Лекция № 2

Алгоритмы арифметических действий над целыми неотрицательными числами в десятичной системе счисления

План:

1. Алгоритм сложения.
2. Алгоритм вычитания.
3. Алгоритм умножения.
4. Алгоритм деления .
5. Позиционные системы счисления, отличные от десятичной.
6. Арифметические действия над числами в системах счисления, отличных от десятичной.
7. Переход записи чисел в одной системе счисления к записи в другой.

1. ***Алгоритм сложения***

Сложение однозначных чисел можно выполнить, используя **таблицу сложения однозначных чисел**, а сумму многозначных чисел обычно находят, выполняя сложение столбиком.

$$\begin{array}{r} + \; 341 \\ \underline{7238} \\ 7579 \end{array}$$

$341+7238 = (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1) + (7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8) =$

$= 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 + 8 =$

$= 7 \cdot 10^3 + (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2) + (4 \cdot 10 + 3 \cdot 10) + (1 + 8) =$

$= 7 \cdot 10^3 + (3+2) \cdot 10^2 + (4+3) \cdot 10 + (1+8) =$

$= 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 9 = 7579$

Алгоритм сложения «столбиком» **натуральных чисел:**

- 1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
- 2. Складывают единицы первого разряда. Если сумма меньше 10, то ее записывают в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду (десятков).
- 3. Если сумма единиц больше или равна 10, то представляют ее в виде $a_0 + в_0 = 1 \cdot 10 + c_0$, где c_0 - однозначное число; записывают c_0 в разряд единиц ответа и прибавляется 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.
- 4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т. д. Процесс заканчивается, когда окажутся сложенными цифры старших разрядов. При этом, если их сумма больше или равно 10, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняем сложение: $1+0 = 1$.

2. Алгоритм вычитания

Вычитание однозначного числа *b* из однозначного или двухзначного числа *a*, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа *c*, что *b+ c =a*

$$\begin{array}{r} - \mathbf{485} \\ \underline{\mathbf{231}} \\ \mathbf{254} \end{array}$$

$485 – 231 = (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) – (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1) =$

$= (4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5) – 2 \cdot 10^2 – 3 \cdot 10 – 1 =$

$= (4 \cdot 10^2 – 2 \cdot 10^2) + (8 \cdot 10 – 3 \cdot 10) + (5 – 1) =$

$= (4 – 2) \cdot 10^2 + (8 – 3) \cdot 10 + (5 – 1) = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4 = 254$

Алгоритм вычитания «столбиком» натуральных чисел

- 1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствовали разряды находящиеся друг под другом.
- 2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем её из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.
- 3. Если же цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0>a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на единицу, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10+a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа. Далее переходим к следующему разряду.
- 4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д., уменьшаемого, равны нолю, то берём первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем её на единицу, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10+a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.
- 5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.
- 6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Алгоритм умножения

Произведение многозначных чисел находят, выполняя умножение столбиком.

$$\begin{array}{r} {}_{\times}428 \\ \underline{\quad 3} \\ 1284 \end{array}$$

$428 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) \cdot 3 = (4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 8 \cdot 3 =$
$= 12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 24 = (1 \cdot 10 + 2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 4) =$
$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 4 =$
$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6+2) \cdot 10 + 4 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4 =$
$= 1284$

Алгоритм умножения «столбиком» многозначного числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на однозначное число y:

- Записываем второе число под первым.
- Умножаем цифры разряда единиц числа x на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).
- Если произведение цифр единиц числа x на число y больше или равно 10, то представляем его в виде $10q_1+c_0$, где c_0– однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 –перенос в следующий разряд.
- Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пп. 2 и 3.
- Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Алгоритм умножения «столбиком» числа

$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ **на число** $y = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0}$.

- Записываем множитель *x* и под ним второй множитель *y*.
- Умножаем число *x* на младший разряд $в_0$ числа *y* и записываем произведение $x \cdot в_0$ под числом *y*.
- Умножаем число *x* на следующий разряд $в_1$ числа *y* и записываем произведение $x \cdot в_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x \cdot в_1$ на 10.
- Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot в_k$.
- Полученные $k+1$ произведения складываем.

Алгоритм деления

$$
\begin{array}{rr|l}
- & 378 & 4 \\
\cline{3-3}
 & \underline{36} & 94 \\
 & -18 & \\
 & \underline{16} & \\
 & 2 &
\end{array}
$$

$378:4 = 94$ (ост. 2)

$378 = 94 \cdot 4 + 2$

Алгоритм деления «уголком» числа а на число в.

Если *а=в*, то частное *q*=1, остаток *r=0*.

Если *а*$>$ *в* и число разрядов в числах **а** и **в** одинаково, то частное **q** находим перебором, последовательно умножая **в** на 1,2,3,4,5,6,7,8,9, так как **а**$<$ **10в**. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел **а** и **в**.

Если **а**$>$ **в** и число разрядов в числе **а** больше, чем в числе **в**, то записываем делимое **а** и справа от него делитель **в**, который отделяем от **а** уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) Выделяем в числе **а** столько старших разрядов, сколько разрядов в числе **в** или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1, больше или равное *в*. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и *в*, последовательно умножая *в* на 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Записываем q_1 под уголком (ниже *в*).

б) Умножаем *в* на q_1 и записываем произведение под числом *а* так, чтобы младший разряд числа *в* q_1 был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1.

в) Проводим черту под *в* q_1 и находим разность $r_1 = d_1 - в\, q_1$.

г) Записываем разность r_1 под числом *в* q_1 , приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого *а* и сравниваем полученное число d_2 с числом *в*.

д) Если полученное число d_2 больше или равно *в*, то относительно него поступаем согласно п.1 или п. 2. Частное q_2 записываем после q_1.

е) Если полученное число d_2 меньше *в*, то приписываем ещё столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3 , большее или равное *в*. В этом случае записываем после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пп. 1,2. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа *а* окажется, что $d_3 < в$, то тогда частное чисел d_3 и *в* равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.

Позиционные системы счисления, отличные от десятичной

Записью натурального числа x в системе счисления с основанием p называется его представление в виде: $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$, где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимают значения $0, 1, 2, \ldots, p-1$, и $a_n \neq 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть $p \geq 2$ – заданное натуральное число. Тогда любое натуральное число x представимо, и притом единственным образом в виде $x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$.

Арифметические действия над числами в системах счисления, отличных от десятичной

p=3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Арифметические действия над числами в позиционных системах счисления с основанием p ($p \neq 10$) выполняется по тем же правилам, что и в десятичной системе счисления.

Переход записи чисел в одной системе счисления к записи в другой

1). Из р -ичной в десятичную

$457_8 = 4\cdot 8^2+5\cdot 8+7 = 303$

$457_8 = 303_{10}$

2). Из десятичной в р –ичную

```
-2436 | 8
 24    -304 | 8
  -36   24   -38 | 8
   32   -64   32   4
    4    64    6
          0
```

$2436 = 4604_8$