

$$\coprod_{j\in J} D_{f_j}$$

по этому отношению эквивалентности называется *фактор-пространством* (пространством посредником) семейства непрерывных отображений $\mathcal{F}$ или многозначного отображения F, если непрерывное представление $\mathcal{F}$ отображения F задано традиционно или по умолчанию. В последнем случае пространство $X_\mathcal{F}$ обозначается X_F. Связные подпространства пространства $X_\mathcal{F}$ называют *листами* этого пространства. Говорят, что листы пространства $X_\mathcal{F}$ и само пространство $X_\mathcal{F}$ получены при помощи склейки листов кратного пространства X_J по эквивалентным точкам, то есть по точкам, в которых непрерывные ветви принимают одинаковые значения. Элементы пространства $X_\mathcal{F}$ обозначаются x_j или $(x)_j$ и называются *поднятиями элемента* $x \in X$. При этом символы x_j и $x_{j'}$ обозначают один и тот же элемент пространства $X_\mathcal{F}$, если $f_j(x) = f_{j'}(x)$. Для любого

$$x \in \coprod_{j\in J} D_{f_j}$$

можество

$$x_{\mathcal{F}} := \{x_j : x_j \in X_{\mathcal{F}}\}$$

называется *кратным элементом* или *слоем* (над x) пространства $X_{\mathcal{F}}$. Мощность $|x_{\mathcal{F}}|$ множества $x_{\mathcal{F}}$ называется *кратностью слоя* $x_{\mathcal{F}}$. Пространство X называется *проекцией* пространства $X_{\mathcal{F}}$, а отображение

$$p : X_{\mathcal{F}} \to X |\, x_j \to x$$

— *оператором проектирования*, или *проектором.*

Понятно, что определенное таким образом топологическое пространство X_F зависит от выбора непрерывного представления $\mathcal{F}$ многозначного отображения F. В качестве примера рассмотрим многозначную функцию $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определяемую по правилу

$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}}, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Образ $F(x)$ совпадает с множеством $\{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$ при $x > 0$ и совпадает с одноточечным множеством $\{0\}$ при $x = 0$. Область определения D_F этой функции совпадает с лучем $\mathbf{R}_+ := \{x : x \geq 0\}$, а область значений E_F — с $\mathbf{R}$. Заметим, что это многозначное отображение не является непрерывным, то есть $F \notin C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, но его сужение на луч $\mathbf{R}_+$ непрерывно, то есть $F \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Выберем в качестве непрерывного представления отображения F семейство

$$\mathcal{F} = \{f_j : j \in J\},$$

где $J := \{1; 2\}$, f_1 определена на луче $\mathbf{R}_+$, $f_1(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$ и $f_1(x) = 0$ при $x = 0$, а функция f_2 определена на луче $\{x : x > 0\}$ и $f(x) = -\sqrt{x}$. В этом случае фактор-пространство $X_{\mathcal{F}}$ представляет собой дизъюнктное объединение двух листов. Первый совпадает с замкнутым лучем $\mathbf{R}_+$, а второй совпадает с открытым лучем $\{x : x > 0\} \subseteq \mathbf{R}$. Каждый из этих листов является открыто-замкнутым подмножеством $X_{\mathcal{F}}$. Из этого, конечно, не следует, что слой $0_{\mathcal{F}} = \{0_1\}$ является открыто-замкнутым. Открытой окрестностью точки 0_1 является, например, полуинтервал

$$[0, \varepsilon)_1 := \{x_1 : 0 \leq x < \varepsilon\}.$$

Кратность слоя 0_J равна 1, а кратность всех остальных слоев фактор-пространства $X_{\mathcal{F}}$ равна 2. Если доопределить f_2 в точке $x = 0$ и положить

$f_2(0) = 0$, то фактор-пространство $X_{\mathcal{F}}$ будет состоять из одного листа, полученного склейкой двух копий луча $\mathbf{R}_+$ в точке $x = 0$. Открытой окрестностью точки $0_1 = 0_2 \in X_{\mathcal{F}}$ в этом случае является, например, объединение двух полуинтервалов

$$[0, \varepsilon)_1 := \{x_1 : 0 \leq x < \varepsilon\}$$

и

$$[0, \varepsilon)_2 := \{x_2 : 0 \leq x < \varepsilon\}.$$

Как и прежде, кратность слоя $0_{\mathcal{F}}$ равна 1, а кратность остальных слоев равна 2. В первом случае пространство $X_{\mathcal{F}}$ не является гомеоморфным графику многозначного отображения F, а во втором случае оно гомеоморфно графику отображения F и, значит, само является графиком отображения F.

Пусть $F : X \to Y$ — произвольное многозначное отображение. Если в качестве $\mathcal{F}$ выбрать поточечное представление F и в качестве множества индексов J выбрать само отображение $F \subseteq X \times Y$, то пространство X_F совпадет с множеством $F \subseteq X \times Y$, наделенным дискретной топологией. Если при этом пространства X и Y наделены дискретными топологиями, то пространство X_F совпадает с графиком отображения F.

3.4 Расслоения

Расслоения и накрытия

В связи с исследованием многозначных отображений, обратных к однозначным отображениям, вводится понятие расслоения. Обратные к однозначным отображениям вполне характеризуются тем, что образы различных точек для таких отображений не пересекаются.

Пусть F — многозначное отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y. Если образы $F(x)$ различных точек из X не пересекаются, то отображение F называется *расслоением* над пространством X. При этом подпространство $E_F \subseteq Y$ называется *расслоенным* или *тотальным* пространством расслоения F, подпространство $F(x) \subseteq E_F$ называется *слоем* пространства E_F над элементом $x \in D_F$, а непрерывные ветви расслоения F называются *сечениями* этого пространства. Подпространство $D_F \subseteq X$ называется *базой* расслоения, а обратное отображение $p := F^{-1} : Y \to X$ является однозначным и называется *оператором проектирования.* Из определения обратного многозначного отображения вытекает, что $F = p^{-1}$, значит, слой $F(x)$ совпадает с прообразом $p^{-1}(x)$. Если все слои $p^{-1}(x)$, $x \in D_F$ дискретны в X, то расслоение F называется *накрытием* пространства X, а оператор проектирования p называется *накрывающим отображением.* Пусть X_F — какое-либо фактор-пространство какого-либо многозначного отображения F, $p : X_F \to X$ — его оператор проектирования. Тогда многозначное отображение $p^{-1} : X \to X_F$ является примером расслоения. При этом фактор-пространство X_F является расслоенным пространством, проекция X фактор-пространства X_F является базой расслоения p^{-1}, слои фактор-пространства X_F совпадают со слоями расслоения p^{-1}. Полный образ E_f сечения $f : X \to X_F$ расслоения p^{-1}, у которого D_f — связное подпространство X, является листом фактор-пространства X_F.

Тривиальные и локально тривиальные расслоения

Расслоение $F : X \to Y$ называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $h : E_F \to D_F \times E$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E_F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & D_F \times E \arrow[dl, "p_E"] \\ & D_F & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $p_E \circ h(y) = p(y)$ для любого $y \in E_F$. Здесь E — некоторое топологическое пространство, называемое *пространством слоя* тривиального расслоения F, $D_F \times E$ — топологическое произведение пространств D_F и E, p_E — оператор проектирования

$$D_F \times E \to D_F | \, (x, e) \to x.$$

Коммутативность указанной диаграммы означает, что гомеоморфизм h является *послойным*, то есть для любого $x \in D_F$ сужение отображения h на слой $p^{-1}(x)$ является гомеоморфным отображением этого слоя на слой $p_E^{-1}(x)$. Сужение тривиального расслоения, в свою очередь, является тривиальным расслоением с тем же пространством слоя.

Расслоение $F : X \to Y$ называется *тривиальным в точке* $x \in D_F$, если сужение F_U расслоения F на некоторую окрестность $U \subseteq D_F$ точки x является тривиальным расслоением. При этом окрестность U называют *картой* расслоения F. Расслоение F называется *локально тривиальным,* если оно тривиально в каждой точке $x \in D_F$. Произвольное семейство карт $\{U_j : j \in J\}$ локально тривиального расслоения F называется его *атласом*, если оно образует покрытие подпространства $D_F \subseteq X$. Расслоение F является локально тривиальным тогда и только тогда, когда оно обладает хотя бы одним атласом.

Пусть X_J — кратное пространство, p — оператор проектирования $p : X_J \to X |\, x_j \to x$.

$$\begin{tikzcd} X_J \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times J \arrow[dl, "p_J"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Обратное отображение $p^{-1} : X \to X_J$ является примером тривиального расслоения (накрытия). Роль гомеоморфизма h выполняет тождественное отображение. Пространством слоя этого расслоения является дискретное пространство J. Ниже мы рассмотрим примеры локально тривиальных, но не тривиальных расслоений.

3.5 Тригонометрическое расслоение

Пусть s — единичная окружность $\{\zeta : |\zeta| = 1\} \subset \mathbf{C}$, наделенная индуцированной из $\mathbf{C}$ топологией (метрикой). Рассмотрим однозначное инъективное отображение $t : \mathbf{R} \to s$, которое точке $\varphi \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие точку

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \in s.$$

Обратное отображение $T : s \to \mathbf{R}$ является расслоением над пространством s и называется *тригонометрическим* расслоением. В роли тотального пространства выступает пространство $\mathbf{R}$, а в роли оператора проектирования — само отображение t. База тригонометрического расслоения совпадает с окружностью s. Из определения аргумента комплексного числа вытекает, что для любого $\zeta \in s$

$$T(\zeta) = \operatorname{Arg} \zeta.$$

Так как слои $T(\zeta)$ тригонометрического расслоения дискретны, то это расслоение является накрытием.

Тригонометрическое расслоение (накрытие) не является тривиальным. Действительно, предположим, что существует послойный гомеоморфизм

$$h : \mathbf{R} \to s \times E,$$

где E — некоторое топологическое пространство. Это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "t"'] & & s \times E \arrow[dl, "t_E"] \\ & s & \end{tikzcd}$$

Так как гомеоморфизм h является послойным, то пространство E является дискретным. Но пространство $\mathbf{R}$ является связным, что влечет связность топологического произведения $s \times E$. Значит, пространство слоя E не может иметь двух различных элементов. Следовательно, слои $T(\zeta)$ должны быть одноэлементными. Это противоречие доказывает высказанное утверждение.

С другой стороны, обозначим символом u интервал $(-\pi, \pi)$, а символом v — окружность s с выколотой точкой $\zeta = -1$. Сужение расслоения T на дугу $v = t(u)$ является тривиальным расслоением. В роли тотального пространства выступает объединение $\mathbf{u}$ интервалов $u+2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Так как эти интервалы попарно не пересекаются, то это пространство гомеоморфно кратному пространству

$$(u)_{\mathbf{Z}} := u \times \mathbf{Z}.$$

Роль послойного гомеоморфизма h выполняет отображение, которое точке $\varphi \in u + 2\pi k$ ставит в соответствие точку $(\varphi - 2\pi k)_k := (\varphi - 2\pi k, k)$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{u} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "t"'] & & (u)_{\mathbf{Z}} \arrow[dl, "t_{\mathbf{Z}}"] \\ & v & \end{tikzcd}$$

Пусть $u_1 := u + \pi = (0, 2\pi)$, $v_1 := t(u_1)$ для любого целого k. Сужение расслоения T на дугу v_1 тоже является тривиальным расслоением. Так как $v \cup v_1 = s$, то дуги v и v_1 образуют атлас тригонометрического расслоения. Это означает, что тригонометрическое расслоение является локально тривиальным.

Пусть $u_k := u + \pi k = (-\pi + \pi k, \pi + \pi k)$, $v_k := t(u_k)$ для любого целого k. Дуга v_k совпадает с носителем кривой (которую мы обозначаем тем же символом v_k), задаваемой уравнением $\lambda(t) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)+\pi k$. Выберем в качестве непрерывного представления тригонометрического расслоения семейство

$$\mathcal{T} := \{T_k : k \in \mathbf{Z}\},$$

где

$$T_{2n}(\zeta) = \arg \zeta + 2\pi n, \ \zeta \in v_{2n},$$

$$T_{2n+1}(\zeta) = \arg_\pi \zeta + 2\pi n,\ \zeta \in v_{2n+1},$$

$\arg\zeta := \arg_0\zeta$ — единственный элемент $\operatorname{Arg}\zeta$, лежащий на полуинтервале $(-\pi,\pi]$, а $\arg_\pi\zeta$ — единственный элемент $\operatorname{Arg}\zeta$, лежащий на полуинтервале $(-\pi,\pi]+\pi=(0,2\pi]$.

Получим единообразное представление T_k для произвольного целого k. Так как

$$\arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k \in \operatorname{Arg}\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \operatorname{Arg} e^{\pi k i} = \operatorname{Arg}\zeta,$$

и при этом

$$\arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k \in (-\pi,\pi] + \pi k,$$

то

$$\theta_{k,\zeta} = \arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k.$$

Значит,

$$T_k(\zeta) = \arg\left(\zeta e^{-\pi k i}\right) + \pi k = \arg\left(\zeta\cos\pi k\right) + \pi k.$$

Следовательно,

$$T_k(\zeta) = \arg\left((-1)^k\zeta\right) + \pi k$$

для любого $\zeta \in v_k$.

Естественно считать, что каждая функция $T_k \in \mathcal{T}$ является отображением из отдельной копии s_k единичной окружности в пространство $\mathbf{R}$. Дуги v_k являются листами кратного пространства $s_{\mathbf{Z}}$. Фактор пространство $s_{\mathcal{T}}$ непрерывного представления $\mathcal{T}$ можно получить склейкой листов v_k, $k \in \mathbf{Z}$ по точкам, в которых непрерывные ветви T_k принимают одинаковые значения. Замечаем, что для любого $\zeta \in s$ имеет место соотношение

$$\arg(-\zeta) = \begin{cases} \arg\zeta - \pi, & \text{если } \operatorname{Im}\zeta \ge 0, \\ \arg\zeta + \pi, & \text{если } \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Значит, непрерывная ветвь T_{2n-1} склеивает листы v_{2n-2} и v_{2n}, то есть

$$T_{2n-1}(\zeta) = \begin{cases} T_{2n-1}(\zeta), & \text{если } \operatorname{Im}\zeta \ge 0, \\ T_{2n}(\zeta), & \text{если } \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при переходе от кратного пространства $s_{\mathbf{Z}}$ к фактор-пространству $s_{\mathcal{T}}$ все листы пространства $s_{\mathbf{Z}}$ склеиваются в один лист.

Геометрическую интерпретацию фактор-пространства $s_{\mathcal{T}}$ можно построить следующим образом. Для всякого $k \in \mathbf{Z}$ выберем отдельный экземпляр окружности s и удалим из каждого точку $\zeta = -1$. Получим линейно упорядоченное семейство

$$\{d_n := v_{2n} : n \in \mathbf{Z}\}$$

окружностей с разрезами. Совместим эти кривые пространственно и затем склеим (отождествим) конец кривой d_n с началом кривой d_{n+1}, а начало кривой d_n с концом кривой d_{n-1}. Проделаем эту операцию с каждой кривой семейства
$$\{d_n : n \in \mathbf{Z}\}$$
и представим всю процедуру законченой. В результате мы получили окружность s, наделенную внутренней структурой. Каждая точка окружности приобрела бесконечную кратность. Листы кратного пространства $s_{\mathbf{Z}}$ удобно интерпретировать как витки спирали. Это означает, что фактор-пространство $s_{\mathcal{T}}$ можно представлять себе как бесконечную спираль, все витки которой пространственно совмещены и имеют единичный радиус.

Тригонометрическое расслоение T можно рассматривать как однозначное отображение спирали $s_{\mathcal{T}}$ на прямую $\mathbf{R}$. При этом оно является биективным и взаимно непрерывным. Это означает, что тригонометрическое расслоение является гомеоморфизмом спирали $s_{\mathcal{T}}$ и прямой $\mathbf{R}$.

Параметрическое представление $\mathbf{R} \to s_{\mathcal{T}}$ построенной кривой (спирали) имеет следующий вид
$$(\zeta)_n = e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbf{R},$$
где номер $n = n(\varphi)$ листа (витка спирали) находится из условия $-\pi+2\pi n < \varphi \le \pi + 2\pi n$ с помощью формулы
$$n = -\left[\frac{\pi - \varphi}{2\pi}\right],$$
где $[x]$ — это целая часть действительного числа x. Обратное отображение $s_{\mathcal{T}} \to \mathbf{R}$ имеет вид
$$\varphi = \arg(\zeta)_n,\ (\zeta)_n \in s_{\mathcal{F}},$$
где
$$\arg(\zeta)_n := \arg\zeta + 2\pi n.$$

3.6 Полярное расслоение

Пусть $\mathbf{R}_+$ — множество положительных действительных чисел, $\mathbf{R}_+^2$ — декартово произведение $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2$. Рассмотрим однозначное отображение $p : \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{C}$, которое точке $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_+^2$ ставит в соответствие точку
$$\rho t(\varphi) = \rho e^{i\varphi} \in \mathbf{C}.$$

Обратное отображение $P : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2_+$ является расслоением над пространством $\mathbf{C}$ и называется *полярным расслоением.* В роли тотального пространства выступает пространство $\mathbf{R}^2_+$, а в роли оператора проектирования — само отображение p. Базой полярного расслоения является плоскость с выколотой точкой $\dot{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Из определения аргумента комплексного числа вытекает, что для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$P(z) = (|z|, \operatorname{Arg} z) := \{(r, \varphi) : r := |z|,\ \varphi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

Так как слои полярного расслоения дискретны, то это расслоение является накрытием.

Сужение полярного расслоения на окружность s совпадает с тригонометрическим расслоением. Тригонометрическое расслоение не является тривиальным, значит, и полярное расслоение тоже не является таковым.

С другой стороны, обозначим символом U полуполосу

$$\mathbf{R}_+ \times u = \{(r, \varphi) : r > 0,\ -\pi < \varphi < \pi\} \subseteq \mathbf{R}^2_+,$$

символом l — луч

$$\{re^{-i\pi} : r \geq 0\},$$

а символом $V := p(U) = \mathbf{R}_+ v$ — плоскость с разрезом $\mathbf{C} \setminus l$ вдоль луча l. Сужение полярного расслоения на область V является тривиальным расслоением. В роли тотального пространства выступает объединение $\mathbf{U}$ полуполос

$$U + (0, 2\pi n) = \mathbf{R}_+ \times u_{2n},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Так как эти полуполосы попарно не пересекаются, то это пространство гомеоморфно кратному пространству

$$(U)_{\mathbf{Z}} := U \times \mathbf{Z}.$$

Роль послойного гомеоморфизма h выполняет отображение, которое точке $(r, \varphi) \in U + (0, 2\pi n)$ ставит в соответствие точку $(r, \varphi - 2\pi n)_n := ((r, \varphi - 2\pi n), n)$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{U} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & (U)_{\mathbf{Z}} \arrow[dl, "p_E"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Пусть $U_k := U + (0, \pi k) = \mathbf{R}_+ \times u_k$, $V_k := p(U_k) = \mathbf{R}_+ v_k$ для любого целого k. Сужение полярного расслоения на область $V_1 = p(U_1)$ тоже является тривиальным расслоением. Так как $V_0 \cup V_1 = \dot{\mathbf{C}}$, то области V_0 и V_1 образуют атлас полярного расслоения. Это означает, что полярное расслоение является локально тривиальным.

Выберем в качестве непрерывного представления полярного расслоения P семейство

$$\mathcal{P} := \{P_k : k \in \mathbf{Z}\},$$

где векторная функция P_k определена на области V_k по правилу:

$$P_k(z) := \left(|z|, \arg\left((-1)^k \tfrac{z}{|z|}\right)\right).$$

Функции

$$T_k\,(\zeta) := \arg\left((-1)^k \zeta\right),\ k \in \mathbf{Z}$$

образуют в совокупности непрерывное представление $\mathcal{T}$ тригонометрического расслоения $T : s \to \mathbf{R}$. Для произвольного целого k функция $T_k\,(\zeta)$ осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение дуги v_k на интервал u_k, значит, векторная функция

$$P_k(z) = \left(|z|, T_k\left(\tfrac{z}{|z|}\right)\right)$$

осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение области V_k на полуполосу U_k. Естественно считать, что каждая функция $P_k \in \mathcal{P}$ является отображением из отдельной копии $\dot{\mathbf{C}}$ плоскости с выколотой точкой в пространство $\mathbf{R}^2_+$. Области V_k являются листами кратного пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{Z}}$. Фактор пространство $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ непрерывного представления $\mathcal{P}$ можно получить склейкой листов V_k, $k \in \mathbf{Z}$ по точкам, в которых непрерывные ветви $P_k \in \mathcal{P}$ принимают одинаковые значения. По свойствам функций T_k непрерывная ветвь P_{2n-1} склеивает листы V_{2n-2} и V_{2n}. Следовательно, при переходе от кратного пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{Z}}$ к фактор-пространству $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ все листы пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{Z}}$ склеиваются в один лист. Полярное расслоение P можно рассматривать как однозначное отображение фактор-пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ на полуплоскость $\mathbf{R}^2_+$. При этом оно является биективным (инъективным, сюръективным, взаимно однозначным) и взаимно непрерывным. Это означает, что полярное расслоение является гомеоморфизмом фактор-пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ на полуплоскость $\mathbf{R}^2_+$.

Геометрическую интерпретацию фактор-пространства $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ можно построить следующим образом. Для любого $n \in \mathbf{Z}$ выберем отдельный экземпляр комплексной плоскости и удалим из каждого точки луча l. Получим линейно упорядоченное семейство плоскостей с разрезами

$$\{D_n := V_{2n} : n \in \mathbf{Z}\}.$$

Совместим эти области пространственно и затем склеим (отождествим) левый край разреза области D_n с правым краем разреза области D_{n+1} (находимся на луче l и видим начало). Проделаем эту операцию с каждой из областей семейства $\{D_n : n \in \mathbf{Z}\}$ и представим всю процедуру законченой. В результате мы получили плоскость, наделенную внутренней (винтовой, ветвлящейся) структурой. Каждая точка плоскости $z \neq 0$ приобрела бесконечную кратность. Точка $z = 0$ является особой. Ее называют *точкой ветвления* (бесконечного порядка).

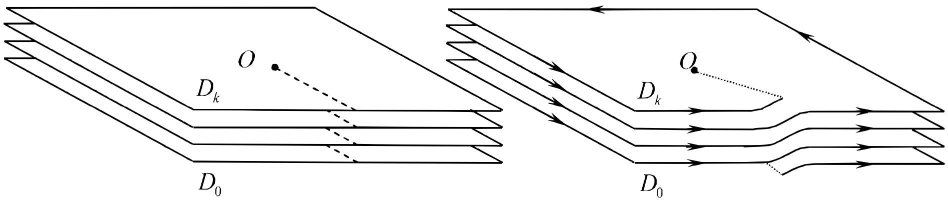

Рисунок 9

Построенная поверхность называется *римановой поверхностью полярного расслоения*. Важно заметить, что представление о римановой поверхности полярного расслоения, сформированное на основе рисунка 9, остается далеким от истинного. Достаточно сообразить, что все листы этой поверхности совершенно равноправны. Лист D_{n+1} не лежит выше листа D_n, а лист D_{n-1} не лежит ниже листа D_n.

Параметрическое представление $\mathbf{R}^2_+ \to \dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ римановой поверхности полярного расслоения имеет следующий вид

$$(z)_n = re^{i\varphi},\ (r,\varphi) \in \mathbf{R}^2_+,$$

где номер $n = n(\varphi)$ листа римановой поверхности не зависит от r и находится из условия $-\pi + 2\pi n < \varphi \leq \pi + 2\pi n$ по правилу

$$n = -\left[\frac{\pi - \varphi}{2\pi}\right].$$

Обратное отображение $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}} \to \mathbf{R}^2_+$ имеет вид

$$(r,\varphi) = (|z|, \arg(z)_n),\ (z)_n \in \dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}},$$

где

$$\arg(z)_n := \arg z + 2\pi n.$$

Глава 4

Многозначные элементарные функции комплексной переменной

4.1 Линейная многозначная функция действительной переменной

Пусть H — произвольное замкнутое множество комплексных чисел, удовлетворяющее условиям

$$H = H + H = H - H = -H.$$

Можно положить, например,

$$H := h_1\mathbf{Z} + ... + h_n\mathbf{Z},$$

где $h_1, ..., h_n \in \mathbf{C}$. В этом случае, если $h_1 = ... = h_n = 0$, то $H = \{0\}$.

Определение 4.1 *Линейной многозначной функцией действительной переменной с комплексным коэффициентом a называется непрерывная многозначная функция* $F : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$*, определённая на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:*

1) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ *для любых* $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$*;*

2) $F(x_1 - x_2) = F(x_1) - F(x_2)$ *для любых* $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$*;*

3) $F(0) = H$ *и* $ax \in F(x)$ *для любого* $x \in (0; 1]$.[1]

[1] Условие $F(0) = H$ не является ограничением. Здесь это условие следует воспринимать как определение (обозначение) $H := F(0)$.

Легко проверить, что многозначная функция

$$x \to ax + H$$

удовлетворяет условиям 1)–3). Далее убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определённых на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющих условиям 1)–3). Предположим, что непрерывная многозначная функция F удовлетворяет аксиомам 1)–3). По аксиоме 2) для всякого $x \in \mathbf{R}$ справедливы равенства $F(x) - F(x) = F(0) = H$. Это означает, что

$$F(x) = F(x) + H.$$

Пусть f — произвольная однозначная ветвь функции F, определенная всюду на $\mathbf{R}$. В силу аксиомы 3) можно считать, что $f(\frac{1}{n}) := \frac{a}{n}$ для любого натурального n. Из соотношения $F(x) = F(x) + H$ вытекает, что $f(x) + H \subseteq F(x)$ для любого $x \in \mathbf{R}$. С другой стороны, если $y \in F(x)$, то $y - f(x) \in F(x) - F(x) = H$ или $y \in f(x) + H$. Значит, $F(x) \subseteq f(x) + H$. Отсюда следует, что

$$F(x) = f(x) + H$$

для любого вещественного x. При этом в силу аксиомы 1) $F\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) + H = \frac{m}{n}a + H$ для любых натуральных m и n. Отсюда вытекает вытекает правомочность определения: $f(\frac{m}{n}) := \frac{m}{n}a$ для любых натуральных m и n. Из очевидных равенств $F(-x) = F(0) - F(x) = -f(x) + H$ вытекает, что функцию f мы вправе считать нечетной. В силу нечетности функции f имеем $f(r) := ar$ для любого рационального r. Это означает, что $F(r) = ar + H$ для любого рационального r. В силу непрерывности многозначной функции F

$$F(x) = ax + H$$

для любого вещественного x. Действительно, зафиксируем произвольные $x \in \mathbf{R}$ и $y \in F(x)$. Пусть $f_{x,y}$ — произвольная непрерывная ветвь функции F, которая принимает значение y в точке x. Тогда для любой последовательности рациональных чисел $r_n \to x$ имеем $f_{x,y}(r_n) = ar_n + h_n \to y$, где $h_n \in H$. Значит, $y = ax + h \in ax + H$, где h — предел последовательности h_n. Следовательно, $F(x) = y + H = ax + h + H = ax + H$.

Естественным непрерывным представлением линейной многозначной функции действительной переменной является множество $\{f_h : h \in H\}$, где

$$f_h(x) := ax + h$$

для любого действительного x. Все однозначные ветви f_h определены на $\mathbf{R}$ и являются дифференцируемыми функциями. Это означает, что линейная многозначная функция действительной переменной является дифференцируемой. Ее многозначная производная функция совпадает с однозначной константой $F' \equiv a$.

4.2 Линейная многозначная функция комплексной переменной

Определение 4.2 *Линейной многозначной функцией комплексной переменной с комплексным коэффициентом a называется непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определённая на множестве комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:*
1) $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$*;*
2) $F(z_1 - z_2) = F(z_1) - F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$*;*
3) $F(0) = H$ *и* $az \in F(z)$*, если* $|z| \in (0; 1]$.

Легко проверить, что многозначная функция

$$z \to az + H$$

удовлетворяет условиям 1)–3). Далее убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определённых на множестве всех комплексных чисел и удовлетворяющих условиям 1)–3).

Действительно, пусть F удовлетворяет указанным аксиомам, $z \in \mathbf{C}$, $x := \operatorname{Re} z$ и $y := \operatorname{Im} z$. Тогда

$$F(z) = F(x) + F(iy) = F_1(x) + F_2(y),$$

где F_1 — многозначная функция $\mathbf{R} \to \mathbf{C}|\, x \to F(x)$, а F_2 — многозначная функция $\mathbf{R} \to \mathbf{C}|\, x \to F(ix)$. Многозначные функции F_1 и F_2 являются непрерывными многозначными функциями вещественной переменной. Они определены всюду на $\mathbf{R}$ и удовлетворяют аксиомам 1)–2) из определения линейной многозначной функции действительной переменной. При этом

$$F_1(0) = F(0) = H,\ F_2(0) = F(0) = H$$

и $ax \in F_1(x)$, $aix \in F_2(x)$ для любых $x \in (0; 1]$. Из определения линейной многозначной функции вещественной переменной вытекает, что $F_1(x) =$

$ax + H$ и $F_2(x) = aix + H$ для любого вещественного x. Значит,

$$F(z) = F_1(x) + F_2(y) = az + H$$

для любого комплексного z.

Естественным непрерывным представлением линейной многозначной функции комплексной переменной является множество $\{f_h : h \in H\}$, где

$$f_h(z) := az + h.$$

Все однозначные ветви f_h определены на $\mathbf{C}$ и являются аналитическими (целыми) функциями. Это означает, что линейная многозначная функция комплексной переменной является аналитической (целой).

Замечаем также, что линейная многозначная функция комплексной перменной при $H \neq \{0\}$ является периодической. Если $a \neq 0$, то ее периодом является любое комплексное число из множества $\frac{1}{a}H$. Действительно, пусть $h \in H$ и $a \neq 0$. Тогда

$$F\left(z + \frac{h}{a}\right) = az + h + H = az + H = F(z).$$

Если $a = 0$, то периодом линейной многозначной функции является любое комплексное число.

4.3 Аксиоматическое определение аргумента

Аксиоматическое определение многозначной линейной функции позволяет осуществить аксиоматический подход к определению аргумента комплексного числа $\operatorname{Arg} z$, основанный на использовании его характеристических свойств:

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,\ \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$.

Определение 4.3 *Аргументом называется непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определённая на множестве $\dot{\mathbf{C}}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:*

1) $F(z_1 z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;

2) $F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = F(z_1) - F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$;

3) $F(1) = 2\pi\mathbf{Z}$ *и* $\operatorname{Im} z \in F(e^z)$, *если* $|z| \in (0, \pi]$.

Убедимся, что условия 1)–3) определяют аргумент комплексного числа однозначно. Предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяет аксиомам 1)–3). Пусть

$$F_1(x) := F(e^x),\ F_2(x) := F(e^{\pi x i})$$

для любого вещественного x. Многозначные функции F_1 и F_2 определены на $\mathbf{R}$ и непрерывны. Они удовлетворяют аксиомам линейной многозначной функции вещественной переменной. Действительно,

$$F_1(x_1 \pm x_2) = F(e^{x_1 \pm x_2}) = F(e^{x_1}) \pm F(e^{x_2}) = F_1(x_1) \pm F_1(x_2),$$

$$F_2(x_1 \pm x_2) = F(e^{\pi(x_1 \pm x_2)i}) = F(e^{\pi x_1 i}) \pm F(e^{\pi x_2 i}) = F_2(x_1) \pm F_2(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. При этом

$$F_1(0) = F(1) = 2\pi\mathbf{Z},\ F_2(0) = F(1) = 2\pi\mathbf{Z}$$

и

$$0 \in F_1(e^x) = F_1(x),\ \pi x \in F(e^{\pi x i}) = F_2(x)$$

для любого $x \in (0; 1]$. Следовательно,

$$F_1(x) = 2\pi\mathbf{Z},\ F_2(x) = \pi x + 2\pi\mathbf{Z}$$

для любого $x \in \mathbf{R}$. Если $z \neq 0$, то возможно представление

$$z = |z|\,\tfrac{z}{|z|} = e^{\ln|z|}\left(\tfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\tfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right) = e^{\ln|z|}e^{i\varphi},$$

где φ — произвольное решение системы уравнений

$$\cos\varphi = \tfrac{\operatorname{Re} z}{|z|},\ \sin\varphi = \tfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{4.1}$$

При этом

$$F(z) = F(e^{\ln|z|}) + F(e^{i\varphi}) = F_1(\ln|z|) + F_2\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) = \varphi + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Это означает, что

$$F(z) = \varphi + 2\pi\mathbf{Z},$$

то есть $\operatorname{Arg} z := F(z)$ совпадает с множеством решений системы уравнений (4.1) (что согласуется с известным определением).

Функция $\arg z$ определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и является однозначной ветвью многозначной функции $\operatorname{Arg} z$. Ее называют *главной однозначной ветвью аргумента.* Для любого целого k функция $\arg z + 2\pi k$ тоже определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и тоже является однозначной ветвью аргумента. При этом множество $\operatorname{Arg} z$ совпадает с множеством $\arg z + 2\pi\mathbf{Z}$. Однако, семейство функций

$$\{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}$$

не образует непрерывного представления многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, так как функция $z \to \arg z + 2\pi k$ испытывает скачок 2π при переходе через луч

$$l_0 := \{z \in \dot{\mathbf{C}} : \arg(-z) = 0\}$$

по часовой стрелке. Обозначим $(\operatorname{Arg} z)_{0,k}$ сужение функции $\arg z + 2\pi k$ на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль луча l_0. Функции $(\operatorname{Arg} z)_{0,k}$ являются непрерывными, но семейство

$$\{(\operatorname{Arg} z)_{0,k} : k \in \mathbf{Z}\}$$

также не образует непрерывного представления многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, так как все функции из этого семейства не определены в точках луча l_0. Обозначим $(\operatorname{Arg} z)_{\pi,k}$ сужение функции $\arg_\pi z + 2\pi k$ на плоскость $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_\pi$ с разрезом вдоль луча

$$l_\pi := \{z \in \dot{\mathbf{C}} : \arg(-z) = \pi\}.$$

Здесь $\arg_\pi z := \arg(-z) + \pi$ — единственное значение $\operatorname{Arg} z$, лежащее в полуинтервале $(-\pi, \pi] + \pi = (0; 2\pi]$. Дополненное семейство функций

$$\{(\operatorname{Arg} z)_{0,k} : k \in \mathbf{Z}\} \cup \{(\operatorname{Arg} z)_{\pi,k} : k \in \mathbf{Z}\}$$

уже образует непрерывное представление аргумента.

Рассмотрим более общий пример непрерывного представления аргумента. Пусть $\theta \in (-\pi, \pi]$. Обозначим $(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k}$ сужение функции $\arg_\theta z + 2\pi k$ на плоскость $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ с разрезом вдоль луча

$$l_\theta := \{z \in \dot{\mathbf{C}} : \arg(-z) = \theta\}.$$

Здесь $\arg_\theta z := \arg(ze^{-i\theta}) + \theta$ — единственное значение $\operatorname{Arg} z$, лежащее в полуинтервале $(-\pi, \pi] + \theta = (-\pi + \theta, \pi + \theta]$. Используя эти обозначения, рассмотренное выше непрерывное представление аргумента можно записать следующим образом

$$\left\{(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in \{0;\pi\} \times \mathbf{Z}\right\}. \tag{4.2}$$

Семейство

$$\left\{(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}\right\} \tag{4.3}$$

тоже является непрерывным представлением аргумента. Элементы этого семейства называются *непрерывными ветвями аргумента*. Функция $(\operatorname{Arg} z)_{0,0}$ называется *главной непрерывной ветвью аргумента*.

При этом для любых $\theta \in (-\pi, \pi]$ и $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ справедливы следующие соотношения

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} = (\operatorname{Arg} z)_{\theta,0} + 2\pi k = \arg_\theta z + 2\pi k =$$

$$= \begin{cases} \arg z + 2\pi\,(k+1)\,, & \text{если} \ \ \arg z \le \theta - \pi, \\ \arg z + 2\pi k, & \text{если} \ \ \theta - \pi < \arg z \le \theta + \pi, \\ \arg z + 2\pi\,(k-1)\,, & \text{если} \ \ \theta + \pi < \arg z. \end{cases}$$

Действительно, если $\arg z \in (-\pi, \theta - \pi]$, то $\arg z + 2\pi \in (\pi, \theta + \pi] \subseteq (\theta - \pi, \theta + \pi]$. Значит, по определению числа $\arg_\theta z$ имеем $\arg_\theta z = \arg z + 2\pi$. Значит,

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} = \arg z + 2\pi\,(k+1)\,.$$

Если $\arg z \in (\theta - \pi, \theta + \pi]$, то по определению числа $\arg_\theta z$ имеем $\arg_\theta z = \arg z$. Значит,

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} = \arg z + 2\pi k.$$

Наконец, если $\arg z \in (\theta + \pi, \pi]$, то $\arg z - 2\pi \in (\theta - \pi, -\pi] \subseteq (\theta - \pi, \theta + \pi]$. Значит, по определению числа $\arg_\theta z$ имеем $\arg_\theta z = \arg z - 2\pi$. Следовательно,

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} = \arg z + 2\pi\,(k-1)\,.$$

По определению полярного расслоения $P : \dot{\mathbf{C}} \to \mathbf{R}^2_+$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Pr}_2 P(z),$$

где Pr_2 — оператор проектирования $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ на вторую компоненту. Это означает, что аргумент комплексного числа можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на фактор-пространстве полярного расслоения $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$. При этом точке $(z)_n \in \dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$ соответствует действительное число $\arg(z)_n = \arg z + 2\pi n$. В разных точках слоя

$(z)_{\mathcal{P}}$ эта функция принимает разные значения, то есть $\arg(z)_n \neq \arg(z)_m$, если $n \neq m$. Следовательно, фактор-пространство непрерывного представления аргумента (4.2) совпадает с фактор-пространством полярного расслоения.

Упражнение 8 *Докажите, что фактор-пространство семейства непрерывных функций* (4.2) *совпадает с фактор-пространством семейства непрерывных функций* (4.3).

Отметим, что сужение аргумента на окружность $s := \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ является расслоением над s, так как это сужение совпадает с тригонометрическим расслоением $T : s \to \mathbf{R}$. Сам аргумент не является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$, так как значения аргумента в различных точках комплексной плоскости могут совпадать.

Важное значение имеет *интегральное представление* непрерывных ветвей аргумента:

$$(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : z \to \frac{1}{i}\int\limits_{1}^{\frac{z}{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} + 2\pi k i,$$

где интегрирование осуществляется по части кривой, задаваемой уравнением $\lambda(\varphi) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$, лежащей в плоскости с разрезом $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ (если $\theta = \pi$, то нижний предел интегрирования понимается в несобственном смысле). Действительно, для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ имеем

$$\frac{1}{i}\int\limits_{1}^{\frac{z}{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{i}\int\limits_{0}^{\arg_\theta z} \frac{\lambda'(\varphi)}{\lambda(\varphi)} d\varphi = \int\limits_{0}^{\arg_\theta z} d\varphi = \arg_\theta z = (\operatorname{Arg} z)_{\theta,0}\,.$$

4.4 Логарифмическая функция комплексной переменной

Логарифмическая функция комплексной переменной является многозначной функцией. Ее относят к основным элементарным функциям комплексной переменной, и поэтому она также требует аксиоматического определения.

Определение 4.4 *Логарифмическая функция комплексной переменной определяется как непрерывная многозначная функция* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *определённая на множестве $\dot{\mathbf{C}}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $F(z_1z_2) = F(z_1) + F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$*;*
2) $F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = F(z_1) - F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$*;*
3) $F(1) = 2\pi i\mathbf{Z}$ *и* $z \in F(e^z)$*, если* $|z| \in (0, \pi]$.

Убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определённых на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяющих условиям 1)–3). Для этого предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяет аксиомам 1)–3). Для любых вещественных r и φ имеем $F(re^{i\varphi}) = F(r) + F\left(e^{i\varphi}\right) = F_1(\ln r) + F_2\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)$, где

$$F_1(x) := F\left(e^x\right),\ F_2(x) := F\left(e^{\pi x i}\right)$$

для любого $x \in \mathbf{R}$. Комплексные многозначные функции F_1 и F_2 определены всюду на $\mathbf{R}$, являются непрерывными и удовлетворяют аксиомам линейной многозначной функции действительной переменной. Действительно,

$$F_1(x_1 \pm x_2) = F(e^{x_1 \pm x_2}) = F(e^{x_1}) \pm F(e^{x_2}) = F_1(x_1) \pm F_1(x_2),$$

$$F_2(x_1 \pm x_2) = F(e^{\pi(x_1 \pm x_2)i}) = F(e^{\pi x_1 i}) \pm F(e^{\pi x_2 i}) = F_2(x_1) \pm F_2(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$. При этом

$$F_1(0) = F(1) = 2\pi i\mathbf{Z},\ F_2(0) = F(1) = 2\pi i\mathbf{Z}$$

и

$$x \in F(e^x) = F_1(x),\ \pi x i \in F(e^{\pi x i}) = F_2(x)$$

для любого $x \in (0; 1]$. Следовательно,

$$F_1(x) = x + 2\pi i\mathbf{Z},\ F_2(x) = \pi x i + 2\pi i\mathbf{Z}$$

для любого $x \in \mathbf{R}$. Значит,

$$F(re^{i\varphi}) = F_1(\ln r) + F_2\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) = \ln r + i\varphi + 2\pi i\mathbf{Z}.$$

Если $r := |z| \neq 0$ и $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то

$$F(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

Таким образом, условия 1)–3) определяют многозначную функцию F вполне однозначно.

Логарифмическую функцию комплексной переменной принято обозначать символом Ln. При этом образ точки $z \neq 0$ обозначается $\operatorname{Ln} z$ и называется *логарифмом комплексного числа* z. Согласно этим обозначениям,

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$. Непосредственно из определения логарифмической функции комплексной переменной вытекает, что

$$\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,\ \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. При этом

$$\operatorname{Re} \operatorname{Ln} z = \ln|z|\,,\ \operatorname{Im} \operatorname{Ln} z = \operatorname{Arg} z,\ \overline{\operatorname{Ln} z} = \operatorname{Ln} \bar{z}.$$

Логарифмическая функция является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$. Действительно, если $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$ и $z_1 \neq z_2$, то в силу свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа либо $|z_1| \neq |z_2|$, и тогда $\ln|z_1| \neq \ln|z_2|$, либо $\operatorname{Arg} z_1 \cap \operatorname{Arg} z_2 = \varnothing$. В обоих случаях $\operatorname{Ln} z_1 \cap \operatorname{Ln} z_2 = \varnothing$. Это означает, что логарифмическая функция является обратной функцией к некоторой однозначной комплексной функции.

Покажем, что этой функцией является показательная функция $\exp w$. Действительно, пусть $\exp^{-1} z$ — прообраз точки $z \in \dot{\mathbf{C}}$ при отображении $w \to \exp w$. Выберем произвольный элемент $w \in \exp^{-1} z$. Тогда $z = \exp w$. При этом, с одной стороны, $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. С другой стороны, $z = e^u e^{iv}$, где $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$. Из свойства единственности показательной формы записи комплексного числа вытекает, что $|z| = e^u$, $\frac{\varphi - v}{2\pi} \in \mathbf{Z}$. Следовательно, $u = \ln|z|$, $v \in \operatorname{Arg} z$, то есть $w = u + iv \in \operatorname{Ln} z$. Это означает, что $\exp^{-1} z \subseteq \operatorname{Ln} z$. В то же время, если $w \in \operatorname{Ln} z$, то $w = \ln|z| + i\varphi$, где $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Следовательно, $\exp w = |z|e^{i\varphi} = z$, а это означает, что $\operatorname{Ln} z \subseteq \exp^{-1} z$.

Таким образом, логарифмическая функция комплексной переменной может быть определена как обратная многозначная функция к показательной функции комплексного переменного. При этом для любых $z \in \dot{\mathbf{C}}$ и $w \in \mathbf{C}$ выполняются следующие теоретико-множественные равенства

$$\operatorname{Ln} z = \exp^{-1} z,\ \operatorname{Ln}^{-1} w = \exp w,$$

$$\exp(\operatorname{Ln} z) = z,\ \operatorname{Ln}(\exp w) = w + 2\pi i\mathbf{Z}.$$

По определению полярного расслоения для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$\operatorname{Ln} z = \ln \operatorname{Pr}_1 P(z) + i \operatorname{Pr}_2 P(z),$$

где $\operatorname{Pr}_1, \operatorname{Pr}_2$ — операторы проектирования $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ на первую и вторую компоненту соответственно. Следовательно, логарифмическую функцию комплексной переменной можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на фактор-пространстве полярного расслоения $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$. При этом точке $(z)_n \in D_n$ соответствует комплексное число

$$\ln|z| + i\arg(z)_n = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi n) = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z)_{0,n}\,.$$

В разных точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ функции

$$\ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z)_{0,n}\,,\ n \in \mathbf{Z},\ z \notin l_0,$$

принимают разные значения. Тот же вывод справедлив для функций

$$\ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z)_{\pi,n}\,,\ n \in \mathbf{Z},\ z \notin l_\pi.$$

Следовательно, фактор-пространство непрерывного представления логарифмической функции

$$\Big\{\ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in \{0; \pi\} \times \mathbf{Z}\Big\}$$

совпадает с фактор-пространством полярного расслоения. Однозначная функция

$$(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} := \ln|z| + (\operatorname{Arg} z)_{\theta,k}\,,\ z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta,$$

где $(\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}$, тоже является непрерывной ветвью логарифмической функции. При этом совокупность

$$\Big\{(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}\Big\}$$

тоже является непрерывным представлением логарифмической функции. Легко увидеть, что фактор-пространства этих непрерывных представлений логарифмической функции совпадают.

Комплексное число $\ln|z| + i\arg z$ называется *главным значением логарифма* $\operatorname{Ln} z$ и обозначается $\ln z$. Однозначную функцию

$$\ln z := \ln|z| + i\arg z$$

принято называть *главной однозначной ветвью* логарифмической функции. Непрерывная функция

$$(\operatorname{Ln} z)_{0,0} = \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z)_{0,0}$$

является сужением главной однозначной ветви логарифмической функции на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси и называется *главной непрерывной ветвью* логарифмической функции. Для других непрерывных ветвей логарифмической функции справедливы следующие очевидные представления:

$$(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} = (\operatorname{Ln} z)_{\theta,0} + 2\pi ki = \ln|z| + i\arg_\theta z + 2\pi ki =$$

$$= \begin{cases} \ln z + 2\pi\,(k+1)\,i, & \text{если} \quad \arg z \le \theta - \pi, \\ \ln z + 2\pi ki, & \text{если} \quad \theta - \pi < \arg z \le \theta + \pi, \\ \ln z + 2\pi\,(k-1)\,i, & \text{если} \quad \theta + \pi < \arg z, \end{cases}$$

для всех $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$.

Непрерывная ветвь $(\operatorname{Ln} z)_{\theta,0}$ отображает плоскость с разрезом $D := \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно на открытую полосу

$$G_0 := \{w := u + iv : u \in \mathbf{R},\ v \in (\theta - \pi, \theta + \pi)\}.$$

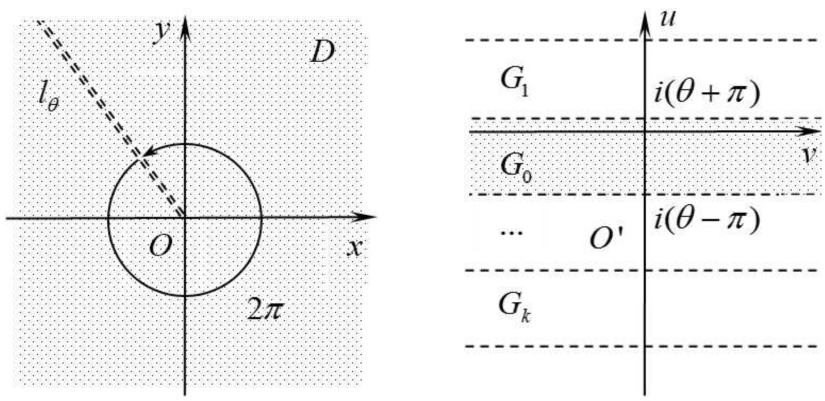

Рисунок 10

Непрерывная ветвь $(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}$ отображает плоскость с разрезом $D := \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно на открытую полосу

$$G_k := \{w := u + iv : u \in \mathbf{R},\ v \in (\theta - \pi, \theta + \pi) + 2\pi k\}$$

в соответствии с рисунком 10.

При этом функция $w = (\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}$ является обратной к сужению функции $z = e^w$ на область G_k. По теореме о производной обратной функции

$$((\operatorname{Ln} z)_{\theta,k})' = \left.\frac{1}{(e^w)'}\right|_{(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}} = \left.\frac{1}{e^w}\right|_{(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}} = \frac{1}{z}.$$

Таким образом, непрерывная ветвь $(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k}$ является аналитической функцией, ее производная функция отлична от нуля в любой точке области D. Отсюда вытекает, в частности, вывод о том, что отображение $D \to G_k$, осуществляемое этой функцией, является конформным.

Важное значение имеет *интегральное представление* непрерывных ветвей логарифмической функции:

$$(\operatorname{Ln} z)_{\theta,k} : z \to \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} + 2\pi k i,$$

где интегрирование осуществляется по любой простой, спрямляемой кривой l, с началом в точке 1 и концом в точке z, лежащей в плоскости с разрезом $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ (если $\theta = \pi$, то нижний предел интегрирования понимается в несобственном смысле). Справедливость интегрального представления непрерывных ветвей логарифмической функции вытекает из интегральной теоремы Коши и следующих соотношений:

$$\int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^{\frac{z}{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{\frac{z}{|z|}}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = i\,(\operatorname{Arg} z)_{\theta,0} + \ln|z|\,,$$

где интегирование от 1 до $\frac{z}{|z|}$ осуществляется по кривой, задаваемой уравнением $z(\varphi) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$, а интегрирование от $\frac{z}{|z|}$ до z осуществляется по кривой $z(r) = r\frac{z}{|z|}$, $r \in [0, +\infty)$. Действительно, для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$ имеем:

$$\int\limits_1^{\frac{z}{|z|}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_0^{\arg_\theta z} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi = i \int\limits_0^{\arg_\theta z} d\varphi = i \arg_\theta z = i\,(\operatorname{Arg} z)_{\theta,0}\,,$$

$$\int\limits_{\frac{z}{|z|}}^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^{|z|} \frac{\frac{z}{|z|}dr}{r\frac{z}{|z|}} = \int\limits_1^{|z|} \frac{dr}{r} = \ln|z|\,.$$

4.5 Многозначная степенная функция комплексной переменной

Определение 4.5 *Многозначная степенная функция с комплексным показателем* $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0; 1\}$ *определяется как непрерывная многозначная функция* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *определённая на множестве* $\dot{\mathbf{C}}$ *всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $F(z_1 z_2) = F(z_1)F(z_2)$ *для любых* $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$*;*

2) $F\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{F(z_1)}{F(z_2)}$ *для любых* $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$*;*

3) $F(1) = e^{\alpha \operatorname{Ln} 1}$ *и* $e^{\alpha z} \in F(e^z)$, *если* $|z| \in (0; 1]$.

Убедимся, что не существует двух различных непрерывных многозначных функций, определённых на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяющих условиям 1)–3). Предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\dot{\mathbf{C}}$ и удовлетворяет аксиомам 1)–3). Из аксиомы 2) вытекает, что $0 \notin F(z)$, то есть $F(z) \subseteq \dot{\mathbf{C}}$ для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$. Пусть

$$\Phi(z) := \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^z),\ z \in \mathbf{C}.$$

Многозначная функция $z \to \Phi(z)$ удовлетворяет аксиомам линейной многозначной функции комплексной переменной. Действительно,

$$\Phi(z_1 \pm z_2) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^{z_1 \pm z_2}) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^{z_1}) \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^{z_2}) = \Phi(z_1) \pm \Phi(z_2)$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. При этом

$$\Phi(0) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(1) = \frac{1}{\alpha} (\alpha \operatorname{Ln} 1 + 2\pi i \mathbf{Z}) = 2\pi i \mathbf{Z} + \frac{2\pi i}{\alpha} \mathbf{Z}$$

и $z \in \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ln} F(e^z) = \Phi(z)$, если $|z| \in (0; 1]$. Значит,

$$\Phi(z) = z + 2\pi i \mathbf{Z} + \frac{2\pi i}{\alpha} \mathbf{Z}$$

для любого комплексного z. Логарифмическая функция комплексной переменной является обратной многозначной функцией к показательной функции комплексной переменной, значит, $F(e^z) = \exp(\alpha \Phi(z)) = \exp(\alpha z + 2\pi \alpha i \mathbf{Z})$ для любого $z \in \mathbf{C}$ и

$$F(z) = F(e^{\operatorname{Ln} z}) = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$. Таким образом, условия 1)–3) определяют многозначную функцию F вполне однозначно.

Образ $\exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$ точки $z \neq 0$ при отображении многозначной степенной функцией будем обозначать $\operatorname{Pow}^\alpha z$ и называть *степенью комплексного числа z с комплексным показателем* $\alpha \neq 0$. Согласно этим обозначениям,

$$\operatorname{Pow}^\alpha(z_1 z_2) = \operatorname{Pow}^\alpha z_1 \operatorname{Pow}^\alpha z_2,$$

$$\operatorname{Pow}^\alpha \frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{Pow}^\alpha z_1}{\operatorname{Pow}^\alpha z_2}$$

для любых $z_1, z_2 \in \dot{\mathbf{C}}$. При этом для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$\operatorname{Pow}^\alpha z := \exp\left(\alpha \operatorname{Ln} z\right) = \exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \operatorname{Arg} z\right),$$

$$|\operatorname{Pow}^\alpha z| = \exp(a \ln|z| - b \operatorname{Arg} z), \ \operatorname{Arg} \operatorname{Pow}^\alpha z = b \ln|z| + a \operatorname{Arg} z,$$

$$\operatorname{Pow}^a z = \exp(a \ln|z| + ia \operatorname{Arg} z), \ \operatorname{Pow}^{ib} z = \exp(ib \ln|z| - b \operatorname{Arg} z),$$

где $a := \operatorname{Re}\alpha$, $b := \operatorname{Im}\alpha$.

Замечаем, что

$$\operatorname{Pow}^\alpha z \operatorname{Pow}^\beta z = \exp(\alpha \ln z + 2\pi i\alpha \mathbf{Z}) \exp(\beta \ln z + 2\pi i b \mathbf{Z}) =$$

$$= \exp((\alpha + \beta) \ln z + 2\pi i\,(\alpha \mathbf{Z} + \beta \mathbf{Z})).$$

Так как, например, при $\alpha = 1$ и $\beta = i$ включение

$$\alpha \mathbf{Z} + \beta \mathbf{Z} \subseteq (\alpha + \beta)\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$$

не выполняется, то при таких значениях α и β не выполняются включения

$$\exp 2\pi i(\alpha \mathbf{Z} + \beta \mathbf{Z}) \subseteq \exp 2\pi i(\alpha + \beta)\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{Pow}^\alpha z \operatorname{Pow}^\beta z \subseteq \operatorname{Pow}^{\alpha+\beta} z.$$

Это означает, что привычное для степенной функции действительной переменной правило $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ не выполняется для многозначной степенной функции комплексной переменной. Однако, для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ справедливо включение $(\alpha + \beta)\mathbf{Z} \subseteq \alpha \mathbf{Z} + \beta \mathbf{Z}$, значит, справедливо и включение

$$\operatorname{Pow}^\alpha z \subseteq \operatorname{Pow}^a z \operatorname{Pow}^{ib} z.$$

Если $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbf{Z}$, то многозначная степенная функция комплексной переменной $z \to \operatorname{Pow}^{\alpha} z$ не является расслоением над $\dot{\mathbf{C}}$, так как образы различных точек из $\dot{\mathbf{C}}$ могут совпадать. Действительно, если

$$z_1 := |z_1|\, e^{i\varphi},\ \ z_2 := |z_1| \exp\left(\frac{2\pi b}{\alpha\bar{\alpha}}\right) \exp i \left(\varphi + \frac{2\pi a}{\alpha\bar{\alpha}}\right),$$

то

$$\operatorname{Pow}^{\alpha} z_2 = \exp\left(\alpha \ln|z_2| + i\alpha \operatorname{Arg} z_2\right) =$$

$$= \exp\left(\alpha \ln|z_1| + \frac{2\pi b}{\bar{\alpha}} + i\alpha \operatorname{Arg} z_1 + i\frac{2\pi a}{\bar{\alpha}}\right) = \operatorname{Pow}^{\alpha} z_1.$$

При этом

$$\frac{z_2}{z_1} = \exp\frac{2\pi i}{\alpha} \notin \exp(2\pi i \mathbf{Z}) = \{1\}.$$

Это означает, что многозначная степенная функция с комплексным показателем $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbf{Z}$ не является обратной к однозначной функции.

Упражнение 9 *Покажите, что многозначная степенная функция комплексной переменной* $z \to \operatorname{Pow}^{\alpha} z$ *с комплексным показателем* $\alpha := n^{-1}$, *где* $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0; 1\}$ *является расслоением над* $\dot{\mathbf{C}}$ *и ее обратная функция совпадает с сужением на множество* $\dot{\mathbf{C}}$ *рациональной функции* $z \to z^n$.

По определению полярного расслоения $P : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2_+$ для любого $z \in \dot{\mathbf{C}}$

$$\operatorname{Pow}^{\alpha} z = \exp\left(\alpha \ln \operatorname{Pr}_1 P(z) + i\alpha \operatorname{Pr}_2 P(z)\right)$$

где $\operatorname{Pr}_1, \operatorname{Pr}_2$ — операторы проектирования $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ на первую и вторую компоненту соответственно. Следовательно, многозначную степенную функцию комплексной переменной с комплексным показателем α можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на фактор-пространстве полярного расслоения $\dot{\mathbf{C}}_{\mathcal{P}}$. При этом точке $(z)_n \in D_n$ соответствует комплексное число

$$\exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \arg{(z)}_n\right) = \exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha\left(\arg z + 2\pi n\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \left(\operatorname{Arg} z\right)_{0,n}\right).$$

Пусть $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Q}$. В разных точках слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ функции

$$\exp\left(\alpha \ln|z| + i\alpha \left(\operatorname{Arg} z\right)_{0,n}\right),\ \ n \in \mathbf{Z},\ \ z \notin l_0,$$

принимают разные значения. То же верно и для функций

$$\exp\Big(\alpha\ln|z|+i\alpha\,(\operatorname{Arg} z)_{\pi,n}\Big),\ n\in\mathbf{Z},\ z\notin l_\pi.$$

Следовательно, фактор-пространство непрерывного представления многозначной степенной функции

$$\Big\{\exp\Big(\alpha\ln|z|+i\alpha\,(\operatorname{Arg} z)_{0,k}\Big):(\theta,k)\in\{0;\pi\}\times\mathbf{Z}\Big\}$$

совпадает с фактор-пространством полярного расслоения. Однозначная функция

$$(\operatorname{Pow}^\alpha z)_{\theta,k}:=\exp\Big(\alpha\ln|z|+i\alpha\,(\operatorname{Arg} z)_{\theta,k}\Big),\ z\in\dot{\mathbf{C}}\setminus l_\theta,$$

где $(\theta,k)\in(-\pi,\pi]\times\mathbf{Z}$, тоже является непрерывной ветвью многозначной степенной функции. При этом совокупность

$$\Big\{(\operatorname{Pow}^\alpha z)_{\theta,k}:(\theta,k)\in(-\pi,\pi]\times\mathbf{Z}\Big\} \tag{4.4}$$

также является непрерывным представлением многозначной степенной функции. Заметим, что фактор-пространства этих непрерывных представлений совпадают.

Комплексное число $\exp(\alpha\ln|z|+i\alpha\arg z)$ называется *главным значением степени* $\operatorname{Pow}^\alpha z$ и обозначается $\operatorname{pow}^\alpha z$. Однозначная функция

$$\operatorname{pow}^\alpha z:=\exp(\alpha\ln|z|+i\alpha\arg z)=\exp(\alpha\ln z)$$

называется *главной однозначной ветвью многозначной степенной функции.* Непрерывная функция

$$(\operatorname{Pow}^\alpha z)_{0,0}=\exp\Big(\alpha\ln|z|+i\alpha\,(\operatorname{Arg} z)_{0,0}\Big)$$

является сужением главной ветви степенной функции на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}}\setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси и называется *главной непрерывной ветвью многозначной степенной функции.* Для других непрерывных ветвей многозначной степенной функции справедливы следующие очевидные представления:

$$(\operatorname{Pow}^\alpha z)_{\theta,k}=(\operatorname{Pow}^\alpha z)_{\theta,0}\exp(2\pi i\alpha k)=$$

$$= \begin{cases} \operatorname{pow}^{\alpha} z \times \exp 2\pi i\alpha\,(k+1)\,, & \text{если} \ \ \arg z \leq \theta - \pi, \\ \operatorname{pow}^{\alpha} z \times \exp\,(2\pi i\alpha k)\,, & \text{если} \ \ \theta - \pi < \arg z \leq \theta + \pi, \\ \operatorname{pow}^{\alpha} z \times \exp\,(2\pi i\alpha\,(k-1))\,, & \text{если} \ \ \theta + \pi < \arg z, \end{cases}$$

для всех $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$. Отсюда и из очевидных соотношений

$$\left(e^{\alpha \ln z}\right)' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \ln z} = \alpha e^{(\alpha - 1)\ln z}$$

вытекает, что непрерывная ветвь $z \to (\operatorname{Pow}^{\alpha} z)_{\theta,k}$ является аналитической функцией и

$$((\operatorname{Pow}^{\alpha} z)_{\theta,k})' = \begin{cases} \alpha(\operatorname{Pow}^{\alpha-1} z)_{\theta,k}, & \text{если} \ \ \alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0;1\}, \\ \alpha z, & \text{если} \ \ \alpha = 2, \end{cases}$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$.

4.6 Дробно-степенная функция комплексной переменной

При $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \{0;1\}$ воспользуемся представлением $\alpha = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ и НОД$(p,q) = 1$. Степень $\operatorname{Pow}^{\alpha} z$ числа $z \in \dot{\mathbf{C}}$ в рассматриваемом случае принято обозначать $z^{\frac{p}{q}}$. Многозначную функцию $z \to z^{\frac{p}{q}}$ принято называть *дробно-степенной функцией*. Как уже говорилось, дробно-степенную функцию можно рассматривать как непрерывную однозначную функцию, определенную на фактор-пространстве полярного расслоения. Точке $(z)_n \in D_n$ она ставит в соответствие комплексное число

$$\exp\left(\tfrac{p}{q}\ln|z| + i\tfrac{p}{q}\arg{(z)}_n\right) = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(\tfrac{p}{q} i \arg z + 2\pi \tfrac{pn}{q} i\right) =$$

$$= |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\tfrac{p}{q}\,(\operatorname{Arg} z)_{0,n}\right).$$

Из свойства единственности тригонометрической формы записи комплексного числа вытекает, что функции

$$|z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\tfrac{p}{q}\,(\operatorname{Arg} z)_{0,n}\right),\ n \in \mathbf{Z},\ z \notin l_0,$$

принимают разные значения в точках $(z)_0, ...(z)_{q-1}$ слоя $(z)_{\mathcal{P}}$ и принимают одинаковые значения в точках $(z)_k, (z)_{k+q} \in (z)_{\mathcal{P}}$ при любом целом k. Тот же вывод справедлив и по отношению к функциям

$$|z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\frac{p}{q}\left(\operatorname{Arg} z\right)_{\pi,n}\right),\ n \in \mathbf{Z},\ z \notin l_\pi,$$

Значит, фактор-пространство непрерывного представления дробно-степенной функции

$$\left\{|z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\frac{p}{q}\left(\operatorname{Arg} z\right)_{\theta,n}\right) : (\theta, k) \in \{0;\pi\} \times \{0, ..., q-1\}\right\}$$

получается из фактор-пространства полярного расслоения топологическим отождествлением (склейкой) точек $(z)_k, (z)_{k+n} \in (z)_{\mathcal{P}}$ при любом $z \in \dot{\mathbf{C}}$ и любом целом k. Однозначная функция

$$\left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{\theta,k} := |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\frac{p}{q}\left(\operatorname{Arg} z\right)_{\theta,n}\right),\ z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta,$$

где $(\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \mathbf{Z}$, тоже является непрерывной ветвью дробно-степенной функции. При этом совокупность

$$\left\{\left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{\theta,k} : (\theta, k) \in (-\pi, \pi] \times \{0, ..., q-1\}\right\}$$

является непрерывным представлением многозначной степенной функции. Фактор-пространства этих непрерывных представлений совпадают.

Простое представление об этом пространстве можно получить следующим образом. Для любого $k \in \{0, ..., q-1\}$ выберем отдельный экземпляр комплексной плоскости и удалим из каждого точки луча l_0. Получим линейно упорядоченное семейство плоскостей с разрезами $\{D_k : k = 0, ..., q-1\}$. Совместим эти области пространственно и затем склеим левый край разреза области D_k с правым краем разреза области D_{k+1} (находимся на луче l_0 и видим начало). Проделаем эту операцию с каждой из областей семейства $\{D_k : k = 0, ..., q-2\}$. Затем склеим левый край разреза области D_{n-1} с правым краем разреза области D_0. В результате мы получили плоскость, наделенную внутренней структурой. Каждая точка плоскости $z \neq 0$ приобрела кратность q. Точку $z = 0$ является особой и ее называют точкой ветвления (порядка q). Построенную поверхность называют *римановой поверхностью дробно-степенной функции*. Ее условное изображение содержит рисунок 11.

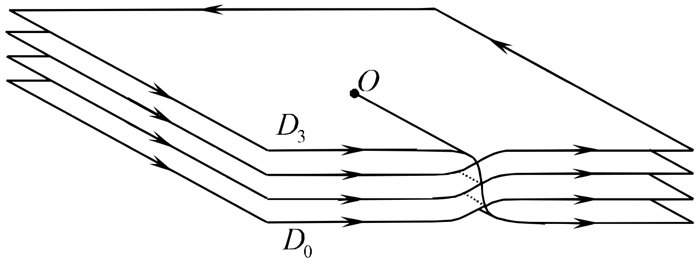

Рисунок 11

Если продолжить дробно-степенную функцию на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbf{C}}$, положив $\infty^{\frac{p}{q}} = \infty$, то листы римановой поверхности склеятся еще и в бесконечности. Точнее, в этом случае каждый лист римановой поверхности заменяется отдельным экземпляром римановой сферы. При этом все сферы попарно склеены по берегам разрезов, произведенных вдоль выбранного меридиана. Эта поверхность имеет уже две точки ветвления 0 и ∞. Обе точки ветвления имеют порядок q. Возникшую ситуацию проиллюстрируем рисунком 12.

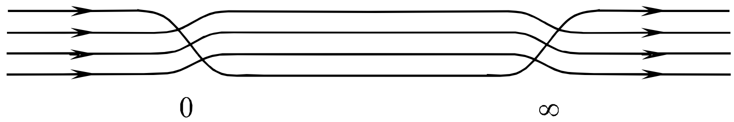

Рисунок 12

Комплексное число $|z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\frac{p}{q}\arg z\right)$ называется *главным значением степени дробной степени* $z^{\frac{p}{q}}$ и обозначается $\sqrt[q]{z^p}$. Однозначная функция

$$\sqrt[q]{z^p} := |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\frac{p}{q}\arg z\right), \ z \in \dot{\mathbf{C}},$$

называется *главной однозначной ветвью дробно-степенной функции*. Легко убедиться, что что при $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cap (0;1)$ главная однозначная ветвь $z \to w = \sqrt[q]{z^p}$ дробно-степенной функции отображает взаимно однозначно плоскость с разрезом

$$D := \dot{\mathbf{C}} \setminus l_0 = \{z : -\pi < \arg z < \pi\}$$

вдоль отрицательной части действительной оси на уголовую область

$$G_0 := \left\{w : -\tfrac{p}{q}\pi < \arg w < \tfrac{p}{q}\pi\right\}.$$

Непрерывная функция

$$\left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{0,0} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left(i\tfrac{p}{q}\left(\operatorname{Arg} z\right)_{0,0}\right),\ z \in \dot{\mathbf{C}}\backslash l_0,$$

является сужением главной однозначной ветви дробно-степенной функции на плоскость с разрезом $\dot{\mathbf{C}} \setminus l_0$ вдоль отрицательной части действительной оси и называется *главной непрерывной ветвью дробно-степенной функции.* Для других непрерывных ветвей дробно-степенной функции справедливы следующие представления:

$$\left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{\theta,k} = \left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{\theta,0} \exp\left(\tfrac{2\pi kp}{q} i\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[q]{z^p} \exp\left(\frac{2\pi(k+1)p}{q} i\right), & \text{если} \ \ \arg z \le \theta - \pi, \\ \sqrt[q]{z^p} \exp\left(\frac{2\pi kp}{q} i\right), & \text{если} \ \ \theta - \pi < \arg z \le \theta + \pi, \\ \sqrt[q]{z^p} \exp\left(\frac{2\pi(k-1)p}{q} i\right), & \text{если} \ \ \theta + \pi < \arg z, \end{cases}$$

для всех $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$. Все непрерывные ветви являются аналитическими функциями и

$$\left((z^{\frac{p}{q}})_{\theta,k}\right)' = \begin{cases} \frac{p}{q}\left(z^{\frac{p}{q}-1}\right)_{\theta,k}, & \text{если} \ \ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \setminus \{0;1;2\}, \\ 2z, & \text{если} \ \ \frac{p}{q} = 2, \end{cases}$$

для любого $z \in \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta$. Если $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cap (0;1)$, то непрерывная ветвь $z \to w = \left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{\theta,0}$ дробно-степенной функции отображает взаимно однозначно и конформно плоскость с разрезом

$$D := \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta = \{z : \theta - \pi < \arg_\theta z < \theta + \pi\}$$

на уголовую область

$$G_0 := \left\{w : \varphi - \tfrac{p}{q}\pi < \arg_\varphi w < \varphi + \tfrac{p}{q}\pi\right\},$$

где $\varphi := \frac{p}{q}\theta$, в соответствии с рисунком 13.

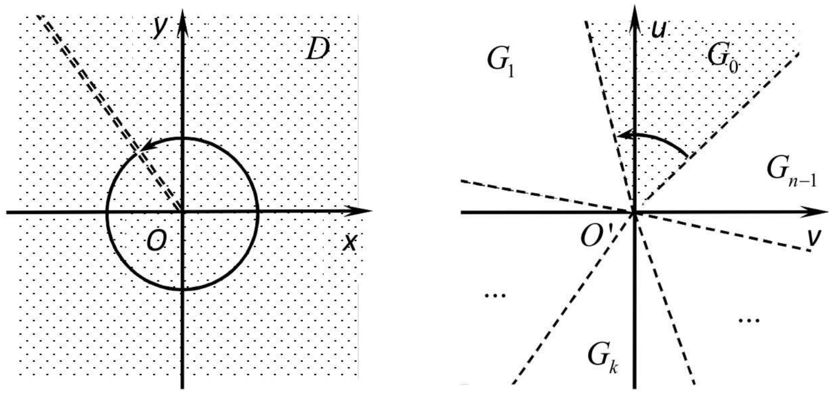

Рисунок 13

Упражнение 10 *Покажите, что при* $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \cap (-1; 0)$ *непрерывная ветвь* $z \to w = \left(z^{\frac{p}{q}}\right)_{\theta,0}$ *дробно-степенной функции отображает взаимно однозначно и конформно плоскость с разрезом*

$$D := \dot{\mathbf{C}} \setminus l_\theta = \{z : \theta - \pi < \arg_\theta z < \theta + \pi\}$$

на угловую область

$$G_0 := \left\{w : \varphi + \tfrac{p}{q}\pi < \arg_\varphi z < \varphi - \tfrac{p}{q}\pi\right\},$$

где $\varphi := \frac{p}{q}\theta$.

4.7 Многозначная показательная функция комплексной переменной

Предположим, что непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, определена на множестве всех комплексных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(z_1 + z_2) = F(z_1)F(z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

2) $F(z_1 - z_2) = \frac{F(z_1)}{F(z_2)}$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

3) $F(z) \subseteq \operatorname{Pow}^z e$, если $|z| \in (0; \frac{\pi}{2}]$.

Тогда из условия 3) вытекает, что $F(1) \subseteq \operatorname{Pow}^1 e = \{e\}$. Из условий 2) и 3) вытекает, что

$$F(0) = F(1-1) = \frac{F(1)}{F(1)} = \frac{\operatorname{Pow}^1 e}{\operatorname{Pow}^1 e} = \frac{e}{e} = 1.$$

Значит,

$$\frac{F(z)}{F(z)} = F(z - z) = F(0) = 1$$

для любого $z \in \mathbf{C}$. Это означает, что функция F является однозначной. При этом в силу аксиомы 2) $F(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Отметим еще, что в силу аксиомы 3) для любого $y \in (0, \frac{\pi}{2}]$ выполняются соотношения

$$\operatorname{Re} F\,(yi) \in \operatorname{Re} \operatorname{Pow}^{yi} e = \operatorname{Re} \exp\,(yi \operatorname{Ln} e) =$$

$$= \operatorname{Re} \exp yi\,(1 + 2\pi i\mathbf{Z}) = \exp\,(2\pi y\mathbf{Z}) \cos y.$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname{Re} F\,(yi) > 0$ для любого $y \in (0; \frac{\pi}{2})$.

По аксиоме 3) значение функции F в точке $z = \frac{\pi}{2}i$ лежит в множестве

$$\operatorname{Pow}^{\frac{\pi}{2}i} e = \exp\left(\frac{\pi}{2} i \operatorname{Ln} e\right) = i \exp \pi^2 \mathbf{Z}.$$

Значит, при некотором $k \in \mathbf{Z}$ выполняется равенство

$$F\left(\frac{\pi}{2} i\right) = i \exp \pi^2 k.$$

Рассмотрим однозначную функцию

$$F_k(z) := F(z) \exp 2\pi i k z.$$

Эта функция определена на всей комплексной плоскости и удовлетворяет следующим условиям:

$$F_k(z_1 + z_2) = F_k(z_1) F_k(z_2)$$

для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$,

$$F_k(1) = F(1) = e,$$

$$F_k\left(\frac{\pi}{2} i\right) = F\left(\frac{\pi}{2} i\right) \exp\left(-\pi^2 k\right) = i$$

и

$$\operatorname{Re} F_k(yi) = \exp\,(-2\pi k y) \operatorname{Re} F\,(yi) > 0$$

для любого $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. По определению показательной функции комплексной переменной $F_k(z) = \exp z$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Следовательно, $F(z) \exp 2\pi i k z = \exp z$ и

$$F(z) = \exp\,(z + 2\pi i k z)$$

для любого $z \in \mathbf{C}$.

Таким образом, условия 1)–3) определяют на $\mathbf{C}$ семейство однозначных непрерывных функций $z \to (\operatorname{Exp} z)_k$, где

$$(\operatorname{Exp} z)_k := \exp(z + 2\pi ikz)\,,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Это означает, что условия 1)–3) определяют многозначную функцию $z \to \operatorname{Exp} z$, где

$$\operatorname{Exp} z := \{(\operatorname{Exp} z)_k : k \in \mathbf{Z}\} = e^{z \operatorname{Ln} e} = \operatorname{Pow}^z e,$$

которую принято называть *многозначной показательной функцией комплексной переменной с основанием e*. Из определения многозначной показательной функции вытекает, что для ее непрерывных ветвей справедливы следующие соотношения:

$$(\operatorname{Exp}(z_1 + z_2))_k = (\operatorname{Exp} z_1)_k (\operatorname{Exp} z_2)_k\,,$$

$$(\operatorname{Exp}(z_1 - z_2))_k = \frac{(\operatorname{Exp} z_1)_k}{(\operatorname{Exp} z_2)_k},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $a \in \mathbf{C} \setminus \{0; 1\}$. Предположим, что непрерывная многозначная функция $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ удовлетворяет условиям 1)–2) и условию

3)$'$ $F(z) \subseteq \operatorname{Pow}^z a$, если $|z| \in (0; \frac{\pi}{2}]$.

Условия 1)–2) и 3)$'$ определяют на $\mathbf{C}$ семейство однозначных непрерывных функций $z \to (\operatorname{Exp}_a z)_k$, где

$$(\operatorname{Exp}_a z)_k := e^{z(\ln a + 2\pi ik)},\ \ k \in \mathbf{Z}$$

(убедитесь в этом). Значит, условия 1)–2) и 3)$'$ определяют на $\mathbf{C}$ многозначную непрерывную функцию $z \to \operatorname{Exp}_a z$, где

$$\operatorname{Exp}_a z := \{(\operatorname{Exp}_a z)_k : k \in \mathbf{Z}\} = e^{z \operatorname{Ln} a} = \operatorname{Pow}^z a,$$

которую принято называть *многозначной показательной функцией комплексной переменной с основанием $a \in \mathbf{C} \setminus \{0; 1\}$*. Из определения этой функции вытекает, что для ее непрерывных ветвей справедливы тождества:

$$(\operatorname{Exp}_a(z_1 + z_2))_k = (\operatorname{Exp}_a z_1)_k (\operatorname{Exp}_a z_2)_k\,,$$

$$(\operatorname{Exp}_a(z_1 - z_2))_k = \frac{(\operatorname{Exp}_a z_1)_k}{(\operatorname{Exp}_a z_2)_k},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Так как $a \neq 1$, то

$$\ln a + 2\pi ik = \ln|a| + i\,(\arg a + 2\pi k) \neq 0$$

для любого $k \in \mathbf{Z}$. Если $z_1 \in \mathbf{C}$ и

$$z_2 := z_1 + \frac{2\pi i}{\ln a + 2\pi ik},$$

то

$$(\mathrm{Exp}_a\, z_2)_k = \exp z_2\,(\ln a + 2\pi ik) = \exp z_1\,(\ln a + 2\pi ik) = (\mathrm{Exp}_a\, z_1)_k\,.$$

Это означает, что непрерывная ветвь $z \to (\mathrm{Exp}_a\, z)_k$ является периодической с основным периодом $\frac{2\pi i}{\ln a + 2\pi ik} \neq 0$. В силу периодичности непрерывных ветвей многозначной показательной функции её образы $\mathrm{Exp}_a\, z$ и $\mathrm{Exp}_a\left(z + \frac{2\pi i}{\ln a}\right)$ различных точек из $\mathbf{C}$ пересекаются. Значит, показательная функция $z \to \mathrm{Exp}_a\, z$ не является расслоением над $\mathbf{C}$ и не может быть определена как обратная к однозначной функции.

Непрерывная ветвь $z \to (\mathrm{Exp}_a\, z)_0$ называется *главной непрерывной ветвью* многозначной показательной функции с основанием a. Ее значение в точке $z \in \mathbf{C}$ называется *главным значением* многозначной показательной функции и обозначается $\exp_a z$. Если $a = e$, то главная непрерывная ветвь $z \to (\mathrm{Exp}\, z)_0$ многозначной показательной функции с основание e совпадает с (однозначной) показательной функцией комплексной переменной $z \to \exp z$.

4.8 Обратные тригонометрические функции

Функция

$$z \to \operatorname{Arcsin} z$$

определяется как обратная к функции $z \to \sin z$. Найдем прообраз точки $w_0 \neq 0$ при отображении $z \to \sin z$. Пусть $w_0 = \sin z_0$. Воспользуемся определением тригонометрической функции и получим

$$w_0 = \frac{t_0 - t_0^{-1}}{2i},$$

где $t_0 := e^{iz_0}$. Откуда вытекает, что

$$t_0^2 - 2iw_0t_0 - 1 = 0,$$

то есть
$$t_0 \in iw_0 + (1-w_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$
Следовательно,
$$z_0 \in \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(iw_0 + (1-w_0^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$
Это значит, что определяемая нами функция $z \to \mathrm{Arcsin}\, z$ является многозначной функцией (композицией функций, из которых одна является бесконечнозначной и еще одна — двузначной). Комплексному числу z она ставит в соответствие множество комплексных чисел:
$$\mathrm{Arcsin}\, z := \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\left(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Выделяя главные ветви функций $z \to \mathrm{Ln}\, z$ и $z \to z^{\frac{1}{2}}$, мы выделяем главную ветвь арксинуса: $z \to \arcsin z$, где
$$\arcsin z := \frac{1}{i}\ln\left(iz - \sqrt{1-z}\sqrt{1+z}\right).$$

Пусть $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Функция $z \to \arcsin z$ отображает кривую, задаваемую уравнением
$$z = \sin(\varphi + it),\ t \in (-\infty, +\infty),$$
на прямую
$$w = \varphi + it,\ t \in (-\infty, +\infty).$$
Лучи
$$z = \sin(-\frac{\pi}{2} + it),\ t \in [0, +\infty)$$
и
$$z = \sin(\frac{\pi}{2} + it),\ t \in (-\infty, 0)$$
она отображает на лучи
$$w = -\frac{\pi}{2} + it,\ t \in [0, +\infty)$$
и
$$w = \frac{\pi}{2} + it,\ t \in (-\infty, 0)$$
соответственно. Действительно, если $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $t \geq 0$ или $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $t < 0$, то
$$\arg\sin\left(\frac{\varphi + it}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

а
$$\arg\sin\left(\frac{\varphi+it}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$
Следовательно,
$$\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=-\sin\left(\frac{\varphi+it}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$
$$\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sin\left(\frac{\varphi+it}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$
Значит,
$$i\sin(\varphi+it)-\sqrt{1-\sin(\varphi+it)}\sqrt{1+\sin(\varphi+it)}=$$
$$=i\sin(\varphi+it)-\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\varphi+it}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=$$
$$=i\sin(\varphi+it)+2\sin\left(\frac{\varphi+it}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\varphi+it}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=i\sin(\varphi+it)+\cos(\varphi+it)=e^{i\varphi-t},$$
$$\arcsin\sin(\varphi+it)=\frac{1}{i}\ln e^{i\varphi-t}=\frac{1}{i}(i\varphi-t)=\varphi+it.$$
Таким образом, главная ветвь арксинуса отображает плоскость с разрезами D вдоль лучей
$$z=t,\ t\in(-\infty,-1]$$
и
$$z=t,\ t\in[1,+\infty)$$
на открытую полосу
$$G:=\left\{z:\operatorname{Im}z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$
а всю плоскость она отображает на множество G', получаемое из области G добавлением лучей
$$z=-\frac{\pi}{2}+it,\ t\in[0,+\infty)$$
и
$$z=\frac{\pi}{2}+it,\ t\in(-\infty,0).$$

Значит, k-я ветвь арксинуса отображает область D на открытую полосу

$$G_k := G + \pi k,$$

а всю плоскость она отображает на множество

$$G'_k := (-1)^k G' + \pi k.$$

При этом справедлива формула

$$(\mathrm{Arcsin}\, z)_k = (-1)^k \arcsin z + \pi k.$$

Функция $z \to \arcsin z$ является обратной к сужению функции $z \to \sin z$ на множество G'. Значит, равенство

$$(\mathrm{Arcsin}\sin z)_k = z$$

имеет место тогда и только тогда, когда z принадлежит множеству G'_k.

По теореме о производной сложной функции для любого $z \in G$ имеем

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{i}\frac{i + \frac{\sqrt{1+z}}{2\sqrt{1-z}} - \frac{\sqrt{1-z}}{2\sqrt{1+z}}}{iz - \sqrt{1-z}\sqrt{1+z}} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{i + \frac{z}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}}{iz - \sqrt{1-z}\sqrt{1+z}} = \frac{1}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}.$$

Таким образом,

$$(\mathrm{Arcsin}\sin z)'_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}.$$

Глава 5

Материалы к практическим занятиям

Упражнение 11 *Найдите значение функции* $f(z) = z^3 + 3z^2 - 5z + 9$ *при* $z = 1 - i$.

Упражнение 12 *Докажите, что число* $z = 1 - i$ *является корнем уравнения* $z^3 + 3z^2 - 8z + 10 = 0$.

Упражнение 13 *Найдите значения функции* $f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z$ *при следующих значениях аргумента:* $z = i$; $z = 1 - i$; $z = 2 + i$.

Упражнение 14 *Дана функция* $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z}$. *Найдите её значения при следующих значениях аргумента:* $z = 1 + i$, $z = i$, $z = 3 - 2i$.

Упражнение 15 *Дана функция* $f(z) = z + z^2$. *Найдите её значения при следующих значениях аргумента:* $z = 1 + i$, $z = 2 - i$; $z = i$; $z = -1$.

Упражнение 16 *Дана функция* $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 + i(\operatorname{Im} z)^2$. *Найдите её значения при следующих значениях аргумента:* $z = 1 + 3i$; $z = 4 - 2i$; $z = i$.

Упражнение 17 *При каких значениях* z *функция* $f(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$ *равна нулю?*

Упражнение 18 *Является ли число* $z = 1 + i$ *корнем уравнения* $z^3 + 3z^2 - 8z + 10 = 0$*?*

Упражнение 19 *Найдите значение функции* $f(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z$ *при* $z = 1 + i$.

Упражнение 20 *Докажите, что число* $z = 1 + i$ *является корнем уравнения* $z^4 + 2z^3 - 3z^2 + 2z + 6 = 0$.

Упражнение 21 *Найдите значения функции* $f(z) = z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 4z$ *при* $z = 2 + i$ *и* $z = 2 - i$.

Пример 1 *Укажите область комплексной плоскости, определяемую условием* $|z| - \operatorname{Im} z < 1$.

Р е ш е н и е. Если $z = x + iy$, то $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} z = y$. Значит, $\sqrt{x^2 + y^2} - y < 1$, $\sqrt{x^2 + y^2} < 1 + y$. Последнее неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 + 2y + y^2, \\ 1 + y \geq 0. \end{cases}$$

Значит, исходное неравенство равносильно неравенству $y > \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$. Таким образом, искомая область представляет собой открытое связное множество точек, ограниченное графиком параболы $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)$ и содержащее точку $O\,(0; 0)$. ■

Упражнение 22 *Опишите области, заданные следующими соотношениями, и установите, являются ли они односвязными:*

$|z - z_0| < R$;

$1 < |z - i| < 2$;

$2 < |z - i| < +\infty$;

$0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$;

$|z - z_0| > R$;

$0 < |z + i| < 2$;

$\operatorname{Im}(iz) < 1$;

$\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{4}$.

Упражнение 23 *Укажите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:*

$\operatorname{Im} \dfrac{z + 1}{z - 1} = 0$;

$|z-i|+|z+i|<4$;
$\operatorname{Re}\dfrac{z-2i}{z+2i}=0$;
$|z-5|+|z+5|<6$;
$\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$;
$\arg\dfrac{i-z}{z+i}=0$.

Упражнение 24 *Запишите с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости: первый квадрант; левая полуплоскость; полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее трёх; внутренность эллипса с фокусами в точках* $1+i$, $3+i$ *и большой полуосью, равной* 3; *внутренность угла с вершиной в точке* z_0 *раствора* $\dfrac{\pi}{4}$, *симметричного относительно луча, параллельного положительной мнимой полуоси.*

Пример 2 *Найдите действительную и мнимую части функции комплексной переменной* $f(z)=iz^2-\overline{z}$.

Р е ш е н и е. Полагая $z=x+iy$, находим $f(z)=i(x+iy)^2-(x-iy)=i\left(x^2+2ixy-y^2\right)-(x-iy)=ix^2-2xy-iy^2-x+iy=-x(2y+1)+i\left(x^2-y^2+y\right)$. Таким образом,

$$\operatorname{Re} f(z)=-x(2y+1),\ \operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2+y.$$

■

Упражнение 25 *Для следующих функций найдите их действительную и мнимую части:*
$f(z)=iz+2z^2$;
$f(z)=2i-z+iz^2$;
$f(z)=\dfrac{z+i}{i-\overline{z}}$;
$f(z)=\dfrac{\overline{z}}{i}+\dfrac{i}{\overline{z}}$;
$f(z)=\operatorname{Re}\left(z^2+i\right)+i\operatorname{Im}\left(z^2-i\right)$;
$f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{iz+\overline{z}}$.

Пример 3 *Определите функцию f по известным действительной и мнимой частям* $\operatorname{Re} f = x + y,\ \operatorname{Im} f = x - y$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся общим методом. Если $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, то

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right),\ y = -\frac{i}{2}\left(z - \overline{z}\right).$$

Значит,

$$\operatorname{Re} f = x + y = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) - \frac{i}{2}\left(z - \overline{z}\right) = z\frac{1-i}{2} + \overline{z}\frac{1+i}{2},$$
$$\operatorname{Im} f = x - y = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) + \frac{i}{2}\left(z - \overline{z}\right) = z\frac{1+i}{2} + \overline{z}\frac{1-i}{2}.$$

Следовательно,

$$f\left(z\right) = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = z\frac{1-i}{2} + \overline{z}\frac{1+i}{2} + iz\frac{1+i}{2} + i\overline{z}\frac{1-i}{2} =$$
$$= z\left(\frac{1-i}{2} + i\frac{1+i}{2}\right) + \overline{z}\left(\frac{1+i}{2} + i\frac{1-i}{2}\right) = (1+i)\,\overline{z}.$$

Таким образом, $f\left(z\right) = (1+i)\,\overline{z}$. ■

Упражнение 26 *Определите функцию f по известным действительной и мнимой частям:*

$\operatorname{Re} f = x^2 - y^2 - 2y - 1,\ \operatorname{Im} f = 2xy + 2x;$

$\operatorname{Re} f = x\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2},\ \operatorname{Im} f = y\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2};$

$\operatorname{Re} f = \dfrac{1}{x},\ \operatorname{Im} f = \dfrac{1}{y}.$

Упражнение 27 *Найдите образы указанных точек при заданных отображениях:*

$z_0 = 1 + i,\ f(z) = z^2 + i;$

$z_0 = \dfrac{1+i}{2},\ f(z) = (z - i)^2;$

$z_0 = 1 - \dfrac{i}{2},\ f(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z};$

$z_0 = 3 - 2i,\ f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}}.$

Пример 4 *Найдите все значения многозначной функции* $F(z) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - z^{\frac{1}{2}}$ *в точке* $z_0 = i$.

Р е ш е н и е. Имеем $|i| = 1$ и $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$. В соответствии с определением степени комплексного числа находим

$$(F(z))_k = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\ k = 0, 1.$$

Таким образом,

$$(F(z))_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(F(z))_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{i5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Упражнение 28 *Найдите все значения следующих многозначных функций в указанных точках:*

$F(z) = z + z^{\frac{1}{4}},\ z_0 = -1;$

$F(z) = \dfrac{z^{\frac{1}{2}} + i}{z^{\frac{1}{2}} - i},\ z_0 = i;$

$F(z) = (1 - z^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},\ z_0 = -i;$

$F(z) = (i + z^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},\ z_0 = -1.$

Упражнение 29 *Найдите все значения* $\operatorname{Arg} F(z)$ *в точке* $z = re^{i\varphi}$*:*

$F(z) = z^{\frac{1}{3}};$

$F(z) = z^{\frac{1}{3}};$

$F(z) = (z+1)^{\frac{1}{3}};$

$F(z) = (z-8)^{\frac{1}{2}};$

$F(z) = (z^2-4)^{\frac{1}{2}};$

$F(z) = \left(\dfrac{z-2}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Пример 5 *Докажите, что для любого комплексного z выполняется равенство* $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Р е ш е н и е. Используя связь показательной и тригонометрических функций комплексной переменной, получаем

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1.$$

■

Упражнение 30 *Докажите следующие тождества на* $\mathbf{C}$*:*
$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;
$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;
$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;
$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$;
$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

Упражнение 31 *Докажите тождества:*
$\sin iz = i \operatorname{sh} z,\ z \in \mathbf{C}$;
$\cos iz = \operatorname{ch} z,\ z \in \mathbf{C}$;
$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z,\ z \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 6 *Найдите значение* $\cos i$.

Р е ш е н и е. По формуле $\cos iz = \operatorname{ch} z$ находим $\cos(i \cdot 1) = \operatorname{ch} 1 \approx 1,5431$. ■

Упражнение 32 *Вычислите следующие значения:*
$\sin(1 + 2i)$;
$\sin(i\pi)$;
$\operatorname{sh} i$; $\operatorname{ch} 2i$;
$\cos \dfrac{i\pi}{4}$;

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right);$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}i\right);$
$\cos(1+i);$
$\operatorname{ch} i;$
$\operatorname{ctg}\pi i;$
$\operatorname{th}\pi i;$
$\operatorname{sh}(-2+i).$

Пример 7 *Найдите* $\ln(-1)$ *и* $\operatorname{Ln}(-1).$

Р е ш е н и е. Так как $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$, то в соответствии с формулой

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

находим значение логарифмической функции

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki = (2k+1)\pi i,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Главное значение логарифма получим при $k = 0$

$$\ln(-1) = (\operatorname{Ln}(-1))_0 = \ln 1 + \pi i = \pi i.$$

■

Упражнение 33 *Найдите все значения следующих логарифмов:*
$\ln i;$
$\operatorname{Ln} i;$
$\ln(3+4i);$
$\operatorname{Ln}(3+4i);$
$\ln e;$
$\operatorname{Ln} e;$
$\ln(1+i);$
$\operatorname{Ln}(1+i);$
$\operatorname{Ln}(-1);$
$\operatorname{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$

Пример 8 *Найдите все значения* $\operatorname{Arcsin} 2.$

Р е ш е н и е. Используя формулу

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right),$$

получаем

$$\operatorname{Arcsin} 2 = -i \operatorname{Ln}(2i \pm i\sqrt{3}) = -i \operatorname{Ln}(i(2 \pm \sqrt{3})) =$$

$$-i[\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi k] = \frac{\pi}{2} - i\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

■

Упражнение 34 *Найдите указанные значения обратных тригонометрических функций:*
$\operatorname{Arctg} 2i$;
$\operatorname{Arccos} 1$;
$\operatorname{Arctg} 1$;
$\operatorname{Arcctg}(1+i)$;
$\operatorname{Arcsin} i$.

Упражнение 35 *Найдите все значения указанных степеней:*
2^i;
$(-1)^i$;
$(1+i)^i$;
$(-1)^{\sqrt{2}}$;
$(3-4i)^{1+i}$;
$(-3+4i)^{1+i}$;
$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}$;
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1-i}$.

Упражнение 36 *Выделите действительную и мнимую части следующих функций:*
$f(z) = e^{1-z}$;
$f(z) = e^{(\overline{z}+i)^2}$;
$f(z) = \sin(z-i)$;
$f(z) = sh\,(z+2i)$;
$f(z) = \operatorname{tg}(z+1)$;
$F(z) = 3^{\frac{1}{z}}$.

Пример 9 *Дайте определение функции* $\operatorname{Arccos} z$. *Вычислите* $\operatorname{Arccos} 2$.

Р е ш е н и е. Включение $w \in \operatorname{Arccos} z$ равносильно равенству $\cos w = z$. Тогда

$$z = \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2}.$$

Отсюда вытекает, что $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. Это квадратное уравнение относительно e^{iw}. Значит, $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$. Из этого равенства находим

$$wi = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

т.е.

$$\operatorname{Arccos} z = -i \ \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = -i \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2\pi \mathbf{Z}.$$

■

Упражнение 37 *Дайте определение для указанных ниже функций и для каждой из них найдите значение в соответствующей точке:*

$\operatorname{Arcsin} z,\ z_0 = i;$

$\operatorname{Arctg} z, z_0 = \dfrac{i}{3};$

$\operatorname{Arcshz}, z_0 = i;$

$\operatorname{Arcch}\ z,\ z_0 = -1;$

$\operatorname{Arcth}\ z, z_0 = 1 - i.$

Упражнение 38 *Найдите значения модуля и главное значение аргумента заданных функций в указанных точках:*

$\sin z,\ z_0 = \pi + i \ln 3;$

$z^2 e^z,\ z_0 = -\pi i;$

$1 + \operatorname{ch}^2 z,\ z_0 = i \ln 2;$

$\operatorname{th} z,\ z_0 = 1 + i\pi.$

Пример 10 *Найдите область однолистности функции* $f(z) = z^2$.

Р е ш е н и е. Функция $w = f(z)$ называется однолистной в области D, если различным z_1 и z_2 из области D соответствуют различные значения функции $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Пусть

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$f(z_1) = \rho_1^2 e^{2i\varphi_1},\ f(z_2) = \rho_2^2 e^{2i\varphi_2}.$$

В силу свойства единственности тригонометрической формы записи комплексных чисел равенство $f(z_1) = f(z_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\rho_1^2 = \rho_2^2,\ \frac{2\varphi_2 - 2\varphi_1}{2\pi} \in \mathbf{Z},$$

то есть

$$\rho_1 = \rho_2,\ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, область однолистности функции $f(z) = z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а какие-либо значения их аргументов отличаются на π, т.е. областью однолистности данной функции является, например, любая полуплоскость, граница которой проходит через начало. ■

Упражнение 39 *Найдите область однолистности следующих функций:*

$f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$;
$f(z) = e^{3iz}$;
$f(z) = e^z$;
$f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

Пример 11 *Покажите, что отображение, осуществляемое функцией $f(z) = z^3$, конформно в области*

$$D := \{z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}.$$

Р е ш е н и е. Взаимно однозначное отображение области D на область G называется конформным, если в каждой точке области D оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. Для того чтобы отображение области D, задаваемое функцией f, было конформным, необходимо и достаточно, чтобы функция f была однолистной и аналитической в области D и $f'(z) \neq 0$ всюду в D. Аналитичность данной функции показана выше. Однолистность следует из того, что область D содержится в угле с вершиной в начале и величиной $\dfrac{2\pi}{3}$. При этом $f'(z) = 3z^2 \neq 0$ для любого $z \in D$. ■

Упражнение 40 *Выясните, какие из заданных функций определяют конформные отображения указанных областей:*

$w = (z+i)^2$, $D = \left\{z : 1 < |z+i| < 3, 0 < \arg < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$;

$w = |z|^2$, $D = \{z : |z| < 1\}$;

$w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $D = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$;

$w = (z-1)^3$, $D = \{z : |z-1| < 1\}$.

Пример 12 *Выясните, существует ли линейная функция, отображающая треугольник с вершинами* $0, 1, i$ *на треугольник с вершинами* $0, 2, 1+i$.

Р е ш е н и е. Отображение, осуществляемое линейной функцией $w = az + b$, представляет собой композицию растяжения $w_1 = |a|\, z$, поворота $w_2 = e^{i \arg a} w_1$ и параллельного переноса $w_3 = w_2 + b$. Заметим, что треугольник с вершинами $0, 1, i$ подобен треугольнику с вершинами $0, 2, 1+i$, причём вершина в точке $z_1 = 0$ соответствует вершине $w_1 = 1+i$, вершина в точке $z_2 = 1$ — вершине в точке $w_2 = 0$, и вершина в точке $z_3 = i$ — вершине в точке $w_3 = 2$. Выполним последовательно преобразования: а) $w_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} z$ — поворот около начала координат на угол $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ против часовой стрелки; б) $w_2 = \sqrt{2} w_1$ — гомотетия с коэффициентом $k = \sqrt{2}$; в) $w_3 = w_2 + (1+i)$ — параллельный перенос на вектор, изображающий комплексное число $1+i$. В результате заданный треугольник отображается на треугольник с вершинами $0, 2, 1+i$, а осуществляющая это отображение целая линейная функция имеет вид

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} z + (1+i) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 1 + i = (1+i)(1-z).$$

■

Упражнение 41 *Докажите, что линейная функция, имеет две неподвижные точки, которые совпадают, если* $a = 1$.

Упражнение 42 *Для указанных ниже отображений найдите конечную неподвижную точку* z_0 *(если она существует), угол поворота* φ *и коэффициент гомотетии* k:

$w = 2z + 1$;
$w = iz + 4$;
$w = az + b$;
$w = e^{i\frac{\pi}{4}} z - e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \ ad - bc \neq 0, \ c \neq 0,$$

осуществляет конформное отображение расширенной плоскости на расширенную плоскость. При этом под углом между кривыми в точке $z = \infty$ понимается угол в точке $z^* = 0$ между образами этих кривых, полученных путём отображения $z^* = \dfrac{1}{z}$. Простейшей дробно-линейной функцией (отличной от линейной) является функция $w = \dfrac{1}{z}$, которая может быть представлена в виде композиции инверсии относительно единичной окружности $w_1 = \dfrac{1}{\overline{z}}$ и комплексного сопряжения $w_2 = \overline{w_1}$. Простейшая дробно-линейная функция отображает окружности в окружности (прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса). Так как общая дробно-линейная функция представляется в виде композиции линейной функции $w_1 = cz+d$, простейшей дробно-линейной $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ и снова линейной

$$w_3 = \frac{bc - ad}{c} w_2 + \frac{a}{c},$$

то она также отображает окружность в окружность. Дробно-линейная функция вполне определяется заданием образов трёх точек. Именно если $z_1 \to w_1, \ z_2 \to w_2, \ z_3 \to w_3$, то

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_4 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Замечание 5.1 *Если одна из точек z_1, z_2, z_3 либо w_1, w_2, w_3 является бесконечно удалённой, то в предыдущей формуле все разности, содержащие эту точку, следует заменить единицами.*

Пример 13 *Найдите образ окружности $x^2+y^2=2x$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$.*

Р е ш е н и е. Полагая $z=x+iy$, имеем

$$x=\frac{1}{2}\left(z+\overline{z}\right),\ y=\frac{1}{2i}\left(z-\overline{z}\right).$$

Подставив эти значения в уравнение окружности, находим

$$x^2+y^2-2x=z\cdot\overline{z}-\left(z+\overline{z}\right)=0.$$

Выполним замену $z=\dfrac{1}{w}$, получаем

$$\frac{1}{w\overline{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}=0,\Rightarrow w+\overline{w}=1.$$

Если $w=u+iv$, то $w+\overline{w}=2u,\ 2u=1$. Таким образом, окружность $x^2+y^2=2x$ преобразуется в прямую $u=\dfrac{1}{2}$. ■

Пример 14 *Найдите дробно-линейное отображение, которое переводит точки $-1, i, i+1$ в точки $0, 2i, 1-i$.*

Р е ш е н и е. Дробно-линейная функция $w=w(z)$ вполне определяется заданием образов трёх точек: $w(z_1)=w_1$, $w(z_2)=w_2$, $w(z_3)=w_3$. В этом случае она может быть найдена из формулы

$$\frac{w(z)-w_1}{w(z)-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_4-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_4-z_1}.$$

Подставляя конкретные значения, получаем

$$\frac{w(z)-0}{w(z)-2i}\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\frac{i+1-i}{i+1+1},$$

$$\frac{w(z)}{w(z)-2i}=\frac{1}{5}\frac{z+1}{z-i}\Rightarrow w(z)=-\frac{2i\left(z+1\right)}{4z-5i-1}.$$

■

Упражнение 43 *Найдите образы множеств, задаваемых следующими уравнениями, при отображении* $w = \dfrac{1}{z}$:

$x^2 + y^2 = \dfrac{y}{3}$;

$y = -\dfrac{x}{2}$;

$y = x - 1$;

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

Упражнение 44 *Найдите дробно-линейное преобразование по заданным условиям: точки* $i, 1, 1+i$ *переходят в точки* $0, \infty, 1$; *точки* 1 *и* i *неподвижны, а точка* 0 *переходит в* ∞; *точки* $\dfrac{1}{2}$ *и* 2 *неподвижны, а точка* $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$ *переходит в* ∞.

Упражнение 45 *Докажите, что дробно-линейная функция имеет две неподвижные точки. При каком условии эти точки совпадают? Когда бесконечно удалённая точка является неподвижной?*

Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от неё и на равных расстояниях. Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно окружности, если они лежат на одном луче, выходящем из центра этой окружности, по разные стороны от неё и так, что произведение расстояний от этих точек до центра равно квадрату радиуса.

Упражнение 46 *Найдите точки, симметричные с точкой* $1+i$ *относительно окружностей:*

$|z| = 1$;

$|z - i| = 2$.

Упражнение 47 *Для отображения* $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ *найдите образ точки, симметричной точке* $1 - i$ *относительно:*

прямой $y = x$;

окружности $|z - 1| = 3$.

Упражнение 48 *Найдите образ области* D *при заданном дробно-линейном отображении:*

$D = \{z : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ w = \dfrac{z-i}{z+i};$
$D = \left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\},\ w = \dfrac{z}{z-1};$
$D = \left\{z : 1 \le |z| \le 2,\ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}\right\},\ w = 1 + \dfrac{1}{z};$
$D = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\},\ w = i\dfrac{1-z}{1+z};$
$D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\},\ w = \dfrac{z-1}{z-2}.$

Пример 15 *Найдите функцию, которая внутренность двуугольника, образованного окружностями C_1, C_2, отображает на единичный круг.*

Р е ш е н и е. Преобразование

$$w_1 = -\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

отображает точку $z = \dfrac{z_1+z_2}{2}$ в точку 1, точку z_1 — в нуль, а точку z_2 — в бесконечность. Таким образом отрезок, соединяющий точки z_1и z_2, отображается на положительную действительную полуось. Дуги окружностей, образующих двуугольник, отображаются в лучи $\arg w_1 = \alpha\pi$, $\arg w_1 = -\beta\pi$. Следовательно, область D отображается на сектор

$$E_1 = \{w_1 : -\beta\pi < \arg w_1 < \alpha\pi\}.$$

Повернём этот сектор на угол $\beta\pi$, т.е. произведём преобразование $w_2 = e^{i\beta\pi}w_1$. Возведём полученную функцию в степень $\dfrac{1}{\beta+\alpha}$:

$$w_3 = {w_2}^{\frac{1}{\beta+\alpha}}.$$

При этом сектор отобразится в верхнюю полуплоскость. Функция

$$w_4 = e^{i\theta}\frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w}_3^0}$$

осуществляет отображение полуплоскости на единичный круг. Величины w_3^0 и θ определяются дополнительными условиями: $w_4(z_0) = 0$, $\arg w_4'(z_0) = \gamma$. Окончательно получаем $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$. ■

Упражнение 49 *Найдите одну из функций, отображающих область D на верхнюю полуплоскость (если функция многозначна, то имеется в виду одна из её ветвей):*

$D = \{z : |z| < 1, |z-1| < 1\}$;
$D = \left\{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$;
$D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
$D = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
$D = \left\{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$;
$D = \left\{z : |z| > 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right\}$;
$D = \{z : |z| < 2, \operatorname{Im} z > 1\}$;
$D = \{z : |z| < 1, |z+i| < 1\}$;
$D = \{z : |z| < 1, |z+i| > 1\}$;
$D = \{z : |z| > 1, |z+i| < 1\}$.

Пример 16 *Найдите отображение полосы шириной h, $0 < \operatorname{Re} z < h$, параллельной мнимой оси, на единичный круг.*

Р е ш е н и е. Искомое решение получим, например, с помощью композиции отображений: $w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ — в полосу шириной h, параллельную действительной оси; $w_2 = \dfrac{\pi}{H}w_1$ — в полосу шириной π; $w_3 = e^{w_2}$ — в верхнюю полуплоскость;

$$w_4 = e^{i\theta}\frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w}_3^0}$$

— в единичный круг. Таким образом, $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$. ■

Упражнение 50 *Найдите образ области D при отображении $w = e^z$:*

$D = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$;
$D = \left\{z : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\right\}$;
$D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$;
$D = \left\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$;
$D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Упражнение 51 *Найдите образы прямых $x = C$ и $y = C$ при отображении $w = e^z$.*

Упражнение 52 *Найдите образ полуполосы*

$$D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$$

при отображении $w = \cos z$.

Упражнение 53 *Найдите образы прямых* $x = C$ *и* $y = C$ *при отображении* $w = \operatorname{ch} z$.

Упражнение 54 *Найдите образ прямоугольника*

$$D = \{z : -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < h, h > 0\}$$

при отображении $w = \cos z$.

Литература

[1] Любецкий, В. А. Основные понятия школьной математики. — М. : Просвещение, 1987. — 400 с.

[2] Любецкий, В. А. Основные понятия школьной математики. — 2-е изд., испр. — М. : Айрис-пресс, 2004. — 624 с.

[3] Шишкин, А. Б. Теория функций комплексной переменной. Основы теории : учебное пособие для студентов педагогических вузов — Славянск-на-Кубани : Издательский центр СГПИ, 2010. — 195 с.

[4] Акилов, Г. П., Дятлов, В. Н. Основы математического анализа. — Новосибирск. : Наука, 1980. — 336 с.

.

Учебное издание

ШИШКИН АНДРЕЙ БОРИСОВИЧ

Элементарные функции комплексной переменной

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественно-математическим профилям педагогического образования

Подписано в печать 17.06.2016 г.
Формат 60 × 84/16. Бумага типографская. Гарнитура «Компьютер Модерн».
Усл. п. л. 7,94. Уч.-изд. л. 8,42.
Тираж 100 экз. Заказ № 54.

Филиал Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200
Отпечатано в издательском центре
филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353563, г. Славянск-на-Кубани, ул. Коммунистическая, 2