ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО

«Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт»

Кафедра математики и методики ее преподавания

А.Б. Шишкин

Лекции по дифференциальным уравнениям

Элементы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения в частных производных

Славянск-на-Кубани
2009

ББК 22.161.6
Ш65

Рекомендовано к печати
редакционно-издательским советом СГПИ

Рецензенты

В.И. Клавишев, кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики АГПУ

А.Н. Чернышев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики ее преподавания СГПИ

Шишкин А.Б.

Ш65 Лекции по дифференциальным уравнениям: учебное пособие для студентов педагогических вузов / А.Б.Шишкин. — Славянск–на–Кубани: Издательский центр СГПИ, 2009. — 73 с.

Пособие содержит курс лекций по дифференциальным уравнениям, включающий разделы: элементы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, линейные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных. Пособие не заменяет и не дополняет широкий спектр учебников по данной тематике. Оно предназначено для использования в учебном процессе, главным образом, для организации самостоятельной работы студентов. Содержание пособия связано с конкретной учебной ситуацией и продиктовано требованиями государственного образовательного стандарта. Весь рассматриваемый материал разбит на естественные порции (параграфы), каждая из которых раскрывает содержание отдельного вопроса на семестровом экзамене

Содержание

Введение

Одним из важнейших направлений профессиональной подготовки будущего учителя математики (и информатики) является овладение умениями, связанными с применением полученных знаний в процессе решения различных прикладных задач. Формированию этих умений в определённой мере способствует каждая из отдельных изучаемых в педагогическом институте математических дисциплин. Но совершенно особенной в этом смысле является дисциплина "Дифференциальные уравнения".

Курс "Дифференциальные уравнения"имеет общеобразовательное и прикладное значение: многие вопросы содержат материал, способствующий формированию правильного представления о современной естественнонаучной картине мира. Изучение этого курса способствует подготовке учителя к ведению факультативных занятий, к работе в классах с углубленным изучением физики или математики, в математических школах, формированию умений решать задачи повышенной сложности, задачи олимпиадного характера, овладению общими методами рассуждений и доказательств.

Настоящее пособие охватывает профессионально ориентированный учебный материал по дисциплине "Дифференциальные уравнения"для студентов, обучающихся по специальности 050201.65 — "Математика"с дополнительной специальностью 050202.65 — "Информатика"по программе специалитета. Этот учебный курс входит в блок дисциплин предметной подготовки и занимает важное место в процессе подготовки будущих педагогов.

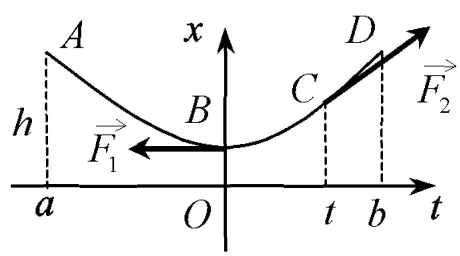
Курс предполагает, что студенты уже знакомы с дифференциальным и интегральным исчислениями для функций одной и нескольких действительных переменных и владеют так же основами функционального анализа (метрическое пространство, нормированное пространство, евклидово пространство и т.д.). Курс требует основательных знаний по рядам вообще и по рядам Фурье, в частности. Основные понятия теории дифференциальных уравнений студент должен держать в памяти: определение общего и частного решений, постановка задачи Коши, основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основные методы решения уравнений в частных производных. На экзамене студент должен быть готов обосновать каждое предложение (теорему, формулу), охватываемое экзаменационными вопросами. На практических занятиях основное внимание уделяется решению элементарных дифференциальных уравнений.

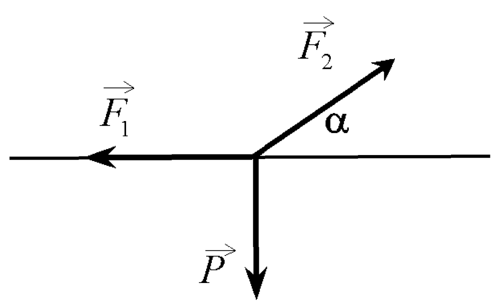
1 Элементы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений

1.1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

1.1.1 Цепная линия

Рассмотрим цепь с линейной плотностью ρ, закрепленную в двух точках A и B, на одинаковой высоте h. Поставим задачу: найти уравнение $x = x(t)$, $t \in [a, b]$ линии $ABCD$, вдоль которой располагаются звенья цепи.





Цепь не оказывает сопротивления на изгиб. Следовательно,на участок цепи BC действуют лишь три силы $\overrightarrow{F_1}$ - сила натяжения цепи в точке B с абсциссой $t = 0$, $\overrightarrow{F_2}$ - сила натяжения цепи в точке C с абсциссой t, $\overrightarrow{P}$ - сила тяжести. По второму закону Ньютона

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{P} = 0.$$

Распишем это уравнение в проекциях

$$F_2 \cos\alpha - F_1 = 0, \quad F_2 \sin\alpha - P = 0.$$

Из этих уравнений вытекает равенство $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{P}{F_1}$. Будем считать, что искомая функция $x = x(t)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$. При этом $\operatorname{tg}\alpha = x'(t)$, а сила тяжести P равна $mg = l\rho g$, где $l = \int_0^t \sqrt{1 + x'^2(\tau)}d\tau$. Следовательно, искомая функция удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$x' = \frac{\rho g}{F_1}\int\limits_0^t \sqrt{1 + x'^2(\tau)}d\tau.$$

После дифференцирования получаем дифференциальное уравнение

$$x'' = a^2\sqrt{1 + x'^2},$$

где $a^2 = \frac{\rho g}{F_1}$ - положительная константа.

1.1.2 Атмосферное давление

Рассмотрим задачу: найти зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря.

Пусть $x(t)$ атмосферное давление на высоте t над уровнем моря, $\rho(t)$ - плотность воздуха на высоте t, $v(t) = \frac{1}{\rho(t)}$ - объем одного килограмма воздуха при давлении $x(t)$. Будем считать, что функция $x(t)$ дифференцируема на промежутке $[0, +\infty)$. По закону Бойля-Мариотта $x(t)v(t) = k$ - константа. Значит, функция $\rho(t) = \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{k}x(t)$ тоже дифференцируема на этом промежутке. Рассмотрим атмосферный столб с площадью основания $S = 1$ и высотой t. Его масса равна

$$m(t) = \int\limits_0^t \rho(\tau)d\tau = \frac{1}{k}\int\limits_0^t x(\tau)d\tau.$$

С другой стороны, $m(t)g = x(0) - x(t)$, где g - ускорение свободного падения. Значит,

$$\frac{1}{k}\int\limits_0^t x(\tau)d\tau = \frac{1}{g}(x(0) - x(t)).$$

После дифференцирования получаем дифференциальное уравнение

$$x' + a^2x = 0,$$

где $a^2 = \frac{g}{k}$ - положительная константа.

1.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы

Прежде всего, рассмотрим произвольную функцию F от 3 действительных переменных t, x, y. Говорят, что действительные функции $x = x(t),\ y = y(t)$, определенные на одном и том же промежутке T, удовлетворяют уравнению

$$F(t, x, y) = 0, \tag{1}$$

если выполнены следующие условия:

1) для любого $t \in T$ точка $(t, x(t), y(t))$ лежит в области определения функции F;

2) для любого $t \in T$ имеет место равенство $F(t, x(t), y(t)) = 0$.

При этом уравнение $F(t, x, y) = 0$ называют функциональным уравнением, переменную t — независимой переменной, переменные x, y — неизвестными функциями (зависимыми переменными). Всякая пара функций $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T$, удовлетворяющих условиям 1), 2), называется частным решением функционального уравнения. Совокупность всех частных решений функционального уравнения называется общим решением этого уравнения. Пусть $x = x(t)$ — непрерывная на некотором промежутке T и дифференцируемая во внутренности этого промежутка $\mathrm{int}T$ действительная функция. Если пара функций $x = x(t),\ y = x'(t)$[1] является частным решением уравнения (1), то функцию $x = x(t)$ называют частным решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$F(t, x, x') = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) (— совокупность всех его частных решений) можно отождествить с совокупностью всех частных решений уравнения (1), удовлетворяющих условию: $y(t) = x'(t),\ t \in \mathrm{int}T$. Понятно, что уравнение (2) может содержать несколько неизвестных функций.

Точнее, уравнение вида

$$F(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(m_1)}, ..., x_n, x_n', ..., x_n^{(m_n)}) = 0, \tag{3}$$

где t — независимая переменная, $x_1, ..., x_n$ — неизвестные функции от t, F — действительная функция указанных аргументов, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* При этом всякий набор функций

[1]При каком либо определении функции y на концах промежутка T.

$x_1(t), ..., x_n(t)$, определенных и непрерывных на одном и том же промежутке T, имеющих на $\text{int}T$ те производные, которые присутствуют в уравнении (3) и удовлетворяющие этому уравнению при всех $t \in T$, называется *частным решением* уравнения (3). Наибольшее из чисел $m_1, ..., m_n$ называется порядком этого уравнения. Совокупность всех частных решений уравнения (3) называется *общим решением*[2] уравнения (3).

Рассматриваются также *системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$F_i(t, x_1, x_1', ..., x_1^{(m_1)}, ..., x_n, x_n', ..., x_n^{(m_n)}) = 0, \quad i = 1, ..., k. \tag{4}$$

Частным решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется всякий набор функций $x_1(t), ..., x_n(t)$, определенных на одном и том же промежутке T, являющийся частным решением каждого из входящих в систему уравнений. Порядком системы обыкновенных дифференциальных уравнений называется наибольший из порядков входящих в систему уравнений.

Использование понятия векторной функции

$$x = (x_1, ..., x_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

позволяет существенно упростить обозначения. Так уравнение (3) можно записать в виде

$$F(t, x, x', ..., x^{(m)}) = 0, \tag{5}$$

где x — векторная функция $(x_1, ..., x_n)$, $x', ..., x^{(m)}$ — производные векторной функции x от первого порядка до порядка $m = \max\{m_1, ..., m_n\}$. Система уравнений (4) может быть записана также, если под функцией F понимать векторную функцию

$$F = (F_1, ..., F_k) : \mathbf{R}^{(m+1)n+1} \to \mathbf{R}^{k.}$$

Среди систем обыкновенных дифференциальных уравнений особое место занимают системы первого порядка, так как к ним сводятся произвольные системы. Эта операция выполняется следующим образом. Введем в рассмотрение векторные функции $y_1 = x, y_2 = x', ..., y_m = x^{(m-1)}$. С помощью этих функций система (5) запишется в виде $F(t, y_1, ..., y_m, y_m') = 0$. Дополняя эту систему уравнениями

$$y_1' = y_2, ..., y_{m-1}' = y_m,$$

[2]Мы используем термин "общее решение"в алгебраическом смысле. В классической теории дифференциальных уравнений этот термин имеет другой смысл, близкий по значению к термину "общий вид решения"

мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{m-1}' = y_m \\ F(t, y_1, ..., y_m, y_m') = 0 \end{cases}$$

первого порядка эквивалентную исходной системе уравнений (5). Отметим, что эта система состоит из $k + mn$ уравнений и содержит mn неизвестных функций. В то время как система (5) состоит из k уравнений и содержит n неизвестных функций.

Среди систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка выделяют системы вида

$$x' = f(t, x)$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n' = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

Такие системы называются *нормальными*. Как мы видим, нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений содержат столько же неизвестных функций сколько и уравнений.

Рассмотрим отдельно случай одного уравнения с одной неизвестной функцией. Пусть $F(t, x, x', ..., x^{(m)}) = 0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение порядка m с одной неизвестной функцией $x = x(t)$. Легко убедиться, что это уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{m-1}' = y_m \\ F(t, y_1, ..., y_m, y_m') = 0 \end{cases}$$

Если уравнение $F(t, y_1, ..., y_m, y_m') = 0$ разрешается относительно переменной y_m':

$$y_m' = f(t, y_1, ..., y_m),$$

то получим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \;.\quad .\quad .\quad . \\ y_{m-1}' = y_m \\ y_m' = f(t, y_1, ..., y_m) \end{cases}$$

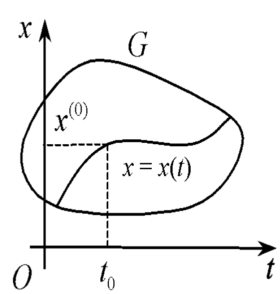
эквивалентную исходному уравнению $F(t, x, x', ..., x^{(m)}) = 0$.

1.3 Задача Коши

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f(t, x). \tag{6}$$

Будем считать, что векторная функция f определена на области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$.Эту область принято называть *областью определения* системы (6). Всякое частное решение $x = x(t)$ этой системы определяет некоторую кривую в области G. Эту кривую принято называть *интегральной.* Ее описывает точка $(t, x(t))$, когда t пробегает промежуток T. Система (6) может иметь бесконечное множество частных решений. Поэтому следует говорить о *семействе интегральных кривых* нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.



Зафиксируем точку $(t_0, x^{(0)}) \in G$. Может оказаться, что некоторые из семейства интегральных кривых проходят через эту точку. Для таких кривых будет иметь место векторное равенство $x(t_0) = x_0$. Таким образом, выбору точки из области G сопутствует выбор одного или нескольких частных решений системы уравнений (6), удовлетворяющих условиям

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, ..., x_n(t_0) = x_n^{(0)}.$$

Эти условия принято называть *начальными условиями*, а числа $t_0, x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ - *начальными значениями.*

Задача Коши: *найти все частные решения системы уравнений* (6), *удовлетворяющие начальным условиям при заданных начальных значениях* $(t_0, x^{(0)}) \in G$.

Задача Коши допускает корректную постановку и по отношению к произвольной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим случай одного уравнения $F(t, x, x', ..., x^{(m)}) = 0$ с одной неизвестной функцией $x = x(t)$. Найдем вид начальных условий для этого уравнения. При этом будем считать, что оно разрешается относительно переменной $x^{(m)}$: $x^{(m)} = f(t, x, x', ..., x^{(m-1)})$. Значит, оно равносильно нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_{m-1}' = y_m \\ y_m' = f(t, y_1, ..., y_m) \end{cases}$$

где $y_1 = x, y_2 = x', ..., y_m = x^{(m-1)}$. Область G для этой системы совпадает с областью определения D_f функции f. Выберем произвольную точку $(t_0, y^{(0)})$ из области D_f. Условия

$$y_1(t_0) = y_1^{(0)}, y_2(t_0) = y_2^{(0)}, ..., y_m(t_0) = y_m^{(0)}$$

равносильны условиям

$$x(t_0) = y_1^{(0)}, x'(t_0) = y_2^{(0)}, ..., x^{(m-1)}(t_0) = y_m^{(0)},$$

которые более естественно записывать в виде

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', ..., x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)},$$

где $(x_0, x_0', ..., x_0^{(m-1)}) \in D_f$.

Решение задачи Коши проиллюстрируем на простейшем дифференциальном уравнении $x' = f(t)$, где f - непрерывная на промежутке $< a, b >$ функция. Известно, что ему удовлетворяют функции вида $x = F(t) + C$, где F - произвольная первообразная функции f на промежутке $< a, b >$, C - произвольная постоянная. Первообразную функцию F можно записать так: $\int\limits_{t_1}^{t} f(\tau) d\tau$, где t_1 - фиксированная точка из промежутка $< a, b >$.

Следовательно,

$$x = \int\limits_{t_1}^{t} f(\tau)d\tau + C.$$

Таким образом, нами найдено общее решение уравнения $x' = f(t)$.

Область определения G уравнения $x' = f(t)$ совпадает с полосой $< a, b > \times \mathbf{R}$. Значит, начальные значения для этого уравнения должны быть выбраны с соблюдением единственного условия $t_0 \in < a, b >$. Зафиксируем произвольные начальные значения t_0, x_0 и поставим тем самым задачу Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$. После подстановки в общее решение, получаем $C = x_0 - \int\limits_{t_1}^{t_0} f(\tau)d\tau$. Следовательно, частное решение

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

уравнения $x' = f(t)$ является решением задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Понятно, что это решение единственное.

1.4 Теорема существования и единственности

Говорят, что векторная функция $f = f(t, x)$, $f = (f_1, ..., f_m)$, удовлетворяет условию Липшица по переменной $x = (x_1, ..., x_n)$ на области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, если существует такое число $k > 0$, что для любых двух точек $(t, x), (t, y) \in G$ выполняется неравенство

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \ \leq k||x - y||,$$

которое в развернутом виде записывается так:

$$|f_j(t, x_1, ..., x_n) - f_j(t, y_1, ..., y_n)| \ = k \max_i |x_i - y_i| \,, \ j = 1, ..., m.$$

Отметим, что условие Липшица выполняется, если функции $f_1, ..., f_m$ дифференцируемы в области G по переменным $x_1, ..., x_n$ и частные производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, ограничены в этой области. Действительно,

$$|f_j(t, x_1, ..., x_n) - f_j(t, y_1, ..., y_n)| \ \leq$$

$$\leq \ |f_j(t, x_1, x_2, ..., x_n) - f_j(t, y_1, x_2, ..., x_n)| \ + ...$$

$$... + \ |f_j(t, y_1, ..., y_{n-1}, x_n) - f_j(t, y_1, ..., y_n)| \ \leq$$

$$\leq \frac{\partial f_j(t, \zeta_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1}|x_1 - y_1| + ... + \frac{\partial f_j(t, y_1, ..., y_{n-1}, \zeta_n)}{\partial x_n}|x_n - y_n| \ \leq$$

$$\leq k\max_i|x_i - y_i| \, , \ i = 1, ..., n.$$

Теорема 1 *Пусть дана нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = f(t, x)$ с начальными условиями $x(t_0) = x^{(0)}$, причем функция $f(t, x)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, содержащей точку $(t_0, x^{(0)})$, и удовлетворяет в этой области условию Липшица по переменной x. Тогда на некотором отрезке $|t - t_0| \ \leq d$ существует одно и только одно решение системы, удовлетворяющее начальным условиям.*

Эта теорема доказывается с помощью сведения задачи Коши к решению интегрального уравнения.

Рассмотрим конкретную задачу Коши. Другими словами, пусть дана нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = f(t, x)$ с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, где $(t_0, x^{(0)}) \in G$, $G \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ - область определения функции f. Считаем, что f непрерывна на области G.

Выберем произвольное частное решение $x = x(t)$ системы $x' = f(t, x)$, заданное на некотором промежутке T и удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in T$. Тогда для любого $t \in \mathrm{int}T$ имеет место векторное равенство: $x'(t) = f(t, x(t))$. Проинтегрируем это равенство и получим

$$\int\limits_{t_0}^{t} x'(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

По формуле Ньютона-Лейбница для любого $t \in T$ выполняется векторное равенство

$$x(t) = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Это означает, что векторная функция $x = x(t)$, $t \in T$, является решением системы интегральных уравнений

$$x_i = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} f_i(\tau, x_1, ..., x_n) d\tau, \quad i = 1, ..., n. \tag{7}$$

Верно и обратное. Пусть непрерывная на промежутке T векторная функция $x = x(t)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (7). Так как векторная функция f непрерывна в области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, то $f(t, x(t))$ непрерывна на промежутке T, значит, векторная функция $x = x(t)$ дифференцируема на промежутке $\mathrm{int}T$. При этом

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathrm{int}T,$$

то есть $x = x(t)$ удовлетворяет нормальной системе $x' = f(t, x)$. Выполнимость начальных условий очевидна.

Тем самым, мы доказали следующее утверждение: *непрерывная векторная функция $x = x(t), t \in T$, является решением задачи Коши*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x^{(0)}) \in G,$$

тогда и только тогда, когда эта функция удовлетворяет системе интегральных уравнений (7).

1.5 Доказательство теоремы существования и единственности

Доказательство теоремы существования и единственности проведем для скалярного случая, считая, что $n = 1$. Отметим, что приводимое ниже доказательство существенно опирается на метрические свойства пространства $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

В частности, решающую роль играет полнота этого пространства. В случае $n \geq 1$ доказательство проводится по той же схеме и опирается на метрические свойства пространства векторных функций непрерывных на отрезке $[a, b]$ с метрикой

$$||x - y|| = \max_{i=1,...,n} \rho(x_i, y_i).$$

Теорема 2 *Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение* $x' = f(t,x)$ *первого порядка, с начальным условием* $x(t_0) = x_0$*, причем функция* $f(t,x)$ *определена и непрерывна в области* $G \subseteq \mathbf{R}^2$*, содержащей точку* (t_0, x_0)*, и удовлетворяет в этой области условию Липшица по переменной* $x:$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \ \leq k|x-y|,$$

где $k > 0$ $(t,x),(t,y) \in G$*. Тогда на некотором отрезке* $|t - t_0| \ \leq d$ *существует одно и только одно решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию.*

Доказательство.Нам нужно показать, что существует отрезок $T = [t_0 - d, t_0 + d]$, на котором интегральное уравнение

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{8}$$

допускает единственное непрерывное решение $x = x(t)$, $t \in T$. Пусть G' - замкнутая ограниченная выпуклая подобласть G, содержащая точку (x_0, t_0). Из непрерывности функции $f = f(t,x)$ на области G следует, что она ограничена на замкнутой области $\overline{G'}$. Значит, существует $M > 0$ такое, что

$$|f(t,x)| \ \leq M \ \ \forall (t,x) \in \overline{G'}.$$

Выберем $d > 0$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $[t_0 - d,\, t_0 + d] \times [x_0 - Md,\, x_0 + Md] \subseteq G'$,

2) $kd < 1$.

Р ассмотрим метрическое пространство $C[t_0 - d, t_0 + d]$ и обозначим C^* множество всех элементов пространства $C[t_0 - d, t_0 + d]$, удовлетворяющих условию $|x(t) - x_0| \ \leq Md$. Множество C^* является замкнутым в пространстве $C[t_0 - d, t_0 + d]$ (доказать самостоятельно), значит, оно само является полным метрическим пространством с индуцированной метрикой. Рассмотрим оператор $A: C[t_0 - d, t_0 + d] \to C[t_0 - d, t_0 + d]$, действующий по правилу

$$Ax = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Убедимся в том, что $Ax \in C^*$для любого $x \in C^*$. Действительно,

$$|Ax - x_0| \; = \left| \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - t_0| \; \leq Md.$$

Отсюда вытекает, что пространство C^* замкнуто относительно оператора A. Далее покажем, что оператор A является сжимающим отображением в C^*, то есть, существует положительное $\mu < 1$ такое, что $\rho(Ax_1, Ax_2) \leq \mu\rho(x_1, x_2)$ для любых функций $x_1, x_2 \in C^*$. Действительно,

$$|Ax_1 - Ax_2| =$$

$$= \left| \int\limits_{t_0}^{t} \left(f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau)) \right) d\tau \right| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))| d\tau \leq$$

$$\leq k \int\limits_{t_0}^{t} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau \leq kd\rho(x_1, x_2).$$

Так как $kd < 1$, то можно считать, что $\mu = kd$.

По свойствам сжимающих отображений уравнение $Ax = x$ имеет единственное решение в пространстве C^*. Это означает, что уравнение (8) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию. Таким образом, теорема доказана. ■

1.6 Следствия теоремы существования и единственности

Теорема 3 *Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{9}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \; x'(t_0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

причем функция f определена и непрерывна на области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, содержащей точку $(t_0, x_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$, и удовлетворяет в ней условию Липшица

$$|f(t, x_1, ..., x_n) - f(t, y_1, ..., y_n)| \leq k||x - y||.$$

Тогда на некотором отрезке $|t-t_0| \leq d$ существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Доказательство. Уравнение (9) эквивалентно нормальной системе уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(t_0) = x_0$, $y_2(t_0) = x_0'$, ... , $y_n(t_0) = x_0^{(n-1)}$. Так как условие Липшица для векторной функции $(y_2, ..., y_n, f(t, y_1, ..., y_n))$ выполнено, то эта система имеет единственное решение на интервале $|t-t_0| < d$ при некотором $d > 0$. Очевидно, что то же самое можно сказать про уравнение (9). ■

Теорема 4 *Пусть дана нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n' = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n, \end{cases}$$

с начальными условиями $x(t_0) = x^{(0)}, t_0 \in (a, b)$, где a_{ij}, b_i – функции от t непрерывные на отрезке $[a, b]$. Тогда существует единственное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям и определенное всюду на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Область определения G рассматриваемой системы представляет собой декартово произведение $[a, b] \times \mathbf{R}^n$. Условие Липшица для функции $f = (f_1, ..., f_n)$, где $f_j = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n + b_j$, $j = 1, ..., n$, в этой области выполнено. Действительно,

$$|f_j(t, x) - f_j(t, y)| \ = \ |a_{j1}||x_1 - y_1| + ... + |a_{jn}||x_n - y_n| \ \leq k||x - y||,$$

где

$$k = \max_{i,j} \max_{t \in [\alpha, \beta]} |a_{ji}(t)|.$$

Значит, рассматриваемая система имеет единственное решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x^{(0)}$ и определенное на отрезке $[t_0 - d, t_0 + d]$, где $d > 0$ определено из условий:

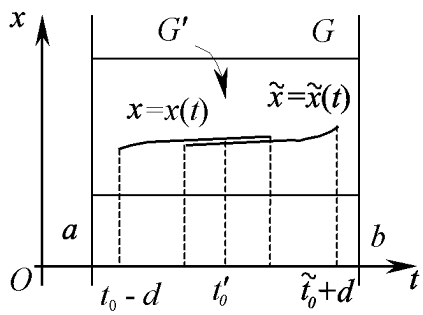
$$[t_0 - d, t_0 + d] \subseteq [a, b], \quad kd < 1.$$

Можно считать, что d имеет вид $\frac{b-t_0}{m}$, где $m \in \mathbf{N}$. Зададим новые начальные условия $\tilde{x}^{(0)} = x(\tilde{t}_0)$, где $\tilde{t}_0 = t_0 + \frac{d}{2}$. По теореме существования и единственности существует единственное решение

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t), \quad t \in [\tilde{t}_0 - d, \, \tilde{t}_0 + d],$$

удовлетворяющее этим начальным условиям. В общей области определения

$$[t_0' - 3d/4, t_0' + 3d/4], t_0' = t_0 + d/4,$$



векторные функции $x = x(t)$ и $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ совпадают. Это означает, что нам удалось продолжить решение $x = x(t)$ с отрезка $[t_0 - d, t_0 + d]$ на более широкий отрезок

$$[t_0 - d, \tilde{t} + d] = [t_0 - d, t_0 + 3d/2].$$

Этот процесс можно продолжить и получить решение задачи Коши, определенное на отрезке $[t_0, b]$. Процедура продолжения в сторону левого конца отрезка $[a, b]$ позволяет получить решение задачи Коши, определенное уже на всем отрезке $[a, b]$. Понятно, что это решение единственное. ■

Теорема 5 *Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение порядка* n

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \, \ldots \, + a_n x + b = 0.$$

Если функции $a_i = a_i(t), b = b(t)$ *непрерывны на отрезке* $[\alpha; \beta]$, *то на этом промежутке существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям*

$$x(t_0) = x_0, \, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

где $t_0 \in (\alpha; \beta)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что данное уравнение эквивалентно нормальной системе вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n y_1 - \ldots - a_1 y_n - b \end{cases}$$

и сослаться на теорему 4. ■

1.7 Уравнение с разделяющимися переменными

Выберем две произвольные действительные функции f_1 и f_2. Считаем, что они определены и непрерывны на промежутках $< a, b >$ и $< c, d >$ соответственно. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$x' = f_1(t) f_2(x). \tag{10}$$

Область определения этого уравнения совпадает с декартовым произведением $< a, b > \times < c, d >$. Поставим задачу: найти общее решение уравнения (10). Константы вида $x = x_0$, где x_0 - ноль функции f_2, являются частными решениями уравнения (10). Если функции f_1, f_2 отличны от тождественного нуля, то никакие другие константы этому уравнению не удовлетворяют. Поэтому займемся поиском частных решений отличных от констант.

Пусть $x = x(t)$, $t \in T \subseteq < a, b >$, - произвольное отличное от константы частное решение уравнения (10). Функция $x = x(t)$ непрерывна. Поэтому нам достаточно определить ее значения лишь в точках t, для которых $f_2(x(t)) \neq 0$. Выберем $t_0 \in \mathrm{int} T$ из условия $f_2(x(t_0)) \neq 0$ и обозначим $x_0 \in < c, d >$ значение $x(t_0)$. Для всех t из некоторой окрестности точки t_0 выполняется равенство

$$\frac{1}{f_2(x(t))} x'(t) = f_1(t).$$

По свойствам неопределенного интеграла

$$\int f_1(t) dt = \int \frac{x'(t) dt}{f_2(x(t))} = \int \frac{dx}{f_2(x)} \bigg|_{x = x(t)}.$$

Пусть F - какая-либо первообразная $f_1(t)$ в окрестности точки t_0, $\Phi(x)$ - какая-либо первообразная $\frac{1}{f_2(x)}$ в окрестности точки x_0. Тогда для всякого t из некоторой окрестности точки t_0 имеет место равенство $\Phi(x(t)) = F(t) + c$. Полагая $t = t_0$, находим значение константы $c = \Phi(x_0) - F(t_0)$. Таким образом, отличное от константы решение $x = x(t)$ уравнения (10) в окрестности каждой точки, для которой $f_2(x(t)) \neq 0$, является неявной функцией t, определяемой уравнением

$$\Phi(x) = F(t) + c \tag{11}$$

при некоторой константе c.

С другой стороны, всякая неявная функция $x = x(t)$, определяемая уравнением (11), в окрестностях точек, для которых $f_2(x(t)) \neq 0$, является дифференцируемой. Ее производная удовлетворяет соотношению

$$x' = -\frac{(\Phi(x) - F(t) - c)'_t}{(\Phi(x) - F(t) - c)'_x} = f_1(t) f_2(x)$$

Таким образом, общее решение уравнения (10) вполне описывается уравнением (11) и набором констант $\{x = x_0 : f_2(x_0) = 0\}$. Константы из этого набора принято называть *особыми* решениями уравнения (10).

Если функция f_2 не имеет нулей, то, как это следует из проведенных выше рассуждений, совокупность всех частных решений уравнения (10) исчерпывается неявными функциями определяемыми уравнением (11). В противном случае это, вообще говоря, не так. Проиллюстрируем это утверждение примером. Рассмотрим уравнение $x' = 2\sqrt{x}$. В этом случае $f_1 \equiv 1$, $f_2 = 2\sqrt{x}$. Значит, $F = t$, $\Phi = \sqrt{x}$. Уравнение (11) приобретает вид $\sqrt{x} = t + c$. Легко увидеть, что функция

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t^2, & t > 0, \end{cases}$$

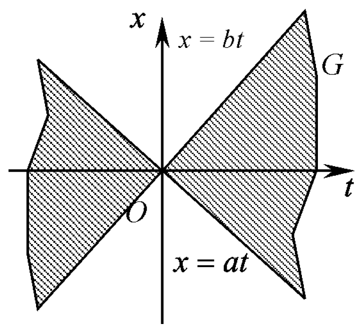
определена и дифференцируема всюду на $\mathbf{R}$, удовлетворяет уравнению $x' = 2\sqrt{x}$, но в окрестностях точек $t \leq 0$ не определяется как неявная функция уравнением $\sqrt{x} = t + c$.

Отметим, что задача Коши для уравнения $x' = 2\sqrt{x}$ с начальным условием $x(0) = 0$ имеет более одного решения. Кроме определенной выше функции $x(t)$, решением данной задачи Коши является константа $x \equiv 0$.

1.8 Однородные уравнения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right). \tag{12}$$



Предполагаем, что функция f определена и непрерывна на промежутке $< a, b >$. Значит, область определения G этого уравнения совпадает с объединением двух вертикальных углов с выключенной вершиной - точкой $(0, 0)$. Стороны этих углов задаются уравнениями $x = at$ и $x = bt$ соответственно. Если промежуток $< a, b >$ неограничен, то, по крайней мере, одна из сторон - вертикальна. Поставим задачу: найти общее решение этого уравнения.

Пусть $x = x(t)$, $t \in T$, - произвольное частное решение уравнения (12). Понятно, что промежуток $\mathrm{int}T$ не содержит 0. Следовательно, функция $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ дифференцируема на промежутке $\mathrm{int}T$. При этом $x(t) = y(t)t$. Следовательно, $x'(t) = y'(t)t + y(t)$. Значит, функция y является частным решением уравнения

$$y' = \frac{1}{t}(f(y) - y). \tag{13}$$

Таким образом, каждое частное решение $x = x(t)$, $t \in T$, уравнения (12) представляется в виде $x = ty(t)$, где $y = y(t)$, $t \in T$, - частное решение уравнения (13).

Особые решения $y \equiv y_0$ уравнения (13) порождают *особые решения* уравнения (12) $x = y_0 t$. Здесь значения констант y_0 определяются из условия $f(y_0) = y_0$.

Остальные решения уравнения (13) в окрестностях точек, для которых $f(y(t)) \neq y(t)$, определяются уравнением

$$\int\limits_{y_1}^{y} \frac{d\tau}{f(\tau) - \tau} = \ln|t| + c, \ y_1 \in < a, b >$$

как неявные функции.

С помощью замены переменных

$$y = \alpha x + \beta t + \gamma,\ \tau = Ax + Bt + \Gamma,$$

к однородным уравнениям сводятся дифференциальные уравнения вида:

$$x' = f\left(\frac{\alpha x + \beta t + \gamma}{Ax + Bt + \Gamma}\right), \tag{14}$$

где $\Delta = \alpha B - \beta A \neq 0$. Действительно, пусть $x = x(t)$, $t \in T$, - произвольное частное решение уравнения (14). Положим

$$y = \alpha x + \beta t + \gamma,\ \tau = Ax + Bt + \Gamma. \tag{15}$$

Рассматриваем y как функцию от переменной τ. Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha x'_t + \beta = y'_t, \\ Ax'_\tau + B = \tau'_t; \end{cases}$$

у которой определитель $\Delta \neq 0$, имеем:

$$x'_t = \frac{y'_t B - \tau'_t \beta}{\Delta},\ 1 = \frac{\tau'_t \alpha - y'_t A}{\Delta}.$$

Учитывая, что $y'_t = y'_\tau \cdot \tau'_t$, из второго равенства вытекает $\Delta = \tau'_t(\alpha - y'_\tau A)$. Значит, $\tau'_t \neq 0$ на $\mathrm{int}T$ и

$$x'_t = \frac{y'_t B - \tau'_t \beta}{\tau'_t \alpha - y'_t A} = \frac{y'_\tau B - \beta}{\alpha - y'_\tau A},\ t \in \mathrm{int}T.$$

Следовательно, $\frac{y'_\tau B - \beta}{\alpha - y'_\tau A} = f\left(\frac{y}{\tau}\right)$. Откуда

$$y'_\tau = \frac{B + Af\left(\frac{y}{\tau}\right)}{\beta + \alpha f\left(\frac{y}{\tau}\right)}.$$

Последнее уравнение является однородным.

Пусть $y = y(\tau)$, $\tau \in T$, - произвольное частное решение этого уравнения. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha x + \beta t = y(\tau) - \gamma, \\ Ax + Bt = \tau - \Gamma, \end{cases}$$

находим, тем самым, частное решение уравнения (14) $x = \varphi(\tau)$, $t = \psi(\tau)$, $\tau \in T$, заданное в параметрической форме. Понятно, что таким образом находятся, вообще говоря, не все частные решения уравнения (14), так как соотношения (15) не всегда определяют y как дифференцируемую функцию от переменной τ.

1.9 Линейные уравнения первого порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$x' + px + q = 0, \tag{16}$$

где $p = p(t), q = q(t)$ - непрерывные на промежутке $< a, b >$ функции.

Это уравнение обычно решается методом Бернулли. Пусть $x = x(t)$, $t \in T \subseteq < a, b >$, - произвольное частное решение уравнения (16). Выберем произвольную непрерывную на промежутке $< a, b >$ и дифференцируемую на интервале (a, b) функцию $v = v(t)$, не имеющую нулей на промежутке T. Тогда x представится в виде произведения

$$x(t) = u(t)v(t),\ t \in < a, b >,$$

где $u = x/v$ - непрерывная на промежутке $< a, b >$ и дифференцируемая на интервале (a, b) функция. Тогда для любого $t \in \mathrm{int}T$

$$x' = u'v + uv', u'v + v'u + p(t)uv + q(t) = 0u(v' + p(t)v) + u'v + q(t) = 0.$$

Подберем v из условия: $v' + p(t)v = 0$. Можно считать, например, что

$$v(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right),\quad \text{где } t_0 \in < a, b > .$$

Действительно, в этом случае для любого $t \in (a, b)$

$$v'(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)' = p(t)v(t).$$

После подстановки выбранной функции v в уравнение, получаем

$$u'v + q(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = -\int\limits_{t_1}^{t} \frac{q(\tau)}{v(\tau)} d\tau + c, t_1 \in < a, b > .$$

Значит, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t) = v(t) \left(c - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q(\tau)}{v(\tau)} d\tau \right).$$

Отсюда вытекает, в частности, что каждое частное решение уравнения (16) продолжается до непрерывной на промежутке $< a, b >$ и дифференцируемой на интервале (a, b) функции.

К линейным уравнениям первого порядка сводится так называемое уравнение Бернулли:

$$x' + px + qx^n = 0, n \neq 0, n \neq 1, \tag{17}$$

где функции $p = p(t), q = q(t)$ определены и непрерывны на промежутке $< a, b >$. Константы вида $x \equiv x_0$, где x_0 найдено из условия $x_0 p(t) + q(t) x_0^n \equiv 0$ являются частными решениями этого уравнения и называются *особыми* решениями. Никакие другие константы уравнению (17) не удовлетворяют.

Займемся поиском частных решений отличных от констант. Выберем одно из таких решений $x = x(t)$, $t \in T \subseteq < a, b >$. В окрестности точки $t_0 \in \mathrm{int} T$, для которой

$$x(t)p(t) + q(t)x^n(t) \neq 0,$$

функция $x = x(t)$ отлична от нуля. В этой окрестности функция $x(t)$ представима в виде произведения $x(t) = x^n(t)y(t)$, где $y = x^{1-n}(t)$ - дифференцируемая функция. При этом

$$y' = (1-n)x^{-n}x', x' = y'\frac{x^n}{1-n}.$$

После подстановки в уравнение, получаем

$$y'\frac{x^n}{1-n} + p(t)yx^n + q(t)x^n = 0.$$

Так как $x(t) \neq 0$ в окрестности точки t_0, то

$$y' + p(t)(1-n)y + q(t)(1-n) = 0.$$

Это линейное уравнение первого порядка.

1.10 Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$P(t,x) + Q(t,x)x' = 0, \qquad (18)$$

где функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ определены и непрерывны в односвязной области G и для любых $(t,x) \in G$ выполняется равенство

$$\frac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t,x)}{\partial t},$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*. Это название объясняется тем, что выражение

$$dt(P(t,x) + Q(t,x)x') = P(t,x)dt + Q(t,x)dx$$

является дифференциалом некоторой функции $V(t,x)$, определенной в области G. Поэтому уравнение (18) можно записать в виде

$$dV(t,x) = 0.$$

Первообразную $V(t,x)$ можно найти с помощью криволинейного интеграла

$$V(t,x) = \int\limits_{(t_0,x_0)}^{(t,x)} P(t,x)dt + Q(t,x)dx, \ (t_0,x_0) \in G.$$

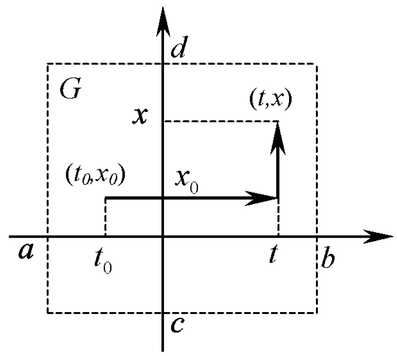
При этом уравнение

$$V(t,x) = c$$

определяет x как неявную функцию t.

Криволинейный интеграл в данном случае не зависит от пути интегрирования. Поэтому кривая интегрирования с концами в точках (t_0,x_0), (t,x) может быть любой кусочно-гладкой кривой, лишь бы она лежала в области G. Если область G совпадает с декартовым произведением двух промежутков

$$< a,b > \times < c,d >,$$



то в качестве такой кривой можно взять объединение двух отрезков, лежащих на прямых $x \equiv x_0$ и $t \equiv t_0$ соответственно. В этом случае общее решение уравнения (18) можно записать в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t} P(t, x_0)dt + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t, x)dx = c, \quad (t_0, x_0) \in G.$$

2 Линейные дифференциальные уравнения

2.1 Линейные дифференциальные уравнения. Вронскиан

Уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x + b = 0,$$

где функции $a_i = a_i(t), b = b(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, принято называть *линейным дифференциальным уравнением.* Если $b = 0$, то уравнение называется *однородным*, в противном случае *неоднородным.*

Из теоремы существования и единственности вытекает, что каждое частное решение линейного дифференциального уравнения единственным образом продолжается до непрерывной на отрезке $[\alpha; \beta]$ функции. Поэтому общее решение линейного дифференциального уравнения можно рассматривать как подмножество пространства $C[\alpha, \beta]$ непрерывных функций на отрезке $[\alpha; \beta]$. Легко увидеть, что общее решение однородного уравнения является линейным подпространством $C[\alpha, \beta]$: оно замкнуто относительно операции сложения функций и операции умножения на константу. Далее мы убедимся, что это подпространство является конечномерным.

Система из k решений $x_1, ..., x_k$ однородного линейного дифференциального уравнения

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = 0, \tag{19}$$

называется *линейно независимой*, если линейная комбинация

$$c_1 x_1 + ... + c_k x_k, c_i \in \mathbf{R}$$

обращается в тождественный ноль на $[\alpha; \beta]$ тогда и только тогда, когда все коэффициенты c_i равны нулю. В противном случае система $x_1, ..., x_k$ называется *линейно зависимой.*

Пусть $x_1, ..., x_k$ - произвольная совокупность решений уравнения (19). Функциональный определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

называется *вронскианом* этой совокупности решений.

Теорема 6 *Вронскиан системы из n решений $x_1, ..., x_k$ уравнения (19) либо тождественный ноль на интервале $(\alpha; \beta)$, либо не обращается в ноль ни в одной точке этого интервала. Причем вронскиан - тождественный ноль, если система $x_1, ..., x_k$ линейно зависима, и не обращается в ноль ни в одной точке $(\alpha; \beta)$, если система линейно независима.*

Доказательство.Пусть $x_1, ..., x_k$ - линейно зависимая совокупность из n решений уравнения (19). Существуют $c_1, ..., c_k \in \mathbf{R}$, не все равные нулю, такие, что $c_1 x_1 + ... + c_k x_k \equiv 0$ на $[\alpha; \beta]$. Продифференцируем это тождество $k-1$ раз. Тогда

$$\begin{cases} c_1 x_1 + ... + c_k x_k = 0, \\ c_1 x_1' + ... + c_k x_k' = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_1 x_1^{(k-1)} + ... + c_n x_k^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Получили n тождеств на интервале $(\alpha; \beta)$. При фиксировании $t \in (\alpha; \beta)$, эта система превращается в однородную систему линейных алгебраических уравнений, которая при этом имеет ненулевое решение $c_1, ..., c_k$. Значит, определитель этой системы уравнений есть ноль. Таким образом, вронскиан совокупности $x_1, ..., x_k$ есть тождественный ноль на интервале $(\alpha; \beta)$.

Обратно. Пусть $x_1, ..., x_k$ - линейно независима совокупность решений уравнения (19). Допустим, что существует $t_0 \in (\alpha; \beta) : W(t_0) = 0$. Значит, система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + ... + c_k x_k(t_0) = 0, \\ c_1 x_1'(t_0) + ... + c_k x_k'(t_0) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_1 x_1^{(k-1)}(t_0) + ... + c_k x_k^{(k-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. Обозначим это решение $\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_k$ и рассмотрим сумму $x = \tilde{c}_1 x_1 + ... + \tilde{c}_k x_k$. Понятно, что эта сумма является решением уравнения (19), удовлетворяющим начальным условиям

$$x(t_0) = 0, x'(t_0) = 0, ..., x^{(k-1)}(t_0) = 0.$$

Но этим же начальным условиям удовлетворяет нулевое решение $x \equiv 0$ уравнения (19). По теореме существования и единственности эти решения обязаны совпасть, то есть

$$\tilde{c}_1 x_1 + ... + \tilde{c}_k x_k \equiv 0.$$

Что противоречит нашему предположению о том, что совокупность $x_1, ..., x_k$ линейно независима. ■

2.2 Общее решение линейного дифференциального уравнения

Всякая линейно независимая система из n решений уравнения (19) называется *фундаментальной* системой решений.

Теорема 7 *Пусть $x_1, ..., x_n$ - фундаментальная система решений уравнения (19). Тогда общее решение этого уравнения исчерпывается функциями, допускающими представление*

$$c_1x_1 + ... + c_nx_n, c_i \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. Согласно теореме существования и единственности нам достаточно показать, что любым начальным условиям удовлетворяют решения вида $c_1x_1+...+c_nx_n$. Зафиксируем конкретные начальные условия:

$$t_0 \in (a, b),\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x'_0, ...,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Для искомого частного решения $c_1x_1 + ... + c_nx_n$ должна выполняться система равенств

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0) + ... + c_nx_n(t_0) = x_0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0) + ... + c_nx_n^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Так как совокупность решений $x_1, ..., x_n$ линейно независима, то определитель

$$\begin{vmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ . & . & . \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

этой системы уравнений отличен от нуля. Это означает, что система разрешима относительно $c_1, ..., c_n$. Найденное решение обозначим $\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n$. Тогда искомым частным решением уравнения (19) является сумма $\tilde{c}_1x_1+...+\tilde{c}_nx_n$. Тем самым, теорема доказана. ■

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_nx = b, a_i, b \in C[\alpha, \beta] \tag{20}$$

Теорема 8 *Сумма произвольного частного решения уравнения (20) и общего решения уравнения (19) есть общее решение уравнения (20).*

Доказательство.Обозначим: $y = y(t)$ - фиксированное частное решение уравнения (20), $x = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ - общее решение уравнения (19). Покажем, что сумма $\tilde{x} = x + y$ есть общее решение уравнения (20). Сначала покажем, что $\tilde{x}$ удовлетворяет уравнению (20). Действительно,

$$\tilde{x}' = x' + y', \tilde{x}'' = x'' + y'', ..., \tilde{x}^{(n)} = x^{(n)} + y^{(n)},$$

и после подстановки в (20), получим

$$(x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_nx) + (y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny) = 0 + b = b.$$

Пусть теперь $\tilde{y}$ - произвольное частное решение уравнения (20). Тогда $\tilde{y}-y$ является частным решением уравнения (19), так как после подстановки в уравнение, получим

$$(\tilde{y}^{(n)} + a_1\tilde{y}^{(n-1)} + ... + a_n\tilde{y}) - (y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny) = b + b = 0.$$

Поэтому существуют константы $\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_m$ такие, что $\tilde{y}-y = \tilde{c}_1x_1+...+\tilde{c}_nx_n$, то есть, $\tilde{y} = y + \tilde{c}_1x_1 + ... + \tilde{c}_mx_m$. ■

2.3 Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)

Для решения произвольного линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и произвольное частное решение неоднородного уравнения. Вторая задача решается с помощью метода Лагранжа, основанного на следующей теореме.

Теорема 9 *Пусть $x_1, ..., x_n$ - фундаментальная система решений уравнения (19). Если функции $c_1 = c_1(t), ..., c_n = c_n(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, дифференцируемы на интервале (α, β) и для каждого $t \in (\alpha, \beta)$ набор значений $c_1'(t), ..., c_n'(t)$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + ... + c_n'(t)x_n(t) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c'(t)_1x_1^{(n-2)}(t) + ... + c_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + ... + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = b(t), \end{cases} \qquad (21)$$

то сумма $c_1x_1 + ... + c_nx_n$ является частным решением уравнения (20)

Доказательство. Рассмотрим произвольную совокупность функций $c_1 = c_1(t), ..., c_n = c_n(t)$ непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$, дифференцируемых на интервале (α, β) и удовлетворяющую системе уравнений (21) при каждом $t \in (\alpha, \beta)$. Покажем, что сумма $x = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ является решением уравнения (20).

Действительно, после дифференцирования, получаем $x' = c_1'x_1 + ... + c_n'x_n + c_1x_1' + ... + c_nx_n'$. Учитывая, что сумма $c_1'x_1 + ... + c_n'x_n$ равна нулю на интервале (α, β), имеем

$$x' = c_1x_1' + ... + c_nx_n'.$$

После второго дифференцирования, $x'' = c_1'x_1' + ... + c_n'x_n' + c_1x_1'' + ... + c_nx_n''$. Учитывая, что сумма $c_1'x_1' + ... + c_m'x_m'$ равна нулю на интервале (α, β), получим

$$x'' = c_1x_1'' + ... + c_nx_n''.$$

Продолжая эту процедуру, на предпоследнем шаге будем иметь

$$x^{(n-1)} = c_1x_1^{(n-1)} + ... + c_nx_n^{(n-1)}.$$

Понятно, что на последнем шаге процедура приводит к равенству

$$x^{(n)} = b + c_1x_1^{(n)} + ... + c_nx_n^{(n)}.$$

Далее осуществим подстановку в уравнение (20) и получим

$$b + c_1(x_1^{(n)} + a_1x_1^{(n-1)} + ... + a_nx_1) + ... + c_n(x_n^{(n)} + a_1x_n^{(n-1)} + ... + a_nx_n) = b.$$

Тем самым теорема доказана. ■

Так как система $x_1, ..., x_n$ предполагается фундаментальной, то ее вронскиан отличен от нуля в любой точке интервала (α, β). Это означает, что система уравнений (21) разрешима и при любом $t \in (\alpha, \beta)$ имеет единственное решение $c_1'(t), ..., c_n'(t)$. Функции $c_1(t), ..., c_n(t)$ можно найти последующим интегрированием.

2.4 Комплексные функции действительного аргумента

Выберем две произвольные действительные функции u, v, определенные и дифференцируемые до порядка n на всей числовой оси. Рассмотрим функцию $w = u + iv$. Она определена на всей числовой оси и принимает комплексные значения. Функция u называется действительной частью функции w и обозначается $\mathrm{Re}w$. Функция v называется мнимой частью функции w и обозначается $\mathrm{Im}w$.

Производной функции w называется функция $w' = u' + iv'$. Естественным образом определяются производные высших порядков: $w'' = (w')', ..., w^{(n)} = (w^{(n-1)})'$. Естественно называть функцию w дифференцируемой до порядка n . Понятно, что комплексная константа является дифференцируемой функцией и имеет нулевую производную.

Отметим используемые ниже свойства производных дифференцируемых комплексных функций: $(w_1 + w_2)' = w_1' + w_2'$, $(w_1w_2)' = w_1'w_2 + w_2'w_1$. Выполнимость первого из них очевидна. Выполнимость второго вытекает из равенств:

$$(w_1w_2)' = [(u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2)]' = (u_1u_2 - v_1v_2)' + i(u_1v_2 + v_1u_2)' =$$
$$= u_1'u_2 + u_2'u_1 - v_1'v_2 - v_2'v_1 + i(u_1'v_2 + v_2'u_1 + v_1'u_2 + u_2'v_1) =$$
$$= [u_1'u_2 - v_1'v_2 + i(u_1'v_2 + v_1'u_2)] + [u_2'u_1 - v_2'v_1 + i(v_2'u_1 + u_2'v_1)] = w_1'w_2 + w_2'w_1.$$

Отсюда следует, в частности, что комплексную константу можно выносить за знак производной: $(\lambda w)' = \lambda w'$. Если комплексные функции w_1, w_2 дифференцируемы до порядка n , то для них справедлива формула Лейбница

$$(w_1w_2)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) w_1^{(n-i)}w_2^{(i)}, \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = \frac{n(n-1) \times ... \times (n-i+1)}{i!}.$$

Действительно, для значения $n = 1$ доказываемое равенство принимает вид $(w_1w_2)' = w_1'w_2 + w_2'w_1$. Предположим, что формула верна для значения $n = k$ и докажем ее выполнимость при значении $n = k + 1$. Имеем

$$(w_1w_2)^{(n)} = \left((w_1w_2)^{(n-1)}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i \end{array} \right) w_1^{(n-i-1)}w_2^{(i)}\right)' =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i \end{array} \right) w_1^{(n-i)}w_2^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i \end{array} \right) w_1^{(n-i-1)}w_2^{(i+1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i \end{array} \right) w_1^{(n-i)}w_2^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i-1 \end{array} \right) w_1^{(n-i)}w_2^{(i)} =$$

$$= w_1^{(n)}w_2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\begin{array}{c} n-1 \\ i \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i-1 \end{array}\right)\right] w_1^{(n-i)}w_2^{(i)} + w_1 w_2^{(n)}.$$

Учитывая соотношение $\left(\begin{array}{c} n-1 \\ i \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ i-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)$, получаем требуемое равенство.

Примером комплексной функции действительного аргумента является показательная функция

$$w = e^{\lambda t}, \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}.$$

Действительно, по формуле Эйлера $e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\sin\beta t$. Следовательно, $w = u + iv$, где $u = e^{\alpha t}\cos\beta t, v = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Найдем производную показательной функции:

$$\left(e^{\lambda t}\right)' = u' + iv' = \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t + i(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t + \beta e^{\alpha t}\sin\beta t) =$$

$$= \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + i\beta e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = \lambda e^{\lambda t}.$$

Используя свойство $(\lambda w)' = \lambda w'$, получаем

$$\left(e^{\lambda t}\right)'' = \lambda^2 e^{\lambda t}, ..., \left(e^{\lambda t}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}, ...$$

2.5 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = 0 \tag{22}$$

с постоянными коэффициентами $a_i \in \mathbf{R},\ i = 1, ..., n$. Уравнение (22) имеет смысл и для комплексных функций действительного аргумента $w = u + iv$. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 10 *Если функция $w = u + iv$ удовлетворяет уравнению (22), то функции u, v тоже удовлетворяют этому уравнению.*

Доказательство.Подставим производные

$$w' = u' + iv', ..., w^{(n)} = u^{(n)} + iv^{(n)}$$

в уравнение (22). Получим

$$(u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + ... + a_n u) + i(v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + ... + a_n v) = 0.$$

По свойствам комплексных чисел последнее равенство означает, что

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + ... + a_n u = 0,\ v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + ... + a_n v = 0.$$

Тем самым, теорема доказана. ■

Многочлен $D(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$ называется *характеристическим* многочленом уравнения (22).

Теорема 11 *Функции* $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, ..., t^{m-1}e^{\lambda_0 t}$, $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, *являются решениями уравнения (22) тогда и только тогда, когда* λ_0 *- корень характеристического многочлена* D *кратности не ниже* m.

Доказательство.Подставим функцию $w_k = ye^{\lambda_0 t}$, где $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, $y = y(t)$ - действительная дифференцируемая до порядка n функция, в уравнение (22). Получим

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} w^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \left(ye^{\lambda_0 t}\right)^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} y^{(j)} \lambda_0^{i-j} e^{\lambda_0 t} = e^{\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} a_{n-i} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} y^{(j)} \lambda_0^{i-j}.$$

Вычисляя сумму элементов треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} \omega_{0,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \omega_{1,0} & \omega_{1,1} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \omega_{n-1,0} & \omega_{n-1,1} & \cdots & \omega_{n-1,n-1} & 0 \\ \omega_{n,0} & \omega_{n,1} & \cdots & \omega_{n,n-1} & \omega_{n,n} \end{pmatrix}$$

можно сначала просуммировать элементы отдельных столбцов матрицы, а затем просуммировать полученные частичные суммы. Но можно и наоборот, сначала просуммировать элементы матрицы по строкам. Это наблюдение доказывает следующее свойство двойных сумм

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \omega_{ij} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \omega_{ij}.$$

Используя это свойство, получим

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} w^{(i)} = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{n-i} \left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \right) y^{(j)} \lambda_0^{i-j} =$$

$$= e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^{(j)}}{j!} \sum_{i=j}^{n} a_{n-i} i(i-1)...(i-j+1)\lambda_0^{i-j} = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{n} \frac{y^{(j)}}{j!} D^{(j)}(\lambda_0).$$

Если $y = t^k$, $k = 0, 1, ..., m-1$, то

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} w^{(i)} = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \frac{k(k-1) \times ... \times (k-j+1)}{j!} t^{k-j} D^{(j)}(\lambda_0) = 0.$$

Так как $D(\lambda_0) = D'(\lambda_0) = ... = D^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$. Таким образом, теорема доказана. ■

2.6 Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Известно, что множество комплексных корней многочлена с действительными коэффициентами разбивается на пары комплексно-сопряженных чисел. При этом кратности комплексно-сопряженных корней совпадают. Каждому вещественному корню λ_0 характеристического многочлена, кратности p, соответствует p действительных решений уравнения (22):

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, ..., t^{p-1} e^{\lambda_1 t}.$$

Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности q соответствует $2q$ действительных решений уравнения (22):

$$e^{\alpha t} cos\beta t, e^{\alpha t} sin\beta t, te^{\alpha t} cos\beta t, te^{\alpha t} sin\beta t, ..., t^{q-1} e^{\alpha t} cos\beta t, t^{q-1} e^{\alpha t} sin\beta t.$$

Понятно, что общее число полученных таким образом действительных решений уравнения (22) совпадает с порядком уравнения n. Обозначим эту совокупность частных решений уравнения (22) $x_1, ..., x_n$.

Теорема 12 *Система $x_1, ..., x_n$ решений уравнения (22) является фундаментальной системой решений.*

Доказательство.Достаточно показать, что совокупность $x_1, ..., x_n$ линейно независима. Для этого докажем, что вронскиан W этой системы отличен от нуля в точке $t = 0$. Предположим противное

$$\begin{vmatrix} x_1(0) & \cdots & x_n(0) \\ x_1'(0) & \cdots & x_n'(0) \\ . & . & . \\ x_1^{(n-1)}(0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Между строками этого определителя существует линейная зависимость. Коэффициенты этой зависимости обозначим $1, c_1, ..., c_{m-1}$, где $m \leqslant n$. Тогда

$$x_i^{(m-1)}(0) + c_1 x_i^{(m-2)}(0) + ... + c_{m-1} x_i(0) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{23}$$

Обозначим D_1 многочлен $\lambda^{m-1} + c_1\lambda^{m-2} + ... + c_{m-1}$ и рассмотрим функцию $w = t^k e^{\lambda_0 t}$, где λ_0 - корень характеристического многочлена D уравнения (22) кратности $p > k$. Если λ_0 - действительный корень, то функция w является действительной и принадлежит совокупности $\{x_1, ..., x_n\}$. Значит, она удовлетворяет условию (23). Если $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ - комплексный корень, то функции $\mathrm{Re} w = t^k e^{\alpha_0 t} cos\beta_0 t$, $\mathrm{Im} w = t^k e^{\alpha_0 t} sin\beta_0 t$ принадлежат совокупности $\{x_1, ..., x_n\}$. Значит, они тоже удовлетворяют условию (23). Отсюда вытекает, что в любом случае условию (23) удовлетворяет сама функция w. Значит,

$$0 = w^{(m-1)} + c_1 w^{(m-2)} + ... + c_{m-1} w \,\Big|_{t=0} =$$

$$= e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \frac{k(k-1) \times ... \times (k-j+1)}{j!} t^{k-j} D^{(j)}(\lambda_0) \Bigg|_{t=0} = \frac{1}{k!} D^{(k)}(\lambda_0).$$

Следовательно, $D_1(\lambda_0) = D_1^{(1)}(\lambda_0) = ... = D_1^{(p-1)}(\lambda_0) = 0$. Таким образом, все корни многочлена D с учетом кратности являются корнями многочлена D_1. Отсюда следует, что многочлен D_1 имеет степень n. Это означает, что $m = n + 1 > n$. Пришли к противоречию. Тем самым, теорема доказана. ■

Из доказанной теоремы вытекает, что общее решение уравнения (22) имеет вид

$$x = c_1 x_1 + \; ... \; + c_m x_m,$$

где $c_1, ..., c_2$ - произвольные постоянные.

2.7 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x = f, \tag{24}$$

где $a_j \in R$, $f(t) = (p(t) \cos\beta_0 t + q(t) \sin\beta_0 t) e^{\alpha_0 t}$, p, q - многочлены от t, $\alpha_0, \beta_0 \in R$. Общее решение этого уравнения представляется в виде суммы общего решения уравнения (22) и произвольного частного решения этого уравнения. Частное решение рассматриваемого уравнения можно найти, используя метод неопределенных коэффициентов. Метод неопределенных коэффициентов состоит в подборе констант, входящих в общую форму записи предполагаемого частного решения. Для осуществления этого метода необходимо знать, в каком виде следует искать частное решение уравнения (24). Пусть m_1, m_2 - степени многочленов p и q соответственно, k - кратность $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ как корня характеристического многочлена

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Прежде всего, рассмотрим частный случай: $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. В этом случае

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-k}\lambda^k, \quad a_{n-k} \neq 0,$$

$$f(t) = p(t) = b_0 t^m + ... + b_{m-1} t + b_m, \quad b_0 \neq 0.$$

Используя обозначение $D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-k} x^{(k)}$, уравнение (24) можно записать в виде

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + ... + b_{m-1} t + b_m, \quad t \in R.$$

При этом

$$\begin{array}{l} D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) t^k \quad = a_{n-k} k!\ , \\ D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) t^{k+1} = a_{n-k-1}(k+1)! \quad + \quad a_{n-k}\frac{(k+1)!}{1!} t\ , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) t^{k+m} = a_{n-k-m}(k+m)! \ + \ a_{n-k-m+1}\frac{(k+m)!}{1!} t + ... + a_{n-k}\frac{(k+m)!}{m!} t^m\ . \end{array},$$

Подберем $c_0, c_1, ..., c_m$ из условий

$$\begin{cases} b_0 \quad = a_{n-k}\frac{(k+m)!}{m!} c_0\ , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ b_{m-1} = a_{n-k-m+1}\frac{(k+m)!}{1!} c_0 + ... + a_{n-k}\frac{(k+1)!}{1!} c_{m-1}\ , \\ b_m \quad = \quad a_{n-k-m}(k+m)! c_0 \quad + ... + a_{n-k-1}(k+1)! c_{m-1} + a_{n-k} k! c_m\ . \end{cases}$$

Это возможно, так как определитель данной системы линейных уравнений

$$a_{n-k}^{m+1} \frac{k!}{0!} \frac{(k+1)!}{1!} \times ... \times \frac{(k+m)!}{m!}$$

отличен от нуля. Легко увидеть, что

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(c_0 t^{m+k} + ... + c_{m-1} t^{1+k} + c_m t^k\right) = b_0 t^m + ... + b_{m-1} t + b_m.$$

Таким образом, частное решение уравнения (24), в рассматриваемом случае, можно подобрать в виде произведения

$$t^k P(t),$$

где P - некоторый многочлен степени m. Далее рассмотрим общий случай. По формуле Эйлера

$$f(t) = \left(p(t) \frac{e^{i\beta_0 t} + e^{-i\beta_0 t}}{2} + q(t) \frac{e^{i\beta_0 t} - e^{-i\beta_0 t}}{2i}\right) e^{\alpha_0 t} =$$

$$= r(t)\ e^{\lambda_0 t} + \overline{r(t)}\, e^{\overline{\lambda_0}\, t},$$

где $\overline{\lambda_0} = \alpha_0 - i\beta_0$, $r(t) = \frac{1}{2}(p(t) - iq(t))$, $\overline{r(t)} = \frac{1}{2}(p(t) + iq(t))$. Рассмотрим два уравнения

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x(t) = r(t)\ e^{\lambda_0 t}, \tag{25}$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x(t) = \overline{r(t)}\ e^{\overline{\lambda_0}\, t}. \tag{26}$$

Если $x = x(t)$ - частное решение уравнения (25), то $\overline{x} = \overline{x(t)}$ - частное решение уравнения (26). Действительно, по свойствам операции перехода к комплексно-сопряженному числу $a + ib \to a - ib$ имеем

$$D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \overline{x(t)} = \overline{D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x(t)} = \overline{r(t)\ e^{\lambda_0 t}} = \overline{r(t)}\ e^{\overline{\lambda_0} t}.$$

Частное решение уравнения (25) будем искать в виде $(u(t) + iv(t))\, e^{\lambda_0 t}$. После подстановки в уравнение, получаем

$$r(t)\, e^{\lambda_0 t} = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{u^{(j)}(t) + iv^{(j)}(t)}{j!} D^{(j)}(\lambda_0)\right) e^{\lambda_0 t}.$$

Это означает, что функции $u = u(t)$, $v = v(t)$ должны удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям

$$\frac{D^{(n)}(\lambda_0)}{n!}u^{(n)} + \frac{D^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}u^{(n-1)} + ... + \frac{D^{(k)}(\lambda_0)}{k!}u^k = \frac{1}{2}p,$$

$$\frac{D^{(n)}(\lambda_0)}{n!}v^{(n)} + \frac{D^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}v^{(n-1)} + ... + \frac{D^{(k)}(\lambda_0)}{k!}v^{(k)} = -\frac{1}{2}q,$$

соответственно. Отсюда вытекает, что функции u и v можно подобрать в виде

$$u = \frac{1}{2}t^k P(t), \quad v = \frac{1}{2}t^k Q(t),$$

где P, Q - многочлены степени m_1, m_2 соответственно. Значит, частные решения уравнений (25) и (26) можно подобрать в виде

$$t^k R(t) e^{\lambda_0 t}, \quad t^k \overline{R(t)} e^{\overline{\lambda_0} t},$$

соответственно. Здесь $R(t) = \frac{1}{2}(P(t) + iQ(t))$, $\overline{R(t)} = \frac{1}{2}(P(t) - iQ(t))$. Сумма этих функций

$$t^k \left(R(t) e^{\lambda_0 t} + \overline{R(t)} e^{\overline{\lambda_0} t} \right) = t^k e^{\alpha_0 t} \left[P(t) cos\beta_0 t + Q(t) sin\beta_0 t \right]$$

является частным решением уравнения (24). Таким образом, частное решение уравнения (24) следует искать в виде

$$t^k (P(t) cos\beta_0 t + Q(t) sin\beta_0 t) e^{\alpha_0 t},$$

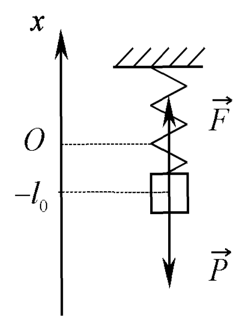
где P, Q - многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

2.8 Колебательные явления

2.8.1 Свободные колебания в среде без сопротивления

К ненагруженной пружине, конец которой совмещен с началом координат, направленной по вертикали вверх, числовой оси Ox, подвесим тело массой m. На рассматриваемое тело действуют сила тяжести $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ и сила упругости $\overrightarrow{F}$. Эти силы противоположно направлены и равны по величине. По закону Гука $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{l}$, где $\overrightarrow{l}$ - вектор приращения длины пружины, k - коэффициент жесткости пружины. Значит, подвешенное тело удлиняет пружину на величину $l_0 = mg/k$.

Выведем тело из положения равновесия, придав ему начальную скорость $\vec{v}_0$, направленную вертикально вверх. Обозначим $x = x(t)$ координату центра тяжести тела в момент времени t. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ центр тяжести тела имел координату $x(0) = -\, l_0$. По второму закону Ньютона



$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} = k\vec{l} + m\vec{g}.$$

Перейдем к проекциям на ось Ox

$$x'' + \frac{k}{m}x + g = 0.$$

Таким образом, координата $x = x(t)$ центра тяжести тела описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен этого уравнения имеет вид $D(\lambda) = \lambda^2 + k/m$. Этот многочлен имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \pm\,\omega i$, где $\omega = \sqrt{k/m}$. Значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - l_0.$$

Учитывая, что $x(0) = -\, l_0$, $x'(0) = v_0$, имеем $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{v_0}{\omega}$. Следовательно,

$$x - x_0 = A \sin \omega t.$$

Здесь $A = \frac{v_0}{\omega}$ - амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия), ω - циклическая частота колебаний (число полных колебаний за время $\Delta t = 2\pi$), $x_0 = -\, l_0$ - координата положения равновесия.

2.8.2 Свободные колебания в среде с сопротивлением

Будем считать, что среда оказывает сопротивление движению тела, при этом сила сопротивления пропорциональна скорости $\mu\vec{v}$. По второму закону Ньютона имеем векторное равенство

$$m\vec{a} = m\vec{g} + k\vec{l} + \mu\vec{v}.$$

Переходя к проекциям, получаем

$$x'' + 2px' + \omega^2 x + g = 0,$$

где $2p = \mu/m$. Характеристический многочлен имеет вид $D(\lambda) = \lambda^2 + 2p\lambda + \omega^2$. Этот многочлен имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2}$. Рассмотрим все возникающие ситуации.

а. $p^2 < \omega^2$ (сопротивление среды незначительное). В этом случае корни характеристического многочлена имеют вид

$$\lambda_1 = -p + \omega_1 i, \;\; \lambda_2 = -p - \omega_1 i,$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - p^2}$. Общее решение дифференциального уравнения можно в этом случае записать так:

$$x = e^{-pt}(c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t) \; - l_0.$$

Учитывая начальные условия

$$x(0) = c_1 - l_0 = -l_0, \quad x'(0) = -pc_1 + \omega_1 c_2 = v_0,$$

получаем $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{v_0}{\omega_1}$. Следовательно,

$$x - x_0 = Ae^{-pt} \sin\omega_1 t.$$

Видим, что циклическая частота колебаний $\omega_1 < \omega$ уменьшилась. Амплитуда колебаний $Ae^{-pt} = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-pt}$ уменьшается со временем, то есть колебания не прекращаются, но являются затухающими.

б. $p^2 \geqslant \omega^2$ (значительное сопротивление среды). В случае $p^2 > \omega^2$ корни характеристического многочлена имеют вид

$$\lambda_1 = -p + h, \;\; \lambda_2 = -p - h,$$

где $h = \sqrt{p^2 - \omega^2}$. Общее решение уравнения можно записать так:

$$x = e^{-pt}\left(c_1 e^{ht} + c_2 e^{-ht}\right) - l_0.$$

Видим, что в данной ситуации движение тела теряет колебательный характер. Учитывая начальные условия

$$x(0) = c_1 + c_2 - l_0 = -\,l_0, \quad x'(0) = c_1(h-p) - c_2(h+p) = v_0,$$

получаем $c_1 = \frac{v_0}{2p}$ $\quad c_2 = -\frac{v_0}{2p}$. Значит,

$$x - x_0 = \frac{v_0}{2p} e^{-pt} \mathrm{sh}\, ht.$$

Вычисляя производную этой функции, легко выяснить, что она имеет на луче $(0, +\infty)$ единственный экстремум, определяемый из уравнения $\mathrm{th}\; ht = \frac{h}{p}$. Таким образом, в рассматриваемом случае тело, отклонившись от положения равновесия, с течением времени стремится вернуться в это положение, никогда его не достигая. В случае $p^2 = \omega^2$ корни характеристического многочлена имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -p.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$x = e^{-pt}(c_1 + c_2 t) - l_0.$$

Учитывая начальные условия, имеем $c_1 = 0$, $c_2 = v_0$. Значит,

$$x - x_0 = v_0 t e^{-pt}.$$

Таким образом, поведение тела аналогично его поведению в случае $p^2 > \omega^2$.

2.8.3 Вынужденные колебания в среде без сопротивления. Резонанс

Далее будем считать, что среда не оказывает сопротивления, но на тело действует внешняя периодическая сила $\vec{R}$. Для определенности положим $R = rm\ \sin qt$, $r, q > 0$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}.$$

Перейдем к проекциям на ось Ox

$$x'' + \omega^2 x = r \sin qt - g.$$

Легко проверить, что при $\omega \neq q$ функция $\frac{r}{\omega^2-q^2}\sin qt - l_0$ является частным решением этого уравнения. Значит, общее решение можно записать в виде

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{r}{\omega^2 - q^2} \sin qt - l_0.$$

Учитывая начальные условия, получаем

$$x - x_0 = A \sin \omega t + \frac{r}{\omega^2 - q^2} \sin qt.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае отклонение тела от положения равновесия ограничено во времени и не превосходит числа $A + \frac{r}{\omega^2-q^2}$.

Рассмотрим случай $\omega = q$. В этом случае одно из частных решений дифференциального уравнения имеет вид

$$-\frac{r}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Значит, общее решение можно записать в виде

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t - \frac{r}{2\omega} t \cos \omega t - l_0.$$

Учитывая начальные условия, получаем

$$x - x_0 = A \sin \omega t - \frac{r}{2\omega} t \cos \omega t,$$

Видим, что независимо от величины внешнего воздействия r максимальное отклонение тела от положения равновесия со временем неограниченно возрастает. Это явление в механике принято называть *резонансом*.

3 Дифференциальные уравнения в частных производных

3.1 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим физическое тело Ω (область в $\mathbf{R}^3$). Температуру этого тела в точке x в момент времени t обозначим $T = T(x,t)$.

Выберем внутри тела Ω произвольную точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ и зафиксируем момент времени $t = t_0$. Придадим каждой из переменных x_1, x_2, x_3, t приращение $h > 0$ и построим кубик ω в теле Ω с ребрами длиной h. По закону теплопроводности Ньютона количество теплоты, протекающее через площадку, пропорционально ее площади, времени протекания и скорости изменения температуры в направлении нормали к площадке. Частная производная $\frac{\partial T}{\partial x_1}$, характеризующая скорость изменения температуры тела в направлении оси x_1, вообще говоря, принимает различные значения в различных точках Ω. Однако, если предположить, что функция $T = T(x,t)$ является дифференцируемой до второго порядка, то значения функции $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ в точках левой грани кубика ω в любой момент времени из промежутка $(t_0, t_0 + h)$ можно считать постоянным и равным $\frac{\partial T(x^{(0)},t_0)}{\partial x_1}$.

Следовательно, количество теплоты, протекающее через левую грань ω справа на лево, в промежуток времени $(t_0, t_0 + h)$, равно

$$\alpha \frac{\partial T(x^{(0)}, t_0)}{\partial x_1} h^3,$$

где α — коэффициент теплопроводности тела Ω, который мы считаем постоянным в любой его точке. В то же время, количество теплоты, протекающее через правую грань ω справа на лево равно

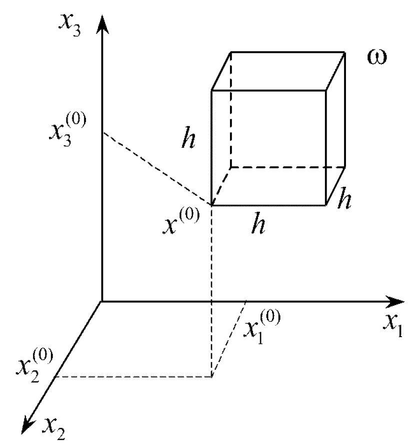
$$\alpha \frac{\partial T(x_1^{(0)} + h, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t_0)}{\partial x_1} h^3.$$

Таким образом, количество теплоты ΔQ_1, вошедшее в ω за время h через левую и правую его грани, равно

$$\alpha \left(\frac{\partial T(x_1^{(0)} + h, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial T(x^{(0)}, t_0)}{\partial x_1} \right) h^3.$$

Если предположить, что функция $T = T(x, t)$ является непрерывно дифференцируемой до второго порядка, то

$$\Delta Q_1 = \alpha \frac{\partial^2 T(x^{(0)}, t_0)}{\partial x_1^2} h^4.$$



Тем самым, общее количество теплоты $\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3$, вошедшее в кубик ω, равно

$$\Delta Q = \alpha \left. \Delta T \right|_{(x^{(0)}, t_0)} h^4, \tag{27}$$

где

$$\left. \Delta T \right|_{(x^{(0)}, t_0)} = \frac{\partial^2 T(x^{(0)}, t_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x^{(0)}, t_0)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T(x^{(0)}, t_0)}{\partial x_3^2}.$$

С другой стороны, количество теплоты в кубике ω в момент времени t_0 равно $\beta T(x^{(0)}, t_0) h^3$, а в момент времени $t_0 + h$ равно $\beta T(x^{(0)}, t_0 + h) h^3$. Здесь β — удельная теплоемкость тела Ω, которую мы считаем постоянной в любой его точке. Следовательно,

$$\Delta Q = \beta \left[T(x^{(0)}, t_0 + h) - T(x^{(0)}, t_0) \right] h^3$$

Значит,

$$\Delta Q = \beta \frac{\partial T(x^{(0)}, t_0)}{\partial t} h^4. \tag{28}$$

Отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ обозначим a^2. Из (27), (28) и произвольности выбора точки $(x^{(0)}, t_0)$ вытекает, что функция T удовлетворяет на области Ω функциональному уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T.$$

Это уравнение называется уравнением *теплопроводности.* Оно является примером линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

3.2 Задача Дирихле

Как и обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных имеет бесконечное множество решений. Чтобы выделить в этом множестве конкретное решение, необходимо сформулировать дополнительные условия. К таковым относятся так называемые *начальные* и *граничные* условия. Рассмотрим формулировку этих условий на примере уравнения теплопроводности:

1) $T(x, 0) = f(x) \ \forall x \in \Omega$, где f — фиксированная непрерывная на замыкании области Ω функция;

2) $T(x, t) = F(x, t) \ \forall x \in \partial\Omega$, где F — фиксированная непрерывная на границе области Ω функция.

Условие 1) называется начальным. С физической точки зрения наложение этого условия задает распределение температуры внутри тела Ω в начальный момент времени $t = 0$. Условие 2) называется граничным. Оно задает распределение температуры и ее зависимость от времени в граничных точках области Ω. Например, если тело Ω находится в среде с постоянной температурой, то функция $F(x, t)$ является константой. Понятно, что функции f и F должны быть связаны условием $f(x) = F(x, 0) \ \forall x \in \partial\Omega$.

Обратимся к частному случаю. Распределение температуры в теле Ω называется *стационарным*, если температура тела зависит от точки $x \in \Omega$, но не зависит от времени t, то есть $T = T(x)$. В этом случае $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Следовательно, функция T удовлетворяет уравнению

$$\Delta T = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Лапласа.* Частные решения этого уравнения называются *гармоническими* в области Ω функциями. Другими словами, гармоническая в области Ω функция T — функция, имеющая непрерывные частные производные второго порядка на области Ω и удовлетворяющая на ней уравнению $\Delta T = 0$. Из этого определения вытекает, что гармонические в области Ω функции, и только они, определяют стационарные распределения температуры тела Ω. Формулировка начального условия для уравнения Лапласа теряет смысл, и выделение конкретного решения из множества всех частных решений осуществляется наложением лишь граничного условия.

Теорема 13 *Пусть ограниченная область Ω имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, на которой задана непрерывная функция F. Тогда существует единственная, непрерывная на замыкании $\Omega \cup \partial\Omega$ функция T, гармоническая на Ω, такая, что $T|_{\partial\Omega} = F$.*

Эта теорема имеет очевидную физическую интерпретацию. Если на границе $\partial\Omega$ тела Ω все время поддерживать температуру T, равную $T|_{\partial\Omega} = F$, где F — заданная на $\partial\Omega$ функция, то внутри тела установится вполне определенная температура $T(x)$. Это утверждение с физической точки зрения надо считать очевидным. С математической точки зрения оно таковым не является. Вместе с тем, задача определения функции $T(x)$, называемая задачей Дирихле, исследована очень хорошо. Известны различные точные и приближенные методы ее решения. Задача Дирихле имеет большое значение и в плоском случае, в условиях которого она формулируется аналогично. Пусть на кусочно-гладкой границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ задана непрерывная функция F. Требуется найти функцию T, непрерывную на замыкании $\Omega \cup \partial\Omega$ и гармоническую в области Ω, удовлетворяющую условию: $T|_{\partial\Omega} = F$. Иногда решение задачи Дирихле в плоском случае требует перехода к полярным координатам с помощью известного преобразования $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$. Найдем вид уравнения Лапласа

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0$$

в полярных координатах. Используя теорему о производной сложной функции, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial T}{\partial x_2}\sin\theta,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial T}{\partial x_1}\sin\theta + \frac{\partial T}{\partial x_2}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}\sin 2\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\sin^2\theta,$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}\sin 2\theta + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\cos^2\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial x_1}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial x_2}\sin\theta.$$

Отсюда вытекает, что уравнение Лапласа в полярных координатах имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0.$$

3.3 Задача Дирихле для круга

Особенно важны те случаи, когда задача Дирихле решается эффективно. К таковым относится случай, рассматриваемый в этом параграфе. Пусть Ω — открытый единичный круг с центром в начале координат; $\partial\Omega$ — единичная окружность. Точка единичной окружности $\partial\Omega$ однозначно определяется значением полярного угла θ. Задать непрерывную функцию на $\partial\Omega$ — значит выбрать непрерывную периодическую с периодом 2π функцию $F(\theta)$.

Теорема 14 *На замыкании $\Omega \cup \partial\Omega$ круга Ω существует и притом единственная функция $T(\rho, \theta)$, непрерывная на нем, гармоническая в круге Ω и равная $F(\theta)$ на окружности $\partial\Omega$: $T(1, \theta) = F(\theta)$. В полярных координатах функция $T(\rho, \theta)$ записывается в виде ряда*

$$T(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \tag{29}$$

где a_k, b_k, $k = 0, 1, ...,$ — коэффициенты Фурье функции $F(\theta)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Доказательство.Докажем теорему в предположении, что функция $F(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема, хотя теорема верна и без этого предположения. При этом вопрос единственности решения задачи Дирихле оставим без обсуждения.

Разложим функцию $F(\theta)$ в ряд Фурье

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Используя метод интегрирования по частям, коэффициенты Фурье функции $F(\theta)$ можно записать в виде

$$a_k = -\frac{1}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi} F''(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad b_k = -\frac{1}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi} F''(\theta) \sin k\theta d\theta, k = 1, 2, ...$$

Непрерывность второй производной F'' влечет ее ограниченность на отрезке $[-\pi, \pi]$. Следовательно,

$$|a_k|,\ |b_k|\ \le \frac{2M}{k^2}, k = 1, 2, ...,$$

где M — максимум функции $|F''(\theta)|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Кроме того, так как для точек круга $\Omega \cup \partial\Omega$ выполняется неравенство $\rho \le 1$, то

$$|\rho^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)|\ \le\ |a_k| + |b_k|.$$

Числовые ряды

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \le \frac{|a_0|}{2} + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходятся и являются мажорантными на круге $\Omega \cup \partial\Omega$ по отношению к функциональному ряду (29). Значит, по признаку Вейерштрасса ряд (29) сходится равномерно на круге $\Omega \cup \partial\Omega$. Это влечет непрерывность функции $T(\rho, \theta)$ на круге $\Omega \cup \partial\Omega$. При этом на круге Ω имеют место тождества

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\rho^{k-2}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k}(-a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\rho^{k}(-a_k \cos k\theta - b_k \sin k\theta).$$

Действительно, убедимся, что операции почленного дифференцирования осуществлены корректно на примере двух последних из них. Выберем $0 < \rho_0 < 1$ и рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho_0^{k}(-a_k \sin k\theta + b_k \cos k\theta),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \rho_0^k(-a_k \cos k\theta - b_k \sin k\theta).$$

Члены этих рядов по модулю не превышают соответственно

$$\rho_0^k k \frac{4M}{k^2} \leq 4M\rho_0^k,$$

$$\rho_0^k k^2 \frac{4M}{k^2} = 4M\rho_0^k.$$

При этом числовой ряд $4M \sum\limits_{k=1}^{\infty} \rho_0^k$ сходится. Следовательно, эти ряды сходятся равномерно в окрестности любой точки $\theta \in [-\pi, \pi]$. Значит, функциональный ряд

$$T(\rho_0, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_0^k(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

можно почленно дифференцировать по переменной θ, во всяком случае, два раза. Осталось провести подстановку в уравнений Лапласа в полярных координатах и убедиться, что $T(\rho, \theta)$ является гармонической функцией на круге Ω. ■

3.4 Уравнение теплопроводности в стержне

Рассмотрим изолированный стержень, лежащий на отрезке $[0, \pi]$ оси x. Считаем, что стержень имеет пренебрежимо малую площадь сечения. Кроме того, предполагается, что физические свойства стержня в точках любого сечения одинаковы. При этих условиях температура стержня выражается функцией $T = T(x,t)$ двух переменных — абсциссы x и времени t, и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{30}$$

где a^2 — константа. Поставим задачу: найти функцию $T(x,t)$, непрерывную в области

$$\{(x,t) : x \in [0,\pi], t \geq 0\},$$

имеющую в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$, удовлетворяющую в ней дифференциальному уравнению (30) и следующим условиям:

1) начальному условию

$$T(x,0) = f(x)\ \forall x \in [0,\pi], \tag{31}$$

2) граничному условию

$$T(0,t) = T(\pi,t) = 0\ \forall t > 0. \tag{32}$$

Уравнение (30) будем решать методом разделения переменных (методом Фурье). Суть этого метода заключается в том, что искомое частное решение уравнения представляется в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной:

$$T(x,t) = U(x)V(t).$$

После дифференцирования, получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = V\frac{d^2U}{dx^2} = VU'',$$

$\frac{\partial T}{\partial t} = U\frac{dV}{dt} = UV'$. Подставляя эти выражения в (30), получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{V'}{V} = \frac{U''}{U}.$$

Переменные x и t являются независимыми, следовательно,

$$\frac{1}{a^2}\frac{V'}{V} = \frac{U''}{U} = -\mu,$$

где μ — постоянная величина. Таким образом, функции $U(x)$ и $V(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$U'' + \mu U = 0, \tag{33}$$

$$V' + a^2\mu V = 0. \tag{34}$$

Прежде всего, обратимся к уравнению (33). Искомое частное решение этого уравнения должно удовлетворять условиям

$$T(0,t) = U(0)V(t) = 0,\ \ T(\pi,t) = U(\pi)V(t) = 0.$$

Мы ищем отличное от тождественного нуля решение уравнения (30). Поэтому естественно предполагать, что функция $V(t)$ отлична от тождественного нуля. Это означает, в частности, что

$$U(0) = U(\pi) = 0. \tag{35}$$

Будем считать, что $\mu = \lambda^2 > 0$. В этом случае общее решение уравнения (33) запишется так:

$$U(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Учитывая (35), получаем

$$C_1 = 0,\ C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi = 0$$

или

$$C_1 = 0,\ C_2 \sin \lambda\pi = 0.$$

Чтобы получить нетривиальное решение нужно считать, что $C_2 \neq 0$. Следовательно, $\sin \lambda\pi = 0$. Последнее возможно, если $\lambda = k \in \mathbf{N}$. При этом каждому значению k соответствует частное решение

$$U_k(x) = d_k \sin kx,$$

удовлетворяющее начальному условию (35), где d_k - произвольная постоянная.

Остается решить уравнение (34) при найденных значениях $\mu = k^2, k \in \mathbf{N}$:

$$V' + a^2k^2V = 0,$$

$$\frac{dV}{V} = -a^2k^2dt,$$

$$V(t) = A_k \exp(-a^2k^2t),$$

где A_k - произвольная постоянная.

В итоге,

$$T_k(x,t) = b_k \exp(-a^2k^2t) \sin kx, b_k = A_k d_k,$$

- частные решения уравнения (30), удовлетворяющие граничному условию (32).

Легко видеть, что конечная сумма

$$T_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} T_k(x,t) = \sum_{k=1}^{N} b_k \exp(-a^2k^2t)\sin kx,$$

где b_k — произвольные постоянные, в свою очередь является решением дифференциального уравнения (30), удовлетворяющим условию (32). Тем же свойством обладает сумма функционального ряда

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-a^2k^2t)\sin kx \tag{36}$$

при достаточно малых b_k.

Подберем b_k так, чтобы для любого $x \in [0,\pi]$ выполнялось равенство

$$T(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Для этого достаточно положить

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin ktdt.$$

Если функция f непрерывно дифференцируема до второго порядка, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k \exp(-a^2k^2t)\sin kx| \le \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \le 2M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty, t \ge 0.$$

Следовательно, ряд (36) сходится равномерно на области $\{(x,t) : x \in [0,\pi], t \ge 0\}$. Его сумма $T(x,t)$ непрерывна в этой области. Более того, функция $T(x,t)$ имеет частные производные $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\frac{dT}{dt}$ в области $\{(x,t) : x \in (0,\pi), t > 0\}$, которые можно вычислить почленным дифференцированием ряда (36):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \exp(-a^2k^2t)\cos kx,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2b_k \exp(-a^2k^2t)\sin kx,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx.$$

Отсюда видно, что функция $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению (30).

Законность почленного дифференцирования ряда (36) вытекает из следующих оценок

$$|kb_k \exp(-a^2k^2t)\cos kx|,\ |k^2 b_k \exp(-a^2k^2t)\sin kx| \leq$$
$$\leq 2M \exp(-a^2k^2t_0), \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

и факта сходимости числового ряда

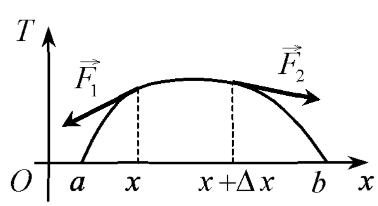
$$2M \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-a^2k^2t_0),$$

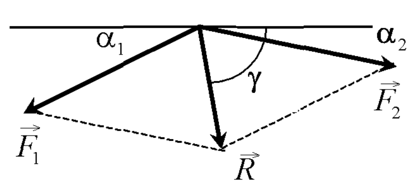
которую можно проверить с помощью признака Даламбера.

3.5 Волновое уравнение

Струной называется тонкая нить, работающая на растяжение, но не на изгиб. Если ненатянутую струну мять, она не сопротивляется, однако если ее растягивать, то в ней возникают напряжения. Пусть концы куска натянутой струны закреплены в точках $x = a, x = b$ оси x. Плотность струны будем считать равной числу ρ на всем ее протяжении. В момент времени $t = 0$ выведем нашу струну из равновесия и предоставим ей свободно совершать колебания. Отклонение струны в любой ее точке, имеющей абсциссу x, в момент времени t обозначим

$$u = u(x,t), x \in [a,b], t \geq 0.$$





Считаем, что эта функция непрерывно дифференцируема до второго порядка. Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция u при малых колебаниях струны. На рисунке изображено положение нашей струны, в момент времени t. На элемент ее, соответствующий отрезку $[x, x+\Delta x]$, действуют две силы натяжения $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$. Сила $\overrightarrow{F_1}$ приложена к точке, имеющей абсциссу x, направлена по касательной к струне в этой точке и образует с положительным направлением оси x угол α_1. Сила $\overrightarrow{F_2}$ приложена к точке, имеющей абсциссу $x+\Delta x$, направлена по касательной к струне в этой точке и образует с положительным направлением оси x угол α_2. Равнодействующая этих сил $\overrightarrow{R} = m\overrightarrow{a}$ образует угол γ с положительным направлением оси x. Вес струны учитывать не будем. Это возможно, если ρ очень мало или струна находится в состоянии невесомости.

По второму закону Ньютона

$$F_2 \cos\alpha_2 - F_1 \cos\alpha_1 = R\cos\gamma,$$

$$F_2 \sin\alpha_2 - F_1 \sin\alpha_1 = R\sin\gamma.$$

Из первого соотношения вытекает равенство $F_2 = F_1 + A$, где

$$A = \frac{F_1}{\cos\alpha_2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + \frac{R}{\cos\alpha_2}\cos\gamma.$$

Из второго соотношения вытекает равенство $F_1\ (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = R\sin\gamma - A\sin\alpha_2$. Значит,

$$F_1\ (\mathrm{tg}\ \alpha_2 - \mathrm{tg}\ \alpha_1) = B,$$

где

$$B = F_1\ [(\mathrm{tg}\ \alpha_2 - \sin\alpha_2) - (\mathrm{tg}\ \alpha_1 - \sin\alpha_1)] + R\sin\gamma - A\sin\alpha_2.$$

Следовательно,

$$F_1\ \frac{u'_x(x+\Delta x, t) - u'_x(x,t)}{\Delta x} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{B}{\Delta x} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим

$$F_1\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{B}{\Delta x} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= F_1\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}(1-\cos^3\alpha_1+\cos\alpha_1\sin^2\alpha_1)-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{tg}^2\alpha_1. \qquad (37)$$

Действительно, используя теорему Коши о конечных приращениях, легко увидеть, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}[(\mathrm{tg}\ \alpha_2-\sin\alpha_2)-(\mathrm{tg}\ \alpha_1-\sin\alpha_1)]=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}(1-\cos^3\alpha_1).$$

Учитывая, что $\alpha = arctgu'_x$, легко получить равенства

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{\Delta x}=-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\sin\alpha_1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}=-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1.$$

Учитывая, что $m=\rho\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+(u'_x(\xi,t))^2}d\xi$, легко получить равенства

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{R}{\Delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{ma}{\Delta x}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\frac{\rho}{\cos\alpha_1}.$$

Кроме того, следует учесть, что $\gamma\to\frac{\pi}{2}-\alpha_1$ при $\Delta x\to 0$.

При малых колебаниях струны правая часть (37) пренебрежимо мала. Опуская ее, получаем уравнение

$$a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\ ,$$

где $a^2=\frac{F_1}{\rho}$ — константа, так как при малых колебаниях струны величина возникающего в ней напряжения $F=F_1=F_2$ практически не зависит от точки струны. Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка и называется *волновым уравнением.*

3.6 Решение волнового уравнения для конечной струны

Математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, можно сформулировать так: требуется решить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (38)$$

при начальных условиях

$$u(x,0)=f(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x)$$

и краевых условиях
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Начальные условия задают начальное положение струны и скорость каждой ее точки в начальный момент времени. Краевые условия означают, что концы струны закреплены в точках $a = 0$ и $b = \pi$.

Решение поставленной задачи можно предполагает использование метода Фурье. Ищем сначала решение уравнения (38) в виде произведения
$$u(x,t) = X(x)T(t),$$
удовлетворяющее граничным условиям
$$X(0) = X(\pi) = 0.$$
Подставляя произведение $u(x,t) = X(x)T(t)$ в (38), получим
$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$
Но функция от t может равняться функции от x, только если обе они равны постоянному числу, которое мы обозначим $-\mu$:
$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu.$$
В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения
$$X'' + \mu X = 0, X(0) = X(\pi) = 0, \tag{39}$$
$$T'' + a^2 T = 0. \tag{40}$$
Как показано при решении уравнения теплопроводности в стержне при $\mu = k^2, k \in \mathbf{N}$, задача (39) допускает решение
$$X_k = \sin kx.$$

Общее решение уравнения (40) при найденных $\mu = k^2$ имеет вид
$$T_k = A_k \cos akt + B_k \sin akt.$$
Следовательно, функция
$$u_k = (A_k \cos akt + B_k \sin akt)\sin kx,$$

где постоянные A_k, B_k для каждого k могут быть взяты произвольно, является решением уравнения (38), удовлетворяющим граничным условиям. Но тогда и любые суммы

$$\sum_{k=1}^{N} (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx$$

суть решения уравнения (38), удовлетворяющие граничным условиям. Вместе с этими суммами обладают этим свойством и суммы бесконечных рядов

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx, \tag{41}$$

если числа A_k, B_k достаточно быстро стремятся к нулю, чтобы эти ряды можно было два раза почленно дифференцировать.

Теперь в нашем распоряжении имеется большой запас функций $u(x,t)$, удовлетворяющих уравнению (38) и граничным условиям, — они определяются формулой (41), где числа A_k, B_k — произвольные, лишь бы выполнялись указанные условия сходимости. Чтобы найти решение поставленной задачи, удовлетворяющее начальным условиям, дифференцируем (41) по t:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} ak(-A_k \sin akt + B_k \cos akt) \sin kx.$$

Тогда при $t = 0$ имеем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} akB_k \sin kx. \tag{42}$$

Отсюда

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad B_k = \frac{2}{\pi ak} \int\limits_0^{\pi} F(t) \sin kt dt.$$

Если функции f и F непрерывные на $[0,\pi]$, то этого достаточно, чтобы можно было вычислить числа A_k, B_k и ряды (42) будут сходиться к этим функциям, во всяком случае, по норме пространства $C_2[0,\pi]$. Если функции f и F не только непрерывны, но и имеют непрерывные производные до третьего порядка, то сумма ряда (41) уже заведомо будет иметь вторые непрерывные производные. Обоснование этого утверждения опустим, так как оно проводится по уже знакомой нам схеме.

3.7 Решение волнового уравнения для бесконечной струны. Формула Даламбера

Если струна очень длинная, то на колебания, возникающие где-то в ее середине, концы струны будут оказывать малое влияние. Поэтому, рассматривая свободные колебания неограниченной струны, мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{43}$$

только при начальных условиях

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = F(x).$$

Такая задача называется *задачей Коши* или *задачей с начальными условиями*. Эту задачу удобно решить следующим образом. Введем новые переменные

$$\xi = x = at, \zeta = x + at,$$

тогда уравнение (43) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} = 0. \tag{44}$$

Решением уравнения (44), очевидно, является функция

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\zeta),$$

где φ и ψ — произвольные функции, которые мы будем считать дважды дифференцируемыми. Возвращаясь к старым переменным, получаем решение уравнения (43) в форме

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \tag{45}$$

Непосредственным дифференцированием (45)

$$u'_x = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at),$$

$$u'_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$u''_{xx} = \varphi'(x - at) + \psi''(x + at),$$

$$u''_{tt} = a^2\varphi''(x-at) + a^2\psi''(x+at),$$

легко убедиться, что это действительно так. Полученное решение (45), зависящее от двух произвольных функций, называется *решением Даламбера.*

Используя начальные условия, найдем функции φ и ψ:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x).$$

Интегрируя последнее тождество на отрезке $[0, x]$, получим

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^x F(\tau)d\tau + C,$$

где C — произвольная постоянная. Значит,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x F(\tau)d\tau - \frac{C}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x F(\tau)d\tau + \frac{C}{2}.$$

Теперь решение задачи Коши запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(\tau)d\tau.$$

Эта формула называется *формулой Даламбера.*

3.8 Уравнение Бесселя

Иногда на практике возникают дифференциальные уравнения, решения которых не элементарны, то есть не могут быть представлены с помощью элементарных функций. В этом случае частные решения дифференциального уравнения часто представляются в виде функционального ряда. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов проиллюстрируем на примере решения уравнения Бесселя:

$$tx'' + x' + tx = 0.$$

К этому уравнению сводятся многие задачи математической физики. Будем искать частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ в виде степенного ряда:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

$a_0 = 1$. Продифференцируем этот ряд два раза и осуществим подстановку в исходное уравнение. Получим

$$t \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k k t^{k-1} + t \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k k^2 t^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k k^2 + a_{k-2}) t^{k-1} = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при степенях t, получаем

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_k = -\frac{1}{k^2} a_{k-2}, k = 2, 3, \ldots.$$

Отсюда вытекает, что

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2^2}, a_3 = 0, \ldots, a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p}(p!)^2}, a_{2p+1} = 0, \ldots.$$

Таким образом, искомое частное решение можно записать в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{t^{2p}}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Используя признак Даламбера (абсолютной сходимости), легко показать, что этот ряд сходится на всей числовой прямой. По свойствам степенных рядов этот ряд можно дифференцировать почленно сколь угодное число раз. Следовательно, проведенные рассуждения вполне обоснованы.

Найденное частное решение уравнения Бесселя не может быть выражено через элементарные функции. Сумма полученного ряда называется функцией Бесселя (точнее, функцией Бесселя первого рода нулевого порядка) и обозначается $J_0(t)$. Эта функция обладает рядом замечательных свойств. В частности, справедлива асимптотическая формула

$$J_0(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = o\left(\frac{1}{t}\right), t \to \infty.$$

Из этой формулы вытекает, что функция J_0 на бесконечности ведет себя как косинус с убывающей амплитудой и имеет бесконечное множество неотрицательных нулей $\mu_1 > \mu_2 > ... > \mu_k > ...$. При этом $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = \infty$.

3.9 Ряд Фурье-Бесселя

Система функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $C[a,b]$ называется *ортогональной с весом* ρ, если

$$\int\limits_a^b x_n(t)x_m(t)\rho(t)dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ d_n \neq 0, & n = m. \end{cases}$$

Если $d_n = 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то система $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной с весом* $\rho(t)$. Здесь ρ — фиксированная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная ортонормированная система функций из пространства $C[a,b]$ с весом ρ, f — произвольная функция из пространства $C[a,b]$. Действительные числа

$$c_n = \int\limits_a^b f(t)x_n(t)\rho(t)dt,$$

$n \in \mathbf{N}$, называются *коэффициентами Фурье функции* f *по системе* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с весом* ρ, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)$$

называется *рядом Фурье функции* f *по системе* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с весом* ρ.

Рассмотрим пример ортонормированной системы функций с весом $\rho(t) = t$. Пусть μ_i, μ_j, $i \neq j$, — два неотрицательных корня функции J_0. Рассмотрим функции $J_0(\mu_i t)$ и $J_0(\mu_j t)$. Легко проверить, что функция $x(t) = J_0(\mu t)$, $\mu \neq 0$, удовлетворяет уравнению $tx'' + x' + \mu^2 tx = 0$. Учитывая, что $tx'' + x' = (tx')'$, получаем

$$(tx')' + \mu^2 tx = 0. \tag{46}$$

Пусть $x_i(t) = J_0(\mu_i t)$, $x_j(t) = J_0(\mu_j t)$. Тогда

$$(tx_i')' + \mu_i^2 tx_i = 0, (tx_j')' + \mu_j^2 tx_j = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на x_j, а второе — на x_i и вычтем из первого уравнения второе. Приходим к соотношению

$$x_j(tx_i')' - x_i(tx_j')' + (\mu_i^2 - \mu_j^2)tx_ix_j = 0$$

или

$$(x_jtx_i' - x_itx_j')' + (\mu_i^2 - \mu_j^2)tx_ix_j = 0.$$

Проинтегрируем последнее соотношение в пределах от 0 до 1:

$$x_jtx_i' - x_itx_j'\Big|_0^1 + (\mu_i^2 - \mu_j^2)\int\limits_0^1 x_i(t)x_j(t)tdt = 0.$$

Учитывая, что

$$x_jtx_i' - x_itx_j'\Big|_0^1 = J_0(\mu_j)\mu_iJ_0'(\mu_i) - J_0(\mu_i)\mu_jJ_0'(\mu_j) = 0,$$

при $i \neq j$ получаем

$$\int\limits_0^1 x_i(t)x_j(t)tdt = 0.$$

Таким образом, система функций $\{J_0(\mu_nt)\}_{n=1}^{\infty}$ является ортогональной с весом $\rho = t$. Несложно убедиться, что система функций

$$\frac{[J_0'(\mu_n)]^2}{2}J_0(\mu_nt), n = 1, 2, ..., \qquad (47)$$

является ортонормированной с тем же весом. Для этого достаточно перейти к пределу в соотношении

$$\frac{J_0(\mu)\mu_nJ_0'(\mu_n) - J_0(\mu_n)\mu J_0'(\mu)}{\mu_n^2 - \mu^2}$$

при $\mu \to \mu_n$ (проделайте это в качестве упражнения).

Ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_nJ_0(\mu_nt)$$

по системе функций (47) с весом $\rho = t$ принято называть *рядом Фурье-Бесселя. Коэффициенты Фурье-Бесселя* вычисляются по формулам

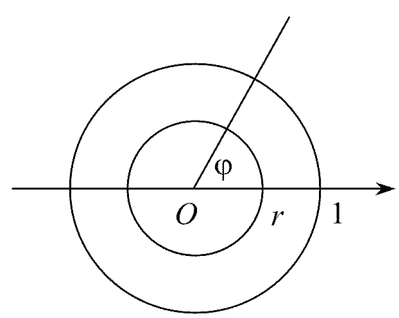
$$c_n = \frac{2}{[J_0'(\mu_n)]^2}\int\limits_0^1 f(t)J_0(\mu_nt)tdt, n \in \mathbf{N}.$$

Известно, что непрерывно дифференцируемая до второго порядка функция f разлагается на отрезке $[0; 1]$ в ряд Фурье-Бесселя, сходящийся на этом отрезке абсолютно и равномерно.

3.10 Колебание круглой мембраны

Пусть круглая мембрана радиуса 1 в состоянии покоя занимает круг радиуса 1 с центром в полюсе полярной системы координат. Будем считать, что мембрана закреплена по окружности $r = 1$. Если теперь подействовать на мембрану некоторой силой, то отклонение точек мембраны u от положения равновесия будет функцией полярных координат r, φ и времени t:

$$u = u(r, \varphi, t).$$



По аналогии со случаем колеблющейся струны, можно получить уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,$$

где Δu в полярных координатах записывается так:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Будем решать это уравнение с краевым условием

$$u\big|_{r=1} = 0$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(r).$$

Мы рассматриваем, таким образом, осесимметрическое колебание мембраны, при котором все точки окружности радиуса $r = 1$ с центром в начале координат в начальный момент времени имеют скорости и отклонения, не зависящие от угла φ. Таким образом, и функция u будет зависеть только от переменных r, t и рассматриваемое уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям и краевому условию, можно найти методом Фурье. Ищем сначала все решения вида

$$u(r, t) = R(r)T(t).$$

Как и прежде показываем, что функции T и R удовлетворяют уравнениям

$$T'' + \mu^2 a^2 T = 0,$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \mu^2 R = 0.$$

Таким образом, надо найти числа μ, для которых последнее уравнение имеет нетривиальное решение $R(r)$, удовлетворяющее граничному условию

$$R(1) = 0.$$

Чтобы получить решение, введем новую переменную

$$\rho = r\mu,$$

$$U(\rho) = R(\rho/\mu).$$

Тогда рассматриваемое уравнение превращается в такое же уравнение, но при $\mu = 1$:

$$U'' + \frac{1}{\rho} U' + U = 0.$$

Как уже было показано, функция Бесселя

$$J_0(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

является решением этого уравнения. Следовательно, функции $CJ_0(r\mu)$ будут решениями уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \mu^2 R = 0$. Теперь остается подобрать

μ так, чтобы выполнялось граничное условие $J_0(\mu) = 0$. Мы видим, что число μ должно быть корнем функции J_0. Как показано выше, функция J_0 имеет бесконечное множество нулей: $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$.

При $\mu = \mu_k$ решение уравнения $T'' + \mu^2 a^2 T = 0$ запишется так:

$$T_k(t) = a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at.$$

Соответствующие решения уравнения в частных производных, удовлетворяющие граничному условию, имеют вид

$$u_k(r,t) = (a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at) J_0(\mu_k r),$$

где a_k, b_k — произвольные постоянные. Но тогда и сумма бесконечного ряда

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at) J_0(\mu_k r)$$

является решением волнового уравнения, удовлетворяющим граничному условию, конечно, если числа a_k, b_k достаточно быстро стремятся к нулю, чтобы эти ряды можно было два раза почленно дифференцировать.

Чтобы найти решение поставленной задачи, коэффициенты a_k, b_k находим из начальных условий:

$$u\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) = f(r),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k b_k J_0(\mu_k r) = F(r).$$

Из этих условий вытекает, что числа a_k, b_k вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{[J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^1 f(\tau) J_0(\mu_k \tau)\tau d\tau,$$

$n \in \mathbf{N}$,

$$b_k = \frac{2}{a\mu_k [J_0'(\mu_k)]^2} \int_0^1 F(\tau) J_0(\mu_k \tau)\tau d\tau,$$

$n \in \mathbf{N}$. Если функции f и F непрерывные на $[0;1]$, то этого достаточно, чтобы можно было вычислить числа a_k, b_k. Если функции f и F не только непрерывны, но и имеют непрерывные производные до второго порядка, то сумма ряда

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k a t + b_k \sin \mu_k a t) J_0(\mu_k r)$$

уже заведомо будет иметь вторые непрерывные производные. Обоснование этого утверждения опустим.

3.11 Задача Штурма-Лиувилля

Знакомясь с решениями дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, замечаем повторение одной и той же схемы рассуждений, допускающей различия лишь в деталях. Это наблюдение не случайно. Дело в том, что в каждом конкретном случае мы решали одну и ту же задачу, но в частных постановках. Эта задача в общей постановке называется задачей Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(px')' + (\lambda\rho - q)x = 0, \tag{48}$$

где $p = p(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, l]$, $\rho = \rho(t)$, $q = q(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[0, l]$, λ — действительное число. При этом для любого $t \in [0, l]$ выполняются неравенства $p(t) > 0, \rho(t) > 0, q(t) \geq 0$.

Задача Штурма-Лиувилля состоит в поиске всех чисел λ (*собственные значения*), для которых существует отличное от тождественного нуля дважды непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ уравнения (48) (*собственная функция*), удовлетворяющая *граничным условиям*:

$$\alpha x(0) + \beta x'(0) = 0,$$
$$\gamma x(l) + \delta x'(l) = 0.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные действительные числа.

Отметим, что при $p = \rho \equiv 1$, $q \equiv 0$ уравнение (48) принимает вид

$$x'' + \lambda x = 0.$$

В этом случае числа $\lambda = n^2$, $n \in \mathbf{N}$, являются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля, функции $x_n = \sin nt$ являются соответствующими собственными функциями, удовлетворяющими граничным условиям

$x(0)=0, x(\pi)=0$, а функции $x_n=\cos nt$) — собственными функциями, удовлетворяющими граничным условиям $x'(0)=0, x'(\pi)=0$.

При $p=\rho=t, q\equiv 0$ уравнение (48) принимает вид (46). Значит, в рассматриваемом случае числа $\lambda_n=\mu_n^2$, $n\in\mathbf{N}$, являются собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля, а функции $x_n=J_0(\mu_n t)$ — соответствующими собственными функциями, удовлетворяющими граничным условиям $x'(0)=0,\ x(l)=0$.

Известно (теорема Стеклова), что для любой задачи Штурма-Лиувилля существуют бесконечное множество собственных значений

$$0<\lambda_1<\lambda_2<...,\lambda_n\to\infty$$

и соответствующие им собственные функции

$$x_1, x_2, ...,$$

образующие ортонормированную систему на отрезке $[0,l]$ с весом ρ:

$$\int_0^1 x_n(t)x_m(t)\rho(t)dt=\begin{cases} 0\ , & n\neq m,\\ 1\ , & n=m,\end{cases}$$

такие, что всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,l]$ функция f разлагается на нем в равномерно сходящийся ряд

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x_n(t),\quad c_n=\int_0^l f(t)x_n(t)\rho(t)dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.-487 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.

3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1979.-389 с.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.- 687 с.

5. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Гос. изд-во техн. - теор. лит-ры, 1957 - 395 с.

6. Сборник задач по уравнениям математической физики. (под ред. В.С.Владимирова). изд. 2 - М.: Наука, 1982.- 498 с.