МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФИЛИАЛ КУБАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
В Г. СЛАВЯНСКЕ-НА-КУБАНИ

Кафедра математики, информатики, естественнонаучных
и общетехнических дисциплин

С. А. РАДЧЕНКО

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Раздел «Уравнения с параметрами»

**Методические материалы
к изучению раздела дисциплины и организации самостоятельной работы
студентов 5-го курса,
обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
(профили подготовки – Математика, Информатика)
очной формы обучения**

Славянск-на-Кубани
Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
2018

ББК 32.973
П 18

Рекомендовано к печати кафедрой математики, информатики, естественнонаучных и общетехнических дисциплин филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани

Протокол № 13 от 29 мая 2018 г.

Рецензент:
кандидат педагогических наук, доцент
У. А. Чернышева

Радченко, С. А.

П 18 **Параметрические задачи. Раздел «Уравнения с параметрами»** методические материалы к изучению раздела дисциплины и организации самостоятельной работы студентов 5-го курса, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (профили подготовки – Математика, Информатика) очной формы обучения / С. А. Радченко. – Славянск-на-Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2018. – 28 с. 1 экз.

Методические материалы составлены в соответствии с ФГОС высшего образования, учебным планом и рабочей программой дисциплины. Содержат краткие теоретические сведения, методические рекомендации по решению типовых задач, задачи для самостоятельного решения и рекомендации по организации самостоятельной работы.

Методические материалы адресованы студентам 5-го курса, обучающимся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (профили подготовки – Математика, Информатика) очной формы обучения.

Электронная версия издания размещена в электронной информационно-образовательной среде филиала и доступна обучающимся из любой точки доступа к информационно-коммуникационной сети «Интернет».

ББК 32.973

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Область применения методических рекомендаций

Методические материалы к изучению учебной дисциплины Параметрические задачи являются частью программы подготовки специалистов среднего звена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утверждённого приказом Министерства образования и науки РФ от 9 февраля 2016 г. № 91, зарегистрирован в Министерстве юстиции Российской Федерации 02.03.2016 г. (регистрационный № 41305).

Место дисциплины в структуре программы подготовки бакалавров

Дисциплина «Параметрические задачи» относится к вариативной части профессионального цикла. Для освоения дисциплины «Параметрические задачи» используются знания, умения, навыки, способы деятельности и установки, полученные и сформированные в ходе изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия», «Элементарная математика».

Дисциплина «Параметрические задачи» изучается на 5 курсе, предшествует изучению дисциплин «Избранные вопросы элементарной математики», «Избранные вопросы теории и методики обучения математике» и является заключительным этапом подготовки к работе в школах любого типа. Освоение дисциплины «Параметрические задачи» является необходимой основой для прохождения педагогической практики и написания выпускной квалификационной работы.

Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Параметрические задачи» являются:

– формирование систематических знаний о методах элементарной математики, её месте и роли в системе математических наук;

– развитие абстрактного мышления, пространственных представлений, вычислительной, алгоритмической культур и общей математической культуры.

В соответствие с целями ставятся следующие задачи дисциплины:

– стимулирование формирования общекультурных и профессиональных компетенций бакалавра через развитие культуры мышления в аспекте применения на практике методов элементарной математики;
– расширение систематизированных знаний в области математики для обеспечения возможности использовать знание современных проблем науки и образования при решении образовательных и профессиональных задач;
– обеспечение условий для активизации и стимулирования познавательной деятельности студентов и формирование у них опыта использования методов элементарной математики в ходе решения практических задач в процессе освоения дисциплины.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у студентов следующих компетенций:

ОК-6способностью к самоорганизации и самообразованию;

ПК- 1готовностью реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов;

ПК-4 способностью использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов.

ТЕМА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА, ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Определение. Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Замечание: Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения $|\mathbf{x}|=\boldsymbol{a}-\mathbf{1}$ не следует неотрицательность значений выражения $\boldsymbol{a}-\mathbf{1}$, и если $\boldsymbol{a}-\mathbf{1}<\mathbf{0}$, то уравнение не имеет решений.

Что означает «решить задачу с параметром»? Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству. Другими словами, для каждого значения параметра найти значение неизвестной переменной, удовлетворяющее этому уравнению.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

Под <u>областью изменения параметра</u> будем подразумевать (если нет специальных оговорок) множество всех действительных чисел.

<u>Допустимыми значениями параметра</u> в уравнении будем считать те значения параметра, при которых выражение, входящее в уравнение, имеет смысл.

Основные виды задач с параметрами

Вид 1. Уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству [15].

Этот вид задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных видов.

Вид 2. Уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного вида нет необходимости ни решать заданные уравнения, ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с видом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи вида 2.

Вид 3. Уравнения, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи вида 3 в каком-то смысле обратны задачам вида 2.

Вид 4. Уравнения, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:
1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;
2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Замечание. Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных видов, которые по этой причине названы основными.

Наиболее массовый класс задач с параметром — задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Основные способы (методы) решения задач с параметром

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения [15].

Замечание. Аналитический способ решения задач с параметром является самым трудным способом, требующим высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a).

Замечание 4. Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

А основной принцип решения параметрических уравнений можно сформулировать так: необходимо разбить область изменения параметра на участки, такие, что при изменении параметра в каждом из них получающиеся уравнения можно решить одним и тем же методом. Отдельно для каждого участка находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра. Используемые для этого приемы в точности таковы, как и при решении уравнений с постоянными коэффициентами. Поскольку каждый из методов представляет собой последовательность определенных действий, которые могут выполняться по-разному в зависимости от значений параметра, то выбранные первоначально участки его изменения в процессе решения могут дробиться с тем, чтобы на каждом из них рассуждения проводились единообразно. Ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения.

Рассмотрим уравнение вида $ax^2+3ax-(a+2)=0$.(1)

В данном уравнении при $a=0$ происходят качественные изменения (оно превращается в линейное), значит, $a=0$ служит особым значением. Следовательно, целесообразно рассмотреть решение при $a=0$ и $a\neq 0$ [5].

1 .Если $a=0,$ то уравнение примет вид $0x=2$, которое решений не имеет.

2. Если $a\neq 0$, то имеем уравнение $ax^2+3ax-(a+2)=0$.

Из множества значений параметра при $a\neq 0$ выделим те значения, когда дискриминант уравнения равен нулю. Так как, если дискриминант $Д$=0 при $a=a_0$, то при переходе через точку a_0, он может изменять знак (например, если $a>a_0$, то $Д>0$, если $a<a_0$, то $Д<0$), а следовательно, меняется и число действительных корней уравнения. Значит, происходит качественное изменение уравнения. Поэтому значение параметра, при котором дискриминант Д=0, является особым.

Найдем значение дискриминанта уравнения (1).

$$Д=9a^2+4(a+2)a=a(13a+8)$$

Найдем значение $a,$ при котором Д=0, т. е.

$a(13a+8)=0$; $a=0,\ a=-\dfrac{8}{13}$; $a=-\dfrac{8}{13}$ – второе особое значение.

Рассмотрим решение уравнения (1) при этих особых значениях.

1. Если $a\in(-\dfrac{8}{13};0)$, то $Д<0$, уравнение не имеет решений.

2. Если $a\in(-\infty;-\dfrac{8}{13}]\cup(0;+\infty)$, то уравнение имеет два действительных корня: $x_{1,2}=\dfrac{-3a\pm\sqrt{a(13a+8)}}{2a}$.

Ответ: Если $a \in (-\frac{8}{13};0]$, то решений нет;

если $a \in (-\infty;-\frac{8}{13}] \cup (0;+\infty)$, то $x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{a(13a+8)}}{2a}$.

Замечание. Из примера видно, что в зависимости от значений параметра уравнение может:
а) иметь единственный корень;
б) не иметь корней;
в) иметь бесконечное множество корней.

Замечание. На основе данного примера можно выделить два обстоятельства, которые должны быть учтены при решении уравнений с параметрами.

1. Обращение в нуль старшего коэффициента в уравнение вида $P_n(x) = 0$ где $P_n(x)$ - многочлен.

2.Обращенне в нуль дискриминанта квадратного уравнения.

Для уравнений, содержащих параметр в знаменателе, выделяют еще один пункт: обращение в нуль знаменателя.

ТЕМА 2 ЛИНЕЙНЫЕ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Уравнение вида *Ax + B=0,* где *A* и *B* - выражения, зависящие только от параметров, а *x* – неизвестное, называется линейным уравнением относительно *x*.

Оно приводиться к виду *Ax=-B* и при $A \neq 0$ имеет единственное решение при каждой системе допустимых значении параметров **(допустимыми** будем считать те значения параметров, при которых *A* и *B* действительны).

При *A=0* и *B=0,* уравнение имеет вид *0x=0* где *x* - любое число, а при *A=0* и $B\neq 0$, имеем уравнение *0x=-B*, которое решений не имеет.

Например, уравнение $(a^2-1)x - a - 1 = 0$

является линейным относительно *x.* Оно имеет смысл при любых действительных значениях параметра *a.*

Приведя его к виду $(a^2-1)x = a+1$, заметим, что при *a=-1* оно принимает вид: *0x=0* , т. е. решением его служит любое действительное число. При *a=1* уравнение имеет вид: *0x=2* т.е. не имеет решения.

При $a \neq \pm 1$ уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a-1}.$$

Итак, получаем ответ: при *a=-1* x $\in$ R, при *a=1* нет решений, при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{1}{a-1}$.

Пример № 1. Решить уравнение $(a^{2-}9)x = a^2 + 2a - 3$.
Решение. Уравнение имеет смысл при любых значениях параметра. Запишем уравнение в виде:

$$(a-3)(a+3)x = (a+3)(a-1).$$

Если a = – 3, то уравнение принимает вид: 0x = 0. Отсюда следует, что x - любое число, т.е. решением уравнения является любое действительное число.
При a = 3 имеем 0x = 2. Уравнение решения не имеет.
При $a \neq -3$ имеем $x = \frac{a-1}{a-3}$. Уравнение имеет единственное решение.

Ответ: При a = – 3, $x \in R$; при a = 3, $x \in \varnothing$; при $a \neq \pm 3$, $x = \frac{a-1}{a-3}$.

Рассмотрим некоторые уравнения, приводимые к линейным.
Пример № 2. Решить уравнение

$$\frac{(x-4)}{(x+1)} - \frac{1}{a(x+1)} = -\frac{2}{a}.$$

Решение. Очевидно, $(x + 1)a \neq 0$, т.е. $x \neq -1$, $a \neq 0$. Преобразуем данное уравнение, умножив обе его части на $a(x + 1) \neq 0$:
$(x - 4)a - 1 = -2(x + 1)$, т.е. $(a + 2)x = 4a - 1$.
Если $a = -2$, то имеем $0x = -9$. Следовательно, $x \in \varnothing$.
Если $a \neq -2$, то $x = \frac{(4a+1)}{(a+2)}$.

Но, как мы уже отметили, $x \neq -1$. Поэтому надо проверить, нет ли таких значений a при которых найденное значение x равно – 1.
$\frac{(4a+1)}{(a+2)} = -1$, т.е. $4a - 1 = -a - 2$, т.е. $5a = -1$, $a = -\frac{1}{5}$.

Значит, при $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq -\frac{1}{5}$ уравнение имеет единственное решение $\frac{(4a+1)}{(a+2)}$.

Ответ: при $a = -2$, $a = 0$, $a = -\frac{1}{5}$, $x \in \varnothing$; при $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq -\frac{1}{5}$, $x = \frac{(4a+1)}{(a+2)}$.

Задания для самостоятельного решения

1. $a(2-a)x=-4a-1$.
2. $2c(c+4)x=2c+1$.
3. $(b^2-4)x=2b+3$.
4. $|x-3|=2ax$.
5. $2+|ax|=2a$.

ТЕМА 3. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К НИМ

Уравнение вида $mx^2+px+q=0$*, где x* – неизвестное, *m, p, q* – выражения, зависящие только от параметров, и $m \neq 0$, называется квадратным уравнением относительно x.

Например, уравнение $mx^2+3mx-(m+2)=0$ имеет смысл при любых действительных значениях параметра т.

При *m =0* оно примет вид: $0x^2+0x-2=0$ и не имеет корней.

При $m \neq 0$ оно является квадратным. И если при этом $m(13m+8) \geq 0$ т.е. $m \leq -\dfrac{8}{13}$ или $m>0$, то оно имеет два действительных корня.

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-3m \pm \sqrt{m(13m+8)}\right).$$

Допустимыми значениями параметра *c* в уравнении

$$\sqrt{c-2}x^2-(c-1)x+\sqrt{c-2}=0$$

служат все числа, удовлетворяющие условию $c \geq 2$.

При *c=2* оно имеет корень *x=0.*

При *c>2* оно является квадратным и имеет два корня:

$$x_1=\sqrt{c-2}\,,\ x_2=\frac{\sqrt{c-2}}{c-2}.$$

Заметим, что некоторые уравнения с дробными членами приводятся к линейным уравнениям Иногда решение таких уравнений сводится к нахождению корней квадратного уравнения. Рассмотрим, например, уравнение.

Пример № 1. Решить уравнение

$$\frac{x}{m(x+1)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-m^2}{m(x+1)(x+2)}.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 1,\ x \neq 2$

При *m=0* оно не имеет смысла.

Умножим обе части уравнения на $m(x+1)(x+2) \neq 0$, получим уравнение $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$, равносильное данному. Отсюда $x_1 = m+1$, $x_2 = m-3$.

Среди полученных корней могут быть и посторонние, а именно те, при которых $(x+2)(x+1)$ обращается в нуль. Чтобы выделить их, необходимо узнать, при каких значениях m полученные корни (или один из них) принимает значение -2 или -1.

$x_1 = m+1 = -2$ при $m = -3$, при этом $x_2 = -6$;

$x_1 = m+1 = -1$ при $m = -2$, при этом $x_2 = -5$;

$x_2 = m-3 = -2$ при $m = 1$, при этом $x_1 = 2$;

$x_2 = m-3 = -1$ при $m = 2$, при этом $x_1 = 3$;

Ответ: При $m \neq 0,\ m \neq 3,\ m \neq \pm 2,\ m \neq 1$ $x_1 = m+1$, $x_2 = m-3$;
при $m = 3$ *x=-6;* при *m=-2 x=-5*;
при *m=1 x=2*; при *m=2 x=3*;
при *m=0* уравнение не имеет смысла.

Приведем решение аналогичного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)} - \frac{2kx}{(k-1)(x-2)} = \frac{5}{k^2-1} + \frac{12-k^2-x}{(k^2-1)(x-2)}.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 2$.

Область допустимых значений параметра $k = \pm 1$.

При $k = \pm 1$, $x \neq 2$, уравнение равносильно уравнению
$(k+2)(k-1)x^2 - (2k^2 + 2k + 5)x + k^2 + k - 2 = 0$.

При *к=-2 x=0*.

При $k \neq -2$ и $k \neq \pm 1$ получим: $x_1 = \dfrac{k+2}{k-1}$, $x_2 = \dfrac{k-1}{k+2}$.

Проверим, нет ли таких значений к, при которых x_1 и x_2 (или одно из них) равны 2.

$x_1 = \dfrac{k+2}{k-1} = 2$ при $к = 4$, при этом $x_2 = \dfrac{k-1}{k+2} = 0{,}5$;

$x_2 = \dfrac{k-1}{k+2} = 2$ при $к = -5$, при этом .

Ответ: При $к \neq \pm 1$, $к \neq 4$, $к \neq -5$, $к \neq -2$ $x_1 = \dfrac{k+2}{k-1}$, $x_2 = \dfrac{k-1}{k+2}$; при $к = -2$, уравнение имеет одно решение x=0; при к=4, к=-5 x=0,5; при $к = \pm 1$ уравнение не имеет смысла.

Замечание. Корни рассмотренных выше уравнений оказались рациональными относительно параметров, и использованный при этом способ проверки корней удобен и прост. Он может оказаться слишком громоздким в случае, если корни полученного квадратного уравнения будут иррациональными относительно параметра.

Задания для самостоятельного решения

1. $x^2-(a+10)x+10a+1=0$.

2. $x^2+(3ab+3a-2x)+5ab+5a-17=0$.

3. $x^2-a(a+1)x+a^3=0$.

4. $\dfrac{x+2}{3x-a}+\dfrac{3-x}{3x^2+2ax-a^2}=\dfrac{3x+2}{x+a}$.

5. Сколько решений имеет уравнение $|x+4|x-a=0$ в зависимости от параметра a?

ТЕМА 4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $f(a,b,c,...,k,x)=u(a,b,c,...,k,x)$ называется иррациональным с одним неизвестным, если одна или обе части содержат выражения, иррациональные относительно *x*. Например, уравнения $2x-\sqrt{3x-4}=\sqrt{a+1}$; $\sqrt{2x-в}+3x=2$ - иррациональные относительно х. Здесь *а* и *в* параметры. Как и в раннее приведенных параграфах, будем искать действительные корни. Причем будем учитывать, что корни четной степени рассматриваются как арифметические, т.е. $\sqrt{F(a,b,c,...,k,x)\geq 0}$, $F(a,b,c,...,k,x)\geq 0$. При n - четном **(**$n=2k$**).**

А корни нечетной степени будем исследовать на всем множестве действительных чисел. Решение таких уравнений сводится к постепенному переходу от иррационального уравнения к рациональному путем возведения в n-ую степень обеих частей уравнения. Но известно, что в таком случае возможно появление посторонних корней. Следовательно, решение должно сопровождаться тщательной проверкой. Трудно указать какой-нибудь общий и вместе с тем достаточно простой способ решения иррациональных уравнений. Рассмотрим различные способы решений таких уравнений.

Пример № 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1.$$

Решение. ***1 способ.*** Возведем обе части в квадрат, получим: $(a-2)x=2a+1$. При $a=2$ уравнение примет вид: $0x=5$, т. е. не имеет решений.

При $a\neq 2$ $x=\dfrac{2a+1}{a-2}$.

Для проверки решения подставим полученное значение x в левую и правую часть уравнения.

Левая часть $\sqrt{\dfrac{(2a+1)^2}{(a-2)^2}+\dfrac{a(2a+1)}{a-2}-2a}=\sqrt{\dfrac{(3a-1)^2}{(a-2)^2}}=\left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right|$.

При $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; +\infty)$ $\left|\frac{3a-1}{a-2}\right| = \frac{3a-1}{a-2}$; при $a \in (\frac{1}{3}; 2)$ $\left|\frac{3a-1}{a-2}\right| = \frac{1-3a}{a-2}$.

Правая часть $\frac{2a+1}{a-2} + 1 = \frac{3a-1}{a-2}$.

Отсюда видно, что $\frac{2a+1}{a-2}$ является корнем уравнения при $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; +\infty)$; при $a \in (\frac{1}{3}; 2)$ решений нет.

Приведем второй способ решения уравнения.

2 способ. Корни уравнения должны удовлетворять условию:

$$\begin{cases} x^2 + ax - 2a \geq 0, \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax - 2a \geq 0, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим уравнение: $x^2 + ax - 2a = (x+1)^2$, любой корень которого удовлетворяет условию $x^2 + ax - 2a \geq 0$, так как $(x+1)^2 \geq 0$.

Отсюда следует, что уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x^2 + ax - 2a = (x+1)^2, \\ x \geq -1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a-2)x = 2a+1, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

При $a = 2$. она решения не имеет, при $a \neq 2$ получим: $\begin{cases} x = \frac{2a+1}{a-2}, \\ x \geq -1. \end{cases}$

Заметим, что $\frac{2a+1}{a-2} \geq -1$ при $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; +\infty)$, придем к тому же ответу.

Ответ: $x = \frac{2a+1}{a-2}$ при $a \in (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (2; +\infty)$; при $a \in (\frac{1}{3}; 2)$ решении нет.

Рассмотрим решение иррациональных уравнений с помощью введения вспомогательной переменной, неизвестной величины.

Пример № 2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a.$$

Решение. Корни уравнения должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0, \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Так как $\sqrt{3x-2} \geq 0$ и $\sqrt{x+2} \geq 0$, то $a \geq 0$.

Пусть $\sqrt{x+2} = y \geq 0$. [4] Тогда $x = y^2 - 2$ и $3x - 2 = 3y^2 - 8$. Уравнение приводится к уравнению $\sqrt{3y^2 - 8} = ay$. (23)

Значение y должно удовлетворять условию $\begin{cases} y \le a, \\ 3y^2 - 8 \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат, получим уравнение $3y^2 - 8 = (a - y)^2$, корень которого удовлетворяет условию $3y^2 - 8 \ge 0$. Следовательно, достаточно будет проследить за тем, чтобы корни уравнения удовлетворяли условию $0 \le y \le a$.

Приведя уравнение к виду $3y^2 - 8 = a^2 - 2ay + y^2$ или $2y^2 + 2ay - 8 - a^2 = 0$, получим:

$$y_1 = 0{,}5\left(-a - \sqrt{3a^2 + 16}\right),\ y_2 = 0{,}5\left(-a + \sqrt{3a^2 + 16}\right).$$

y_1 не является корнем уравнения, так как $y_1 < 0$.

$0 \le y_2 \le a$, если $\begin{cases} 0{,}5\left(\sqrt{3a^2 + 16} - a\right) \le a, \\ 0{,}5\left(\sqrt{3a^2 + 16} - a\right) \ge 0, \end{cases}$

т. е. если $\begin{cases} \sqrt{3a^2 + 16} \le 3a, \\ \sqrt{3a^2 + 16} \ge a, \end{cases}$ или $\begin{cases} 6a^2 \ge 16, \\ 2a^2 + 16 \ge 0. \end{cases}$

Учитывая, что $a \ge 0$ и $2a^2 + 16 \ge 0$, приходим к заключению, что решением последней системы служит $a \ge \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Итак, при $a \ge \frac{2}{3}\sqrt{6}$ уравнение имеет один корень y_2. Отсюда при $a \ge \frac{2}{3}\sqrt{6}$, возвращаясь к старой переменной получим:

$\sqrt{x + 2} = 0{,}5\left(-a + \sqrt{3a^2 + 16}\right)$, или $x = 0{,}5\left(2a^2 + 4 - a\sqrt{3a^2 + 16}\right)$. При $a < \frac{2}{3}\sqrt{6}$ корней нет.

Ответ: При $a \ge \frac{2}{3}\sqrt{6}$ $x = 0{,}5\left(2a^2 + 4 - a\sqrt{3a^2 + 16}\right)$; при $a < \frac{2}{3}\sqrt{6}$ решений нет.

Замечание. В некоторых случаях может оказаться удобным предварительно решить рассматриваемое уравнение относительно параметра и таким образом перейти от данного уравнения к равносильной ему совокупности уравнений.

Пример № 3. Решить уравнение

$$\sqrt{a - \sqrt{x + a}} = x.$$

Решение. ОДЗ уравнения равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} a-\sqrt{x+a}\ge 0, \\ x+a\ge 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\ge x+a, \\ x\ge -a, \\ x\ge 0, \end{cases} \Rightarrow x\ge 0.$$

Следовательно корень уравнения должен удовлетворять условию $x\ge 0$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим систему:

$$\begin{cases} a-\sqrt{x+a}=x^2, \\ x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x^2=\sqrt{x+a}, \\ x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-x^2\right)^2=x+a, \\ a-x^2\ge 0, \\ x+a\ge 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-x^2\right)^2=x+a, \\ (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})\ge 0, \\ x\ge -a, \\ x\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0, \\ 0\le x\le \sqrt{a}. \end{cases}$$

Решим полученную систему, относительно a. Решим первое уравнение системы.

$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0$,

$Д=(2x^2+1)^2-4(x^4-x)=4x^2+4x+1=(2x+1)^2$,

$$a_{1,2}=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x+1)^2}}{2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2},$$

$$a_1=\frac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1,\ a_2=\frac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x.$$

Система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=x^2+x+1, \\ 0\le x\le\sqrt{a}, \end{cases} \\ \begin{cases} a=x^2-x, \\ 0\le x\le\sqrt{a}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1-a=0, \\ 0\le x\le\sqrt{a}, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-x-a=0, \\ 0\le x\le\sqrt{a}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением системы будут корни: $x_1=-0,5(1+\sqrt{4a-3})$, $x_2=0,5(-1+\sqrt{4a-3})$, где $a\ge 0,75$. $x_2<0$ следовательно, не может служить корнем уравнения, $x_2\ge 0$ при $\sqrt{4a-3}\ge 1$ т. е. при $a\ge 1$. Чтобы проверить удовлетворяется ли при этом и условие $x\le\sqrt{a}$ заметим, что $f\left(\sqrt{a}\right)=1+\sqrt{a}$, т. е. $f\left(\sqrt{a}\right)>0$, следовательно, $x_1<0<x_2<\sqrt{a}$, т. е. при $a\geq 1$ $x=0,5(-1+\sqrt{4a-3})$ – корень .

Для решения системы введем обозначения $\phi(x)=x^2-a-x$.

$\phi(x)=0$ при $x_3=0,5(1-\sqrt{4a+1})$, $x_4=0,5(1+\sqrt{4a+1})$. $x_3=0$ при $a=0$; при $a>0$ x_3 не является корнем уравнения, так как при этом $x_3<0$.

$x_4>0$. Чтобы проверить, удовлетворяется ли условие $x\leq\sqrt{a}$,заметим, что $\phi\left(\sqrt{a}\right)=-\sqrt{a}<0$, следовательно, $x_3<0<\sqrt{a}<x_4$. Таким образом, x_4 не является корнем уравнения.

Ответ: При $a=0$ $x=0$; при $a\in[1;+\infty)$ $x=0,5(-1+\sqrt{4a-3})$; при $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$ корней нет.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить аналитически и графически $\sqrt{4x+a}=2x+1$.
2. Решить $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=x$.
3. $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$.
4. $\sqrt{x^2-a}+2\sqrt{x^2-1}=x$.

ТЕМА 5. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Уравнение вида $a^{f(x)}=b^{\phi(x)}$, где $a>0,\quad b>0$ (36) называется простейшим показательным уравнением.

Областью определения его Д служит пересечение областей определения функций $f(x)$ и $\phi(x)$. При $a=b=1$ решением уравнения служит множество Д; при $a=1$ и $b\neq 1$ оно равносильно системе: $\begin{cases}\phi(x)=0,\\ x\in Д,\end{cases}$ при $a\neq 1$ и $b=1$ системе $\begin{cases}f(x)=0,\\ x\in Д.\end{cases}$

При $a=b$ $(a>0,\ a\neq 1$ и $b>0,\ b\neq 1)$ получим уравнение $f(x)=\phi(x)$ равносильное.

Для решения уравнения в случае $a\neq b$ $(a\neq 1, b\neq 1)$ будем исходить из того, что из уравнения $a^{f(x)}=b^{\phi(x)}$, следует уравнение $\log_c a^{f(x)}=\log_c b^{\phi(x)}$.

Совершенно безразлично, какое положительное, отличное от единицы число взять за основание логарифма. В этом легко убедиться, если учесть, что $\dfrac{\log_c M}{\log_c N}=\dfrac{\log_k M}{\log_k N}$, где $c>0$ $(c=1)$, $k>0$ $(k=1)$, $M>0$, $N>0$.

Если за основание взять число a, то уравнение запишется так:
$f(x)=\phi(x)\cdot\log_a b$.

Решение любого показательного уравнения, вообще говоря, сводится к нахождению корней некоторого элементарного уравнения.

Например, уравнение $\dfrac{a^{-(x+0,5)}}{\sqrt{a}}=aa^{-2x}$

имеет смысл при $a>0$. Областью определения его служит множество всех действительных чисел. Приведя его к виду $a^{-x-1}=a^{-2x+1}$, заметим, что при $a=1$, x - любое действительное число, при $a>0$ $(a\neq 1)$ $x=2$.

Рассмотрим решение простейших показательных уравнений с параметром.

Пример № 1. Решить уравнение

$$\sqrt[x+1]{a^3}\cdot\sqrt[x+1]{a^2}=\frac{1}{a^5}\sqrt[4]{(a^x)^{10}}.$$

Решение. По смыслу задачи $a>0,\ x\in N$. При этом условии данное уравнение равносильно следующему $a^{\frac{5}{x+1}}=a^{\frac{5x-10}{2}}$. При $a=1$ x - любое натуральное число, при $a>0$ $(a\neq 1)$ $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x-10}{2}$.

Отсюда $x=0,5(1\pm\sqrt{17})$, при $a\neq 1$ решения нет.

Ответ: При $a=1$ $x\in R$; при $a>0$ $(a\neq 1)$ решений нет.

Пример № 2. Решить уравнение

$$a^{2x}\left(a^{2x}+1\right)=a\left(a^{3x}+a^x\right)$$

Решение. По смыслу задачи $a>0$. [1] После преобразования с учетом, что $a>0$ получим уравнение равносильное данному $\left(a^{2x}+1\right)\left(a^{2x}-a^{x+1}\right)=0$.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} a^{2x}+1=0, \\ a^{2x}-a^{x+1}=0. \end{array}\right.$ Рассмотрим каждое уравнение совокупности.

а) $a^{2x}+1=0$, $a^{2x}=-1$, уравнение не имеет смысла, так как $a>0$.

б) $a^{2x}-a^{x+1}=0$, $a^{2x}=a^{x+1}$, при $a=1$, x - любое действительное число; при $a\neq 1,\ 2x=x+1,\ x=1$.

Ответ: При $a=1$, x - любое действительное число; при $a\neq 1$, $a>0$ $x=1$; при $a<0$, решений нет.

Задания для самостоятельного решения

1. $a^{3-x} = b^{x+1}$.
2. $a^x(a^x + 2) = a(a+1)$.
3. $a^{2x-3} - a^{2x-2} = b$.

ТЕМА 6. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_b \phi(x)$, где $a > 0\ (a \neq 1),\ b > 0\ (b \neq 1)$ называется простейшим логарифмическим уравнением.

Областью определения его служит решение системы: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ \phi(x) > 0. \end{cases}$.

При $a = b$ получим уравнение $f(x) = \phi(x)$, равносильное уравнению (в области определения уравнения).

Если $a \neq b$, то решение уравнения сводится к решению уравнения $\log_a f(x) = \dfrac{1}{\log_a b} \cdot \log_a \phi(x)$, что равносильно уравнению $\left(f(x)\right)^{\log_a b} = \phi(x)$.

Здесь использована формула $\log_b p = \dfrac{\log_a p}{\log_a b}$, где $p > 0,\ a > 0\ (a \neq 1),\ b > 0,\ (b \neq 1)$.

Решение логарифмического уравнения как правило сводится к нахождению корней простейшего логарифмического уравнения вида .

Например, уравнение $3\lg(x-a) - 10\lg(x-a) + 3 = 0$, квадратное относительно $\lg(x-a)$, равносильно совокупности двух уравнений:

а) $\lg(x-a) = 3 \ \Rightarrow\ a + 1000$;

б) $\lg(x-a) = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ x = a + \sqrt[3]{10}.$

Рассмотрим решение логарифмических уравнений с параметрами.

Пример № 1. В зависимости от значения параметра a решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(9^x + a\right) + \log_3\left(2 \cdot 3^x\right) = 0.$$

Решение. Область допустимых значений переменной x задается неравенством $9^x + a > 0$. В этой области уравнение равносильно уравнению $-\log_3\left(9^x + a\right) + \log_3(2 \cdot 3^x) = 0$, или уравнению $2 \cdot 3^x = 9^x + a$.

Пусть $y = 3^x$, тогда последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y^2 - 2y + a = 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Данная система будет иметь 2 решения, в том случае, если дискриминант первого уравнения системы больше 0 и $a > 0$. Т.е. если совместна система $\begin{cases} 4(1-a) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$.

Система будет иметь одно решение, когда имеет место совокупность $\begin{cases} 4(1-a) = 0, \\ a \le 0. \end{cases}$.

Тогда, при $0 < a < 1$ $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$; при $a \le 0,\ a = 1$ $y = 1 + \sqrt{1-a}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $x_{1,2} = \log_3(1 \pm \sqrt{1-a})$ и $x = \log_3(1 + \sqrt{1-a})$.

Ответ: при $a \le 0$ $x = \log_3(1 + \sqrt{1-a})$;
при $0 < a \le 1$ $x_{1,2} = \log_3(1 \pm \sqrt{1-a})$;
при $a > 0$ решений нет.

Приведем примеры логарифмических уравнений с двумя параметрами.

Пример № 2. Решить уравнение

$$\lg(x-a) - \lg 2 = 0{,}5\lg(x-b)$$

Решение. Областью определения уравнения (45) служит решение системы:

$$\begin{cases} x > a, \\ x > b. \end{cases}$$

При этом условии уравнение равносильно уравнению

$\lg\dfrac{x-a}{2} = \lg\sqrt{x-b}$, или $x - a = 2\sqrt{x-b}$.

При $a = b$ оно принимает вид: $x - a = 2\sqrt{x-a}$, $\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x-a} - 2\right) = 0$.

Так как $\sqrt{x-a} \ne 0$, то уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x-a} = 2$ т.е. $x = a + 4$.

Рассмотрим теперь случай $a \ne b$. Возведя в квадрат обе части уравнения получим: $x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4b = 0$.

Д - дискриминант уравнения.

При *Д=0*, т.е. при $a = b - 1$ $x_1 = x_2 = a + 2$. При *Д>0*, т. е. при $a > b - 1$, уравнение имеет два различных корня: $x_1 = a + 2 - 2\sqrt{a-b+1}$, $x_2 = a + 2 + 2\sqrt{a-b+1}$
.

Теперь необходимо найти те значения a и b, при которых x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x > a$ (условие $x > b$ выполняется, так как x_1 и x_2 корни уравнения $(x-a)^2 = 4(x-b)$).

Для этого введем обозначения $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4b$, .

При $b-1<a<b,\ a<b<x_1<x_2$, следовательно, x_1 и x_2-корни уравнения.

Если $a>b$, то $f(a)<0$, следовательно, $b<x_1<a<x_2$, т.е. условию $x>a$ удовлетворяет только x_2.

Ответ: При $a=b$ $x=a+4$; при $b-1\le a<b$ $x=a+2\pm 2\sqrt{a-b+1}$; при $a>b$ $x=a+2+2\sqrt{a-b+1}$; при $a<b-1$, решений нет.

Рассмотрим решение уравнений при заданных начальных условиях.

Пример № 3. При каком значении p уравнение $\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$ имеет один корень? Найдите его.

Решение. Уравнение равносильно следующему уравнению $\lg(x^2+2px)=\lg(8x-6p-3)$.

При потенцировании полученного уравнения получим следующее уравнение $x^2+2px=8x-6p-3$, $x^2+2x(p-4)+6p+3=0$.

Квадратное уравнение будет иметь один корень, если его дискриминант равен нулю. $Д=4(p-4)^2-4(6p+3)=4(p^2-14p+13)$, $Д=0,\ p^2-14p+13=0,\ p_1=13,\ p_2=1$.

Если *Д=0*, то корень уравнения $x=4-p$.

При $p=1$ $x=3$, при $p=13$ $x=-9$.

Так как при потенцировании получено уравнение, не равносильное исходному, то обязательна проверка. При $p=13$ $x=-9$ слагаемое $\lg(8x-6p-3)$ не имеет смысла. Числа $p=1$, $x=3$ удовлетворяют исходному равнению.

Ответ: При $p=1$ $x=3$.

Задания для самостоятельного решения

1. $2\log_7(ax-2)=\log_{\sqrt{7}}(-x^2-9x-18)$.
2. $(a-1)\log_3^2(x-2)+2(a+1)\log_3(x-2)+a-3=0$.
3. $\log_{x+a^2+1}(a^2x+2)=2\log_{7+2x}(5-\sqrt{6-2x})$.
4. $2\log_4(2x^2-x+2a-4a^2)+\log_{0,5}(x^2+ax-2a^2)=0$.

ТЕМА 7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение называется тригонометрическим, если неизвестное находится под знаком тригонометрической функции или в виде линейной функции.

Решение тригонометрических уравнений сводится к нахождению корней одного из простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение $\sin f(x)=a$, где $|a|\le 1$, равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=\arcsin a+2\Pi\kappa,\ \ \kappa\in Z \\ f(x)=\Pi-\arcsin a+2\Pi n,\ \ n\in Z. \end{array}\right.$

или уравнению $f(x)=(-1)^n\arcsin a+\Pi n,\ n\in Z$.

Уравнение $\cos f(x)=a$, где $|a|<1$, равносильно совокупности уравнений $f(x)=\pm\arccos a+2\Pi n,\ n\in Z$, а каждое из уравнений $tgf(x)=a$, $ctgf(x)=a$ уравнениям

$$f(x)=arctga+\Pi n,\ n\in Z \text{ и } f(x)=arcctga+\Pi n,\ n\in Z.$$

Например, решение уравнения $\sin(2x+3)=b+1$ при $-2\le b\le 0$ сводится к решению уравнения $2x+3=(-1)^n\arcsin(b+1)+\Pi n,\ n\in Z$.

Отсюда $x=-1{,}5+0{,}5(-1)^n\arcsin(b+1)+0{,}5\Pi n,\ n\in Z$.

Рассмотрим уравнение $\cos\sqrt{x-1}=2a$, где $-0{,}5<a<0{,}5$. Решение его сводится к решению совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1}=\arccos 2a+2\Pi n,\ \ n=0,1,2... & \text{(а)} \\ \sqrt{x-1}=-\arccos 2a+2\Pi k,\ \ k=1,2,3... & \text{(б)} \end{array}\right.$$

Рассмотрим в отдельности уравнения (а) и (6).

а) $\sqrt{x-1}=\arccos 2a+2\Pi n,\ n=0,1,2...$ Отсюда $x=1+\left(\arccos 2a+2\Pi n\right)^2$.

б) $\sqrt{x-1}=-\arccos 2a+2\Pi k,\ k=1,2,3...$ Отсюда $x=1+\left(2\Pi k-\arccos 2a\right)^2$ (здесь учтено, что $0\le\arccos 2a\le\Pi$).

Приведем примеры решения более сложных тригонометрических уравнений.

Пример № 1. Решить уравнение

$$tg^2 2x-(2a+1)tg\ 2x+a(a+1)=0.$$

Решение. Уравнение квадратное относительно $tg2x$, следовательно, оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} tg2x=a+1, \\ tg2x=a, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0{,}5arctg(a+1)+0{,}5\Pi n,\ n\in Z, \\ x=0{,}5arctga+0{,}5\Pi k,\ k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{array}{l} x = 0,5arctg(a+1) + 0,5\Pi n,\ n \in Z, \\ x = 0,5arctga + 0,5\Pi k,\ k \in Z. \end{array}$

Пример № 2. В зависимости от значений параметра a решить уравнение.

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + a = \frac{\sin x - 2}{\sin x - 3}$$

Решение. Полагая $y = \sin x$, приведем уравнение к виду $ay^2 - 5ay + 6a - 1 = 0$.

А тогда при условии $a \neq 0$ $y_{1,2} = \dfrac{5a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2a}$, учитывая, что $|y| \le 1$ и решая неравенства $-1 \le \dfrac{5a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2a} \le 1$ и $-1 \le \dfrac{5a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2a} \le 1$, находим, что в первом случае $a \in \varnothing$, во втором же $a \in \left[\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{2}\right]$.Предположим теперь, что $a = 0$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ: если $a \in \left[\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{2}\right]$, то $x = (-1)^n \arcsin\left(2,5 - 0,5\sqrt{1 + \dfrac{1}{a}}\right) + \Pi n,\ n \in Z$; если $a \in (-\infty; \dfrac{1}{12}) \cup (\dfrac{1}{2}; +\infty)$, то решений нет.

Пример № 3. В зависимости от значений параметров a и b решить уравнение

$$\sqrt{tgx - 2a} - \sqrt{tgx - 2b} = 2.$$

Решение. Обозначим $u = \sqrt{tgx - 2a},\ v = \sqrt{tgx - 2b}$. Тогда получим систему

$\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 2(b - a). \end{cases}$ Из этой системы находим: $v = \dfrac{1}{2}(b - a - 2)$. Но так как $v \ge 0$, то $b \ge a + 2$, и, значит, $tgx = \left(\dfrac{b - a - 2}{2}\right)^2 + 2b$.

Ответ: если $b - a \ge 2$, то $x = arctg\left(\left(\dfrac{b - a - 2}{2}\right)^2 + 2b\right) + \pi k,\ k \in Z$; при других значениях a и b решений нет.

Задания для самостоятельного решения

1. $\dfrac{a\sin x - 2}{a - 2\cos x} = \dfrac{a\cos x - 2}{a - 2\sin x}$.

2. $tg2x + tg(\dfrac{\pi}{4} - x) = 0$.

3. При какой зависимости между параметрами a и b имеет решение уравнение $\sin ax \cdot \sin bx = 1$?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические указания к лекциям

Обучение студентов осуществляется по традиционной технологии (лекции, практики) с включением инновационных элементов.

С точки зрения используемых методов лекции подразделяются следующим образом: информационно-объяснительная лекция, повествовательная, лекция-беседа, проблемная лекция и т. д.

Устное изложение учебного материала на лекции должно конспектироваться. Слушать лекцию нужно уметь – поддерживать своё внимание, понять и запомнить услышанное, уловить паузы. В процессе изложения преподавателем лекции студент должен выяснить все непонятные вопросы. Записывать содержание лекции нужно обязательно – записи помогают поддерживать внимание, способствуют пониманию и запоминанию услышанного, приводит знание в систему, служат опорой для перехода к более глубокому самостоятельному изучению предмета.

Методические рекомендации по конспектированию лекций:

– запись должна быть системной, представлять собой сокращённый вариант лекции преподавателя. Необходимо слушать, обдумывать и записывать одновременно;
– запись ведётся очень быстро, чётко, по возможности короткими выражениями;
– не прекращая слушать преподавателя, нужно записывать то, что необходимо усвоить. Нельзя записывать сразу же высказанную мысль преподавателя, следует её понять и после этого кратко записать своими словами или словами преподавателя. Важно, чтобы в ней не был потерян основной смысл сказанного;
–имена, даты, названия, выводы, определения записываются точно;
–следует обратить внимание на оформление записи лекции. Для каждого предмета заводится общая тетрадь. Отличным от остального цвета следует выделять отдельные мысли и заголовки, сокращать отдельные слова и предложения, использовать условные знаки, буквы латинского и греческого алфавитов, а также некоторые приёмы стенографического сокращения слов.

Методические указания к практическим занятиям

Основной частью самостоятельной работы студента является его систематическая подготовка к практическим занятиям. Студенты должны быть нацелены на важность качественной подготовки к таким занятиям. При подготовке к практическим занятиям студенты должны освоить вначале теоретический материал по новой теме занятия, с тем чтобы использовать эти знания при решении задач. Затем просмотреть объяснения решения примеров, задач, сделанные преподавателем на предыдущем практическом занятии, разобраться с примерами, приведенными лектором по этой же теме. Решить заданные примеры. Если некоторые задания вызвали затруднения при решении, попросить объяснить преподавателя на очередном практическом занятии или консультации.

Для работы на практических занятиях, самостоятельной работы во внеаудиторное время, а также для подготовки к экзамену рекомендуется использовать методические рекомендации к практическим занятиям. Предлагаемые методические рекомендации адресованы студентам, обучающимся как по рейтинговой, так и по традиционной системе контроля качества знаний.

Данные методические рекомендации содержат учебно-методический материал для проведения практических занятий.

Для получения практического опыта решения задач по дисциплине на практических занятиях и для работы во внеаудиторное время предлагается самостоятельная работа в форме практических работ. Контроль над выполнением и оценка практических работ осуществляется в форме собеседования.

Методические указания к самостоятельной работе

При изучении дисциплины студенты часть материала должны проработать самостоятельно. Роль самостоятельной работы велика.

Планирование самостоятельной работы студентов по дисциплине необходимо проводить в соответствии с уровнем подготовки студентов к изучаемой дисциплине. Самостоятельная работа студентов распадается на два самостоятельных направления: на изучение и освоение теоретического лекционного материала, и на освоение методики решения практических задач.

При всех формах самостоятельной работы студент может получить разъяснения по непонятным вопросам у преподавателя на индивидуальных консультациях в соответствии с графиком консультаций. Студент может также обратиться к рекомендуемым преподавателем учебникам и учебным пособиям, в которых теоретические вопросы изложены более широко и подробно, чем на лекциях и с достаточным обоснованием.

Консультация – активная форма учебной деятельности в педвузе. Консультацию предваряет самостоятельное изучение студентом литературы по определенной теме. Качество консультации зависит от степени подготовки студентов и остроты поставленных перед преподавателем вопросов.

Ряд тем и вопросов курса отведены для самостоятельной проработки студентами. При этом у лектора появляется возможность расширить круг изучаемых проблем, дать на самостоятельную проработку новые интересные вопросы. Студент должен разобраться в рекомендуемой литературе и письменно изложить кратко и доступно для себя основное содержание материала. Преподаватель проверяет качество усвоения самостоятельно проработанных вопросов на практических занятиях, контрольных работах, коллоквиумах и во время экзамена. Затем корректирует изложение материала и нагрузку на студентов.

При подготовке к практическим работам и тестированию необходимо повторить материал, рассмотренный на практических занятиях, прорешать соответствующие задачи или примеры, убедиться в знании необходимых формул, определений и т. д.

При подготовке к устному опросу студентам необходимо изучить указанные преподавателем темы, используя конспекты лекций, рекомендуемую литературу, учебные пособия. Ответы на возникающие вопросы в ходе подготовки можно получить на очередной консультации.

Таким образом, использование всех рекомендуемых видов самостоятельной работы дает возможность значительно активизировать работу студентов над материалом курса и повысить уровень их усвоения.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс] : учеб. Пособие. Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 541 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/66312 .

2. Математика. Сборник задач по углубленному курсу [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.А. Будак [и др.]. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 329 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/66321 .

3. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями / Н.Д. Золотарёва [и др.]. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2017. — 549 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/97419.

Дополнительная литература

1. Далингер, В. А. Математика: задачи с параметрами в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 466 с. — ISBN 978-5-534-04755-4. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/D195D508-4555-492C-AC40-5DDBEBDF5130.

2. Далингер, В. А. Математика: задачи с параметрами в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издатель-

ство Юрайт, 2017. — 466 с. — ISBN 978-5-53 4-04755-4. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/D195D508-4555-492C-A

3. Шабунин, М.И. Математика : пособие для поступающих в вузы [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2016. — 747 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/84086 .

4. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия) [Электронный ресурс] / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом.— Москва : Физматлит, 2015. — 312 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/72013.

Периодические издания

1. Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика и информатика. Механика. - URL: https://dlib.eastview.com/browse/publication/9045/udb/890

2. Квант : [полнотекстовый архив номеров за период: 1970-2010 гг.]. - URL: http://www.kvant.info/old.htm.

3. Математика в высшем образовании. - URL: https://e.lanbook.com/journal/2368#journal_name

4. Математический форум (Итоги науки. Юг России). Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания (Владикавказ). – URL: https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=32642

5. Математическое образование / Фонд математического образования и просвещения (Москва). – URL: https://elibrary.ru/contents.asp?id=34529652

6. Современная математика и концепции инновационного математического образования . – URL: http://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53797.

Интернет-ресурсы

1. ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» [учебные, научные здания, первоисточники, художественные произведения различных издательств; журналы; мультимедийная коллекция: аудиокниги, аудиофайлы, видеокурсы, интерактивные курсы, экспресс-подготовка к экзаменам, презентации, тесты, карты, онлайн-энциклопедии, словари] : сайт. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red.

2. ЭБС издательства «Лань» [учебные, научные издания, первоисточники, художественные произведения различных издательств; журналы] : сайт. – URL: http://e.lanbook.com.

3. ЭБС «Юрайт» [раздел «ВАША ПОДПИСКА: Филиал КубГУ (г. Славянск-на-Кубани): учебники и учебные пособия издательства «Юрайт»] : сайт. – URL: https://www.biblio-online.ru/catalog/E121B99F-E5ED-430E-A737-37D3A9E6DBFB.

4. Научная электронная библиотека. Монографии, изданные в издательстве Российской Академии Естествознания [полнотекстовый ресурс свободного доступа] : сайт. – URL: https://www.monographies.ru/.

5. Научная электронная библиотека статей и публикаций «eLibrary.ru» : российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины, образования [5600 журналов, в открытом доступе – 4800] : сайт. – URL: http://elibrary.ru.

6. Базы данных компании «Ист Вью» [раздел: Периодические издания (на рус. яз.) включает коллекции: Издания по общественным и гуманитарным наукам; Издания по педагогике и образованию; Издания по информационным технологиям; Статистические издания России и стран СНГ] : сайт. – URL: http://dlib.eastview.com.

7. КиберЛенинка : научная электронная библиотека [научные журналы в полнотекстовом формате свободного доступа] : сайт. – URL: http://cyberleninka.ru.

8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная информационная система свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для всех уровней образования: дошкольное, общее, среднее профессиональное, высшее, дополнительное : сайт. – URL: http://window.edu.ru.

9. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [для общего, среднего профессионального, дополнительного образования; полнотекстовый ресурс свободного доступа] : сайт. – URL: http://fcior.edu.ru.

10. Энциклопедиум [Энциклопедии. Словари. Справочники : полнотекстовый ресурс свободного доступа] // ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» : сайт. – URL: http://enc.biblioclub.ru/.

11. Электронный каталог Кубанского государственного университета и филиалов. – URL: http://212.192.134.46/MegaPro/Web/Home/About.

Учебное издание

Радченко Светлана Александровна

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Раздел «Уравнения с параметрами»

Методические материалы
к изучению раздела дисциплины и организации самостоятельной работы
студентов 5-го курса,
обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
(профили подготовки – Математика, Информатика)
очной формы обучения

Подписано в печать 13.07.2018.
Формат 60x84/16. Бумага типографская. Гарнитура «Таймс»
Печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 0,97
Тираж 1 экз. Заказ № 130

Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200

Отпечатано в издательском центре
филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200