Математика

Ведущий преподаватель:
Игракова Оксана Викторовна

Лекция 1

Раздел: «Целые неотрицательные числа»

План

1. Характеристики натуральных чисел;
2. История возникновения понятия натурального числа и нуля;
3. Понятие отрезка натурального ряда и счета.

Рекомендуемая литература:

1. Стойлова Л. П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики.- Москва: Просвещение, 1988.
2. Стойлова Л. П. Математика: учебник для студентов высших педагогических учебных заведений.- Москва: издательский центр «Академия», 2004.
3. Действующие учебники по математике для начальной школы.

Характеристики натуральных чисел:

- количественная;
- порядковая;
- мера величины;
- компонент вычислений.

Из истории возникновения понятия натурального числа и нуля

Числа возникли из потребности счета и измерения.

Основные этапы:

1. Численность предметов без их пересчета.
2. Множества – посредники (пальцы, камешки и другие).
3. Представление о натуральном числе (названия и обозначения).

Арифметика – наука о числе.

Теоретико - множественный подход к построению множества целых неотрицательных чисел

Отрезок натурального ряда и счет.

Числа 1,2,3,4,… - натуральные (употребляются при счете предметов).

A = {k,l,m,r} – **4 элемента** – ***количественная характеристика множества.***

«первый»

«второй»

«третий»

«четвертый» - ***порядковые числа***.

$N_4 = \{1,2,3,4\}$ – отрезок натурального ряда.

Отрезком $\mathbf{N_a}$ натурального ряда называется множество натуральных чисел, не превосходящих натурального числа а.

$$\begin{array}{cccccccccc} A & = & \{ & k, & l, & m, & r & \} \\ & & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ N_4 & = & \{ & 1, & 2, & 3, & 4 & \} \end{array}$$

Счетом элементом множества А называется установление взаимно однозначного соответствия между множеством А и отрезком натурального ряда N_a

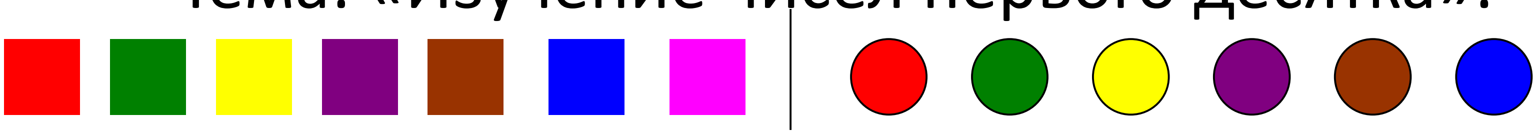
$n(A) = a$

Правила счета:

- необходим достаточный запас чисел;
- расположение чисел в определенном порядке;
- существование первого числа;
- ни один элемент не должен быть пропущен;
- ни один элемент не должен быть сосчитан дважды и т. д.

В начальном курсе математики – тесная связь порядкового и количественного числа.

Тема: «Изучение чисел первого десятка».



Которым по счету будет красный квадрат, если считать справа налево? А синий квадрат?

Сколько всего квадратов?

Которым по счету будет зеленый кружок, если считать слева направо?

(Учебник «Математика» 1 класс авторов М.И.Моро и др., стр. 49, (1 часть)).

Лекция 2

ТЕМА: «Теоретико-множественный смысл понятия натурального числа и нуля, отношения «равно» и «меньше»

План:

1. Понятие натурального числа и нуля с теоретико-множественных позиций.

2. Отношение «равно» и «меньше» с теоретико-множественных позиций.

Понятие натурального числа и нуля с теоретико-множественных позиций.

Класс 1

Множество вершин треугольника, множество сторон треугольника, множество букв в слове «мир» и т. д.

Равномощные множества мощность равна 3

Класс 2

Множество {а,в,с,d} множество букв в слове «окно» и т.д.

Равномощные множества мощность равна 4

Отношение равномощности есть отношение эквивалентности

Количественное натуральное число есть общее свойство класса конечных равномощных множеств

Теоретико-множественный смысл числа «нуль» : $0 = n(\varnothing)$

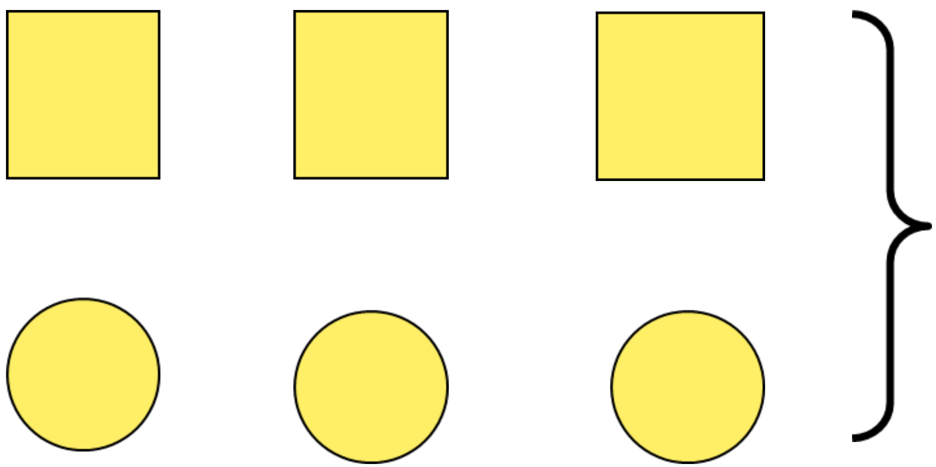
Связь с начальным курсом математики

Отношение «равно» и «меньше»

$a = в \Leftrightarrow A \sim B,\ n(A) = a,\ n(B) = в$

$a < в \Leftrightarrow A \sim B_{1}$., где $B_1 \subset B$ и $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \varnothing$

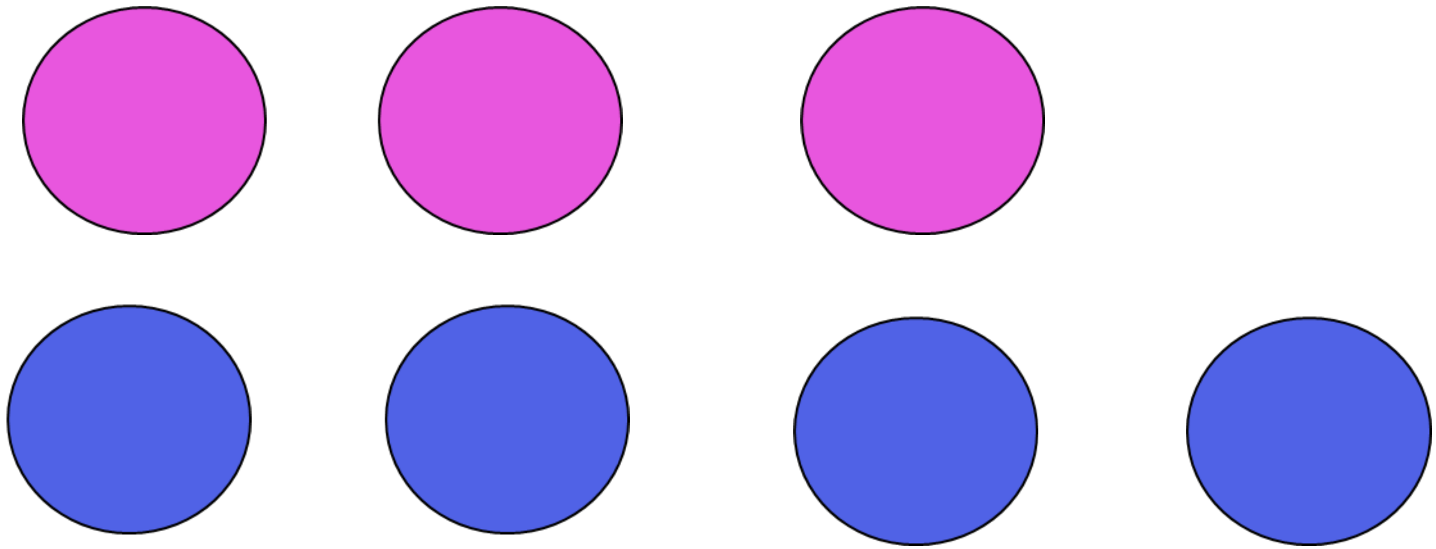
Связь с начальным курсом математики



Множеств квадратов
и множество кругов
равномощны

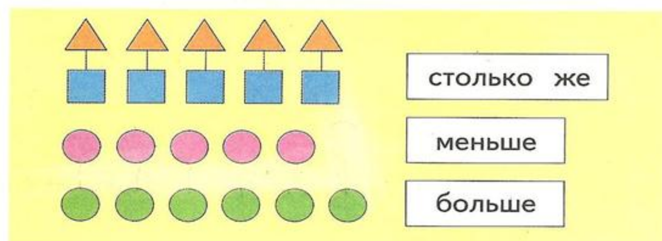
3 = 3

Наложим



$3 < 4$

СТОЛЬКО ЖЕ. БОЛЬШЕ. МЕНЬШЕ.



Столько же? Больше? Меньше?

Лекция 3

Тема: «Теоретико-множественный смысл суммы целых неотрицательных чисел»

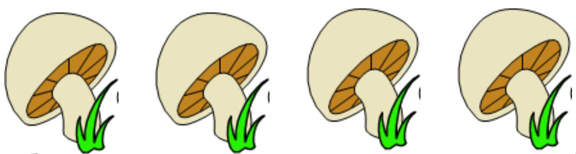
План:

1. Определение суммы целых неотрицательных чисел.
2. Существование и единственность суммы.
3. Законы сложения.
4. Подход к понятиям «меньше» и «больше», связанный со сложением.
5. Определение отношения «меньше» через отрезок натурального ряда.

Определение суммы

Задача: «Петя нашел 4 гриба, а Нина – 3. Сколько всего грибов нашли ребята?»

$$4 + 3 = 7$$

 +  = **СУММА**

Петя — A_1

Нина — A_2

A

$$A_1 \cup A_2 = A \text{ (сумма)}$$

$n(A_1) = 4$, $n(A_2) = 3$ $n(A) = 7$

$$A = \{a, b, c, d\} \qquad\qquad B = \{c, x, y\}$$

$$n(A) = 4 \qquad\qquad n(B) = 3$$

$$A \cap B = \underbrace{\{a, b, c, d, x, y\}}_{\textit{6 элементов}}, \text{ но } n(A \cup B) \neq 4+3$$

$$A \cap B \neq \varnothing$$

$$a + b = n\,(A \cup B),\ \text{где}\ n\,(A) = a,\ n\,(B) = b\ \text{и}\ A \cap B = \varnothing$$

$$\overbrace{a + b}^{\textit{сумма}} = c$$

слагаемое слагаемое сумма

<u>Пример:</u> $5 + 2 = 7$

<u>Решение:</u> $5 = n\,(A),\ \ 2 = n\,(B),\ \ A \cap B = \varnothing$

Существование и единственность суммы

__Теорема 1.__ **Сумма двух целых неотрицательных чисел существует.**

__Теорема 2.__ **Сумма a + b не зависит от выбора множеств A и B и является единственной.**

Определение суммы нескольких слагаемых

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}$$

Пример: $2 + 7 + 15 + 19 = (2 + 7 + 15) + 19 =$

$((2 + 7) + 15) + 19 = (9 + 15) + 19 =$

$24 + 19 = 43$

Законы сложения

1. Переместительный (коммутативный) закон:

$$a + b = b + a$$

Доказательство:

$a = n(A)$, $b = n(B)$, $A \cap B = \varnothing$.

По определению суммы $a + b = n(A \cup B)$.

$A \cup B = B \cup A$ (переместительное свойство объединения множеств) $\Rightarrow$ $n(A \cup B) = n(B \cup A)$.

$$n(B \cup A) = b + a \Rightarrow a + b = b + a$$

2. Сочетательный (ассоциативный) закон:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Доказательство:

$a = n(A)$, $b = (B)$, $c = n(C)$, $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$.

$(a + b) + c = n(A \cup B) + n(C) = n((A \cup B) \cup C)$.

Объединение множеств ассоциативно, поэтому

$n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C))$.

$n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c) \Rightarrow$

$(a + b) + c = (a + b) + c$

3. Монотонность сложения:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Следствие:

$$a < b,\ c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

Пример. Вычислить, используя законы сложения

$$109 + 36 + 191 + 64 + 27$$

Решение: $109 + 36 + 191 + 64 + 27 =$

переместительный

закон

$$= 109 + 191 + 36 + 64 + 27 =$$

$$= (109 + 191) + (36 + 64) + 27 =$$

сочетательный сочетательный

закон закон

$$= (300 + 100) + 27 = 400 + 27 = 427$$

сочетательный

закон

<u>Сочетательный закон сложения</u> – основа приема прибавления числа по частям:

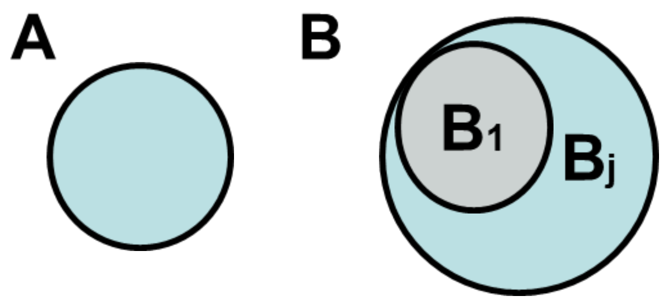
$$3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5$$

Способы прибавления суммы 2 + 1 к числу 4:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 4 + (2 + 1) = 4 + 3 = 7, \\ 2. & 4 + (2 + 1) = 6 + 1 = 7, \\ 3. & 4 + (2 + 1) = 5 + 2 = 7 \end{array}\right\} \text{ проанализировать самостоятельно!}$$

Подход к понятиям «меньше» и «больше», связанный со сложением

$a<b$, $a = n(A)$, $b = n(B)$, $A \sim B_1$, $B_1 \subset B$



$B_1 \subset B \Rightarrow B = B_1 \cup B_j$ $(B_j = B \setminus B_1)$

$n(B) = n(B_1 \cup B_j)$

$B_1 \cap B_j = \varnothing \Rightarrow \underline{n(B) = n(B_1) + n(B_j)}$ (*)

По условию $B_1 \sim A \Rightarrow n(B_1) = n(A)$.

$n(B_j) = c$. Тогда $b = a + c$

$$\boxed{a < b \Rightarrow b = a + c}$$

Связь с начальным курсом математики

$5 + 1 = 6, \quad 6 > 5$

$7 + 1 = 8, \quad 7 < 8$

Определение отношения «меньше» через отрезок натурального ряда

$$a < b \Leftrightarrow N_a \subset N_b \text{ и } N_a \neq N_b$$

Пример: $3 < 7$

$N_3 = \{1, 2, 3\}$, $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$N_3 \subset N_7$, $N_3 \neq N_7$

Связь с начальным курсом: ***число, которое при счете встречается раньше, всегда меньше числа, которое идет позднее.***

Лекция 4

Тема: Вычитание целых неотрицательных чисел

План:

1. Определение разности

2. Связь вычитания со сложением

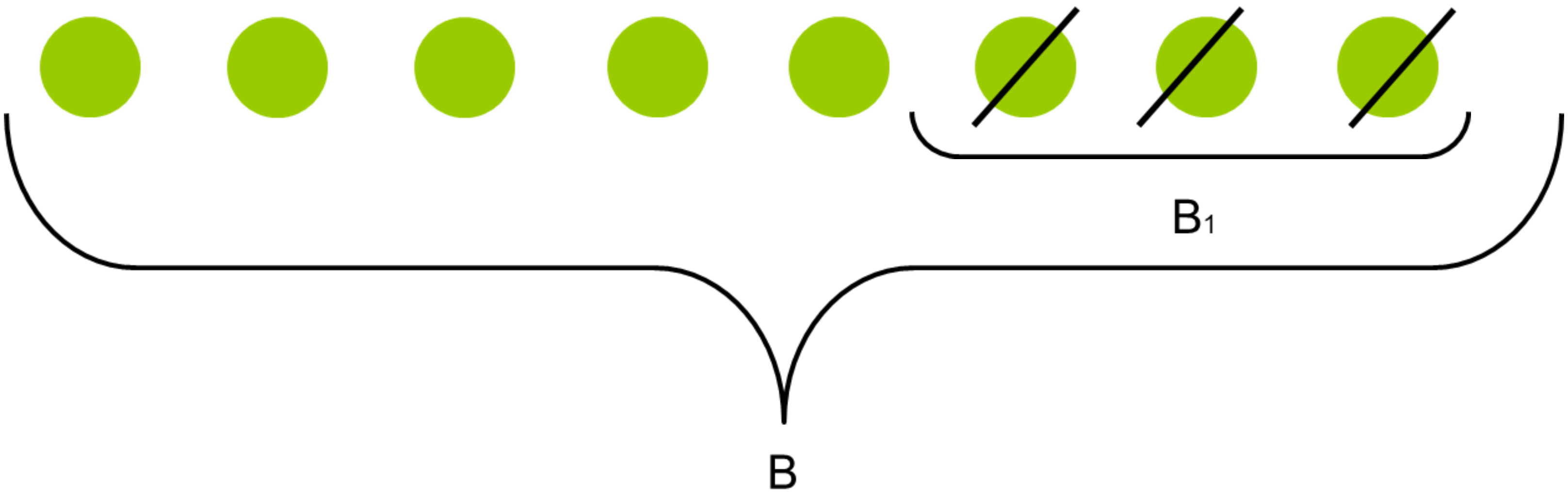
3. Существование и единственность разности

4. Отношение «больше на» и «меньше на»

5. Правила вычитания числа из суммы и суммы из числа

Определение разности целых неотрицательных чисел

Задача. Около школы посадили 8 деревьев – берёз и рябин. Берёз 3. Сколько рябин посадили?



8-3=5

$$a-b=n(A\setminus B), \text{ где } a=n(A),\ b=n(B),\ B\subset A$$

<u>Пример.</u>

$7-4=3$

$7=n(A)$, $4=n(B)$, $B\subset A$

$A=\{x, y, z, t, p, r, s\}$, $B=\{x, y, z, t\}$

$A\setminus B=\{p, r, s\}$

$n(A\setminus B)=3 \Rightarrow 7-4=3$

$$a - b = c$$

a - уменьшаемое

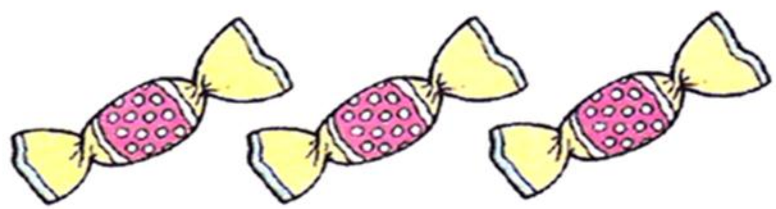
b - вычитаемое

c - разность

$a-b$ - разность

Действие «-» - вычитание

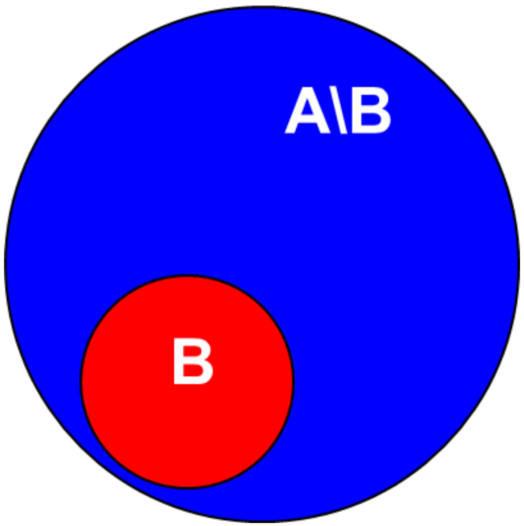
Связь с начальным курсом математики

8. У Вали было  .

Она съела 2 конфеты. Сколько конфет осталось у Вали?

Связь вычитания со сложением

a=n (A), b=n (B), B⊂A, a-b=n (A\B)



A=BU(A\B)
n(A)=n(BU(A\B))

B ∩(A\B)=Ø, то

$$\boxed{n(A) = n(B \cup (A\setminus B)) = n(B)+n(A\setminus B) = b+(a-b) \Rightarrow a=b+(a-b)}$$

$$a - b = c \iff a = b + c$$

Вычитание обратно сложению

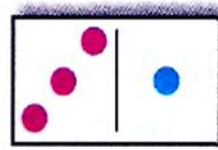
1. Прочитай эти равенства, используя слова *первое слагаемое, второе слагаемое, сумма.*

$3 + 2 = 5$

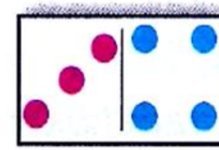
$5 - 3 = 2$

$5 - 2 = 3$

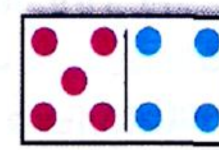
2.



$3 + 1 = 4$
$4 - 3 = \square$



$3 + 4 = \square$
$7 - 4 = \square$



$5 + 4 = \square$
$9 - 5 = \square$

3. Закончи предложения.
Если $6 + 3 = 9$, то $9 - 6 = \ldots$
Если $7 + 2 = 9$, то $9 - 7 = \ldots$
Если $8 + 2 = 10$, то $10 - 8 = \ldots$

Существование и единственность разности

Теорема 1. *$a-b$ существует тогда и только тогда, когда $b \le a$*

Доказательство.

=>) Если $a=b$, то $a-b=0$ => существует.

Если $b<a$, то $\exists$ $C \in N$: $a=b+c$. Тогда $c=a-b$ => $a-b$ - существует

<=) Если $a-b$ существует, то $\exists$ $C \in N$: $a=b+c$.

Если $c=0$, то $a=b$.

Если $c>0$, то $b<a$.

Теорема 2. *Если $a-b$ существует, то она единственна.*

Доказательство. (От противного).

$$a-b=c_1 \text{ и } a-b=c_2$$

$$a=b+c_1 \text{ и } a=b+c_2$$

$$b+c_1=b+c_2$$

$$c_1=c_2$$

Отношения «больше на» и «меньше на»

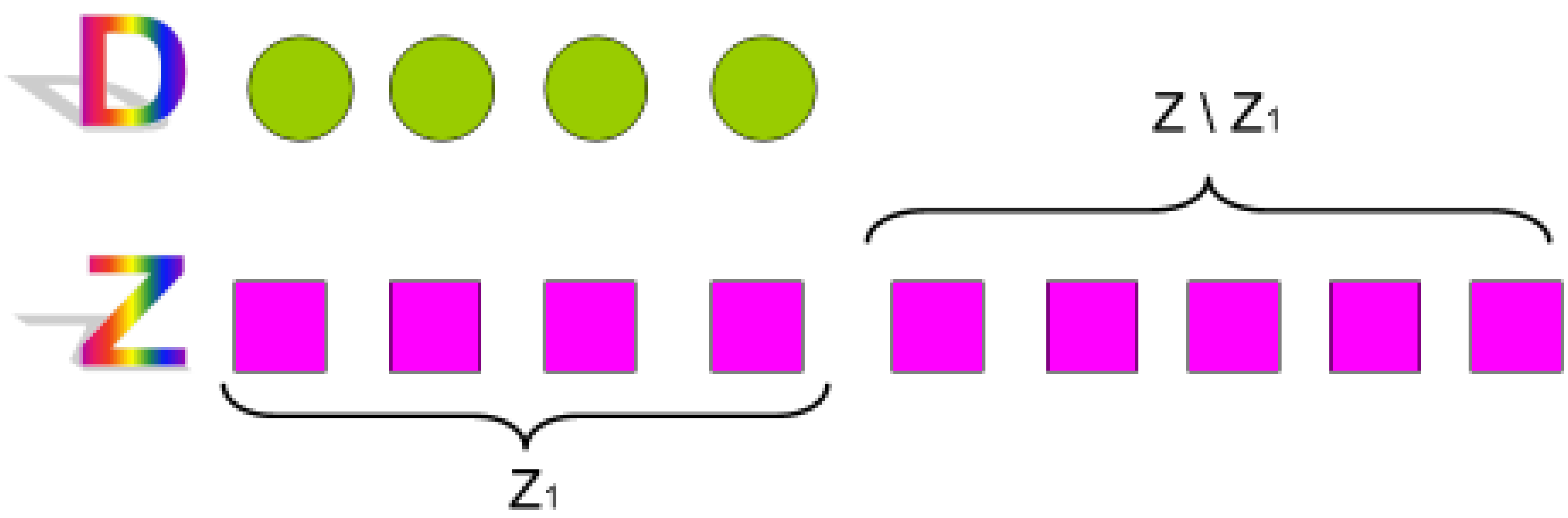
a= n (A), b = n (B), a<b

n (B\B1)=c (c≠0).

=> Число *a* меньше числа *b* на *c* или число *b* больше числа *a* на *c*

Правило: *чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.*

Задача. У школы посадили 4 дуба и 9 лип. На сколько больше посадили лип?



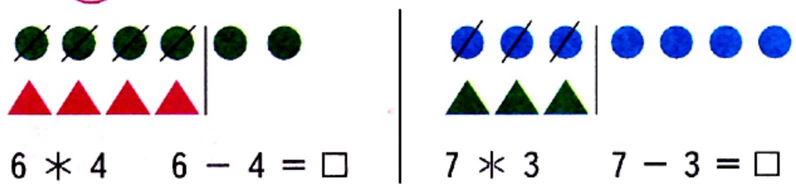
$Z_1 \sim D$

9 - 4

1.

На карусели 4 лошадки и 3 верблюда. На сколько больше лошадок, чем верблюдов? На сколько меньше верблюдов, чем лошадок?

2.



6 ∗ 4 $\quad$ 6 − 4 = □ $\quad\quad$ 7 ∗ 3 $\quad$ 7 − 3 = □

3. На карусели катались 4 девочки, а мальчиков на 1 меньше. Сколько … ?

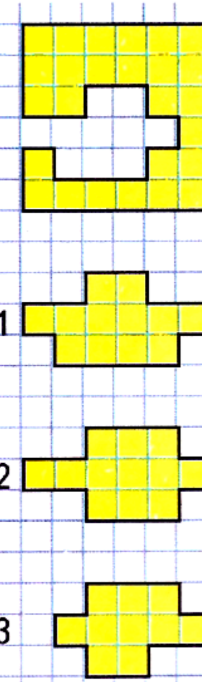
4. Володе 7 лет, а его брат на 3 года старше. Сколько лет Володиному брату?

5. Скажи, не вычисляя, в каком из примеров каждой пары ответ будет больше. Проверь вычислением.

10 − 3	8 − 2	9 − 2 − 3	7 + 2 + 1
10 − 4	8 − 1	9 − 3 − 4	7 + 2 − 1

Рассмотри чертежи и назови номер фигуры, которую вырезали из квадрата.

ЗАДАНИЕ НА СМЕКАЛКУ



1 $\quad$ 2 $\quad$ 3

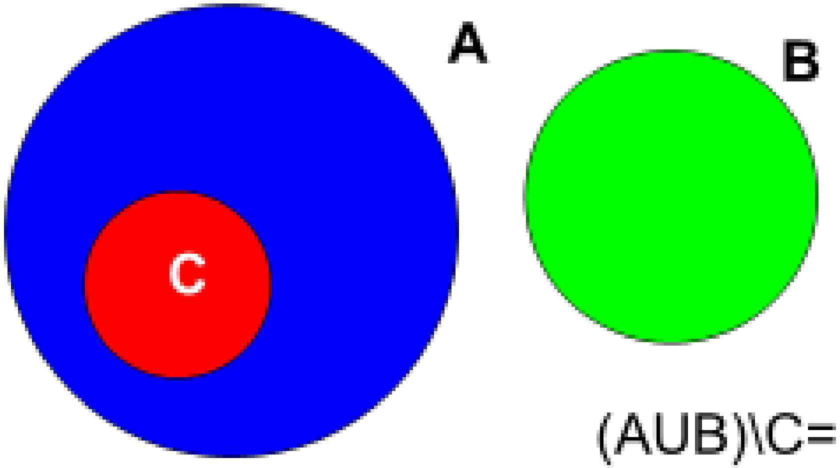
Правила вычитания

<u>*Правило вычитания числа из суммы:*</u>

a, b, c- целые неотрицательные числа

а) при $a \geq c$ $(a + b) - c = (a-c) + b$

б) при $b \geq c$ $(a + b) - c = a + (b- c)$



$n(A) = a, n(B)=b, n(C)=c$
$A \cap B=\varnothing, C\subset A$

$(a + b) - c = n((A \cup B) \setminus C)$
$(a - c) + b = n((A \setminus C) \cup B)$

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$
$n((A \cup B) \setminus C) = n((A \setminus C) \cup B)$
$(a + b) - c = (a - c) + b$

Правило вычитания суммы из числа

При $a \geq b + c$ $\quad a - (b+c) = (a-b) - c$

Связь с начальным курсом математики

Правило вычитания из числа суммы – основа приёма вычитания числа по частям:

а) $5 - 2 = 5-(1+1) = (5-1) - 1 = 4 - 1 = 3$

б) $60-24 = 60 - (20+4) = (60-20)-4 = 40-4 = 36$

20 4

Лекция 5
Тема: «Произведение целых неотрицательных чисел»

План:

1. Определение произведения ц.н.ч. через сумму.
2. Определение произведения ц.н.ч. через декартово произведение множеств.
3. Свойства умножения.

Определение произведения целых неотрицательных чисел через сумму

1) $\mathbf{a \cdot b} = \underbrace{\mathbf{a + a + \ldots + a}}_{\text{в слагаемых}}$ при $\mathbf{b > 1}$

2) $\mathbf{a \cdot 1 = a}$ при $\mathbf{b = 1}$

3) $\mathbf{a \cdot 0 = 0}$ при $\mathbf{b = 0}$

Теоретико-множественный смысл произведения: $\mathbf{a \cdot b}$ – это число элементов в объединении $\mathbf{b}$ попарно непересекающихся множеств, каждое из которых содержит по $\mathbf{a}$ элементов.

$$\overbrace{a \cdot b}^{\text{произведение}} = c$$

множитель множитель произведение

Действие - умножение

<u>**Теорема.**</u> Произведение любых целых неотрицательных чисел существует и оно единственно.

Связь с начальным курсом математики

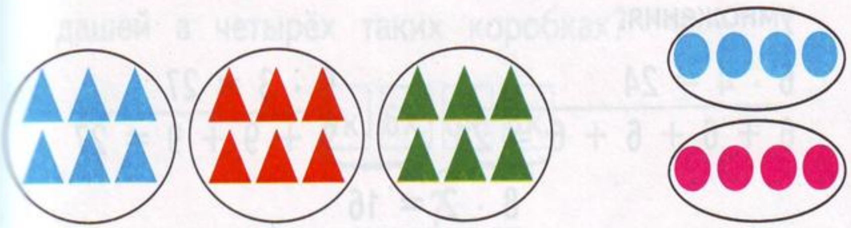
<u>Задача.</u> *На каждое детское пальто нужно пришить 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 6 таких пальто?*

Требуется найти число элементов в объединении, состоящем из 6 множеств, в каждом из которых по 4 элемента, т.е

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ (пуговицы).}$$

Связь с начальным курсом математики

1. Рассмотри рисунки и закончи записи.



$6 + 6 + 6 = \square$ $\qquad$ $4 + 4 = \square$

$6 \cdot 3 = \square$ $\qquad$ $4 \cdot 2 = \square$

$10 + 10 + 10 + 10 + 10 = \square$

$\square \cdot \square = \square$

$5 + 5 + 5 + 5 = \square$

$\square \cdot \square = \square$

На 5 лошадей сели по 1 всаднику.

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ $\qquad$ $1 \cdot 5 = 5$

После обеда на столе осталось 4 тарелки. Ни на одной из них не было ни одной сосиски. Сколько всего сосисок на этих тарелках?

$0 + 0 + 0 + 0 = 0$ $\qquad$ $0 \cdot 4 = 0$

1. Вычисли, заменяя умножение сложением:

$1 \cdot 3 \qquad 0 \cdot 5 \qquad 1 \cdot 4 \qquad 0 \cdot 6$

2. Закончи выводы и приведи свои примеры.

При умножении 1 на любое число получается ... .

При умножении 0 на любое число получается ... .

Определение произведения целых неотрицательных чисел через декартово произведение множеств

$A = \{x, y, z\}$ $B = \{n, t, r, s\}$

$$A \times B = \begin{cases} (x, n), (x, t), (x, r), (x, s) \\ (y, n), (y, t), (y, r), (x, s) \\ (z, n), (z, t), (z, r), (z, s) \end{cases}$$

$n(A \times B) = 3 + 3 + 3 + 3 = \boldsymbol{12}$

$n(A) = 3$, $n(B) = 4$ и $3 \cdot 4 = \boldsymbol{12}$

$$\boxed{n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)}$$

$$a \bullet b = n\,(A \times B), \text{ где } n\,(A) = a,\ n\,(B) = b$$

Определение произведения нескольких множеств:

$$a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n \bullet a_{n+1} = (a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n) \bullet a_{n+1}$$

__Пример:__ $2 \bullet 7 \bullet 5 \bullet 9 = (2 \bullet 7 \bullet 5) \bullet 9 = ((2 \bullet 7) \bullet 5) \bullet 9 =$

$= (14 \bullet 5) \bullet 9 = 70 \bullet 9 = 630$

Свойства умножения

1.**Коммутативность** (переместительный закон)

$$a \bullet b = b \bullet a$$

Доказательство: $a = n(A)$, $b = n(B) \Rightarrow a \bullet b = n(A\text{x}B)$

$A \text{ x } B$ и $B \text{ x } A$ – *равномощны*

$n(A \text{ x } B) = n(B \text{ x } A)$

$a \bullet b = n(A \text{ x } B) = n(B \text{ x } A) = b \bullet a$

2. Ассоциативность (сочетательный закон)

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Доказательство. $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$

$(a \bullet b) \bullet c = n\,((A \times B) \times C)$

$a \bullet (b \bullet c) = n\,(A \times (B \times C))$

Множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ *равномощны*

$n\,((A \times B) \times C) = n\,(A \times (B \times C)) \Rightarrow$

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

3. Дистрибутивный закон умножения относительно сложения (распределительное свойство умножения относительно сложения)

$$\mathbf{(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c}$$

Доказательство. $\mathbf{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)}$ $(*)$

$a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ и $A \cap B = \varnothing$

$$\underline{(a + b) \bullet c} = n((A \cup B) \times C) \overset{(*)}{=} n((A \times C) \cup (B \times C)) =$$

$$= n(A \times C) + n(B \times C) = \underline{a \bullet c + b \bullet c}$$

4. Дистрибутивный закон умножения относительно вычитания (распределительное свойство умножения относительно вычитания)

$$(a - b) \bullet c = a \bullet c - b \bullet c \qquad (a \geq b)$$

Доказательство. Аналогично предыдущему, выводится из равенства:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

5. Монотонность умножения

Если $a < b$, то $a \bullet c < b \bullet c$.

6. Сократимость умножения

Если $a \bullet b = c \bullet b$ и $b > 0$, то $a = c$.

Лекция № 6

Тема: «Деление целых неотрицательных чисел»

1. Теоретико-множественный смысл частного целых неотрицательных чисел

2. Связь деления и умножения

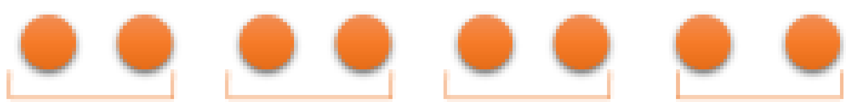
3. Существование и единственность частного. Невозможность деления на нуль.

Определение частного целых неотрицательных чисел

Задача:

8 апельсинов разложим на тарелки по 2 апельсина на каждую. Сколько раз по 2 апельсина положилИ? Сколько тарелок потребовалось?

$$8 : 2 = 4$$



2 2 2 2

A_1 A_2 A_3 A_4

Подмножества A_1, A_2, A_3, A_4 равномощны и попарно не пересекаются.

4 – число 2-х элементных подмножеств, на которые разбито множество из восьми элементов

Пусть а=n(А) и множество А разбито на попарно непересекающиеся равномощные подмножества. Если в - число подмножеств в разбиении множества А, то частное чисел а и в - это число элементов каждого подмножества.

Если в – число элементов каждого подмножества в разбиении множества А, то частное чисел а и в - это число подмножеств в этом разбиении.

$$\overbrace{а : в = с}^{\text{частное}}$$

делимое делитель частное

действие (:) - деление

- ***Связь деления и умножения***

$a = n(A)$, A разбито на b попарно непересекающихся равномощных подмножества $A1, A2,\dots, Ab$.
Тогда $c = a : в = n(A1) = n\ (A2) = \dots = n(Ab)$
Так как $A=A1\cup A2\cup\dots\cup Ab$, то
$n(A) = n(A1\cup A2 \cup\dots\cup Ab) = n(A1) + n(A2) +\dots+n(Ab) = = c + c +\dots+ c = c \cdot b$

$\underline{a = c \cdot b}$

$$a : в = c \Longleftrightarrow a = c \cdot в$$

деление – действие, обратное умножению

Связь с начальным курсом математики

Делимое **Делитель** **Частное**

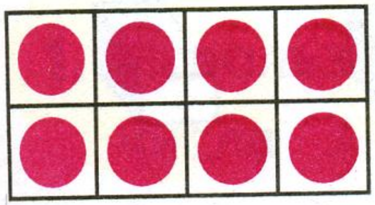
$$\underbrace{12 \; : \; 4}_{\text{Частное}} = 3$$

1. 1) Делимое 6, делитель 3. Найди частное.
2) Найди частное чисел 12 и 6.

2. Реши задачи и сравни решения.
1) Юля посадила 18 луковиц в 3 ряда поровну. Сколько луковиц в каждом ряду?
2) Вера посадила 18 луковиц, по 3 луковицы в ряд. Сколько получилось рядов?

3. Реши задачи и сравни решения.
1) Отрезок длиной 12 см разделили на 2 равные части. Чему равна длина каждой части?
2) Отрезок длиной 12 см разделили на части, по 2 см каждая. Сколько получилось частей?

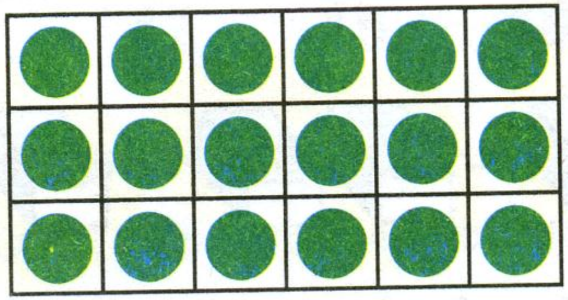
1. Рассмотри рисунки и объясни, как, зная произведение, можно узнать частное.



$4 \cdot 2 = 8$

$8 : 2$

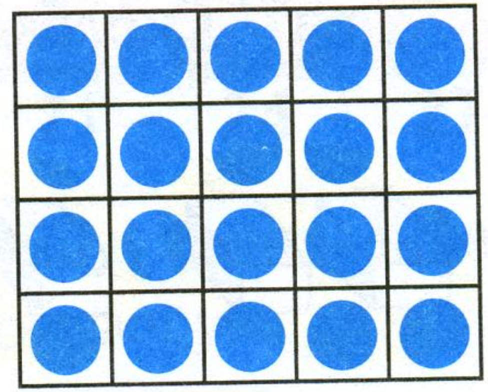
$8 : 4$



$3 \cdot 6 = 18$

$18 : 6$

$18 : 3$



$5 \cdot 4 = 20$

$20 : 5$

$20 : 4$

Закончи вывод.

Если произведение двух множителей разделить на один из них, то получится … .

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЧАСТНОГО.

Теорема 1 (условие существования частного)

Для того чтобы существовало частное двух натуральных чисел а и в, необходимо, чтобы в ≤ а.

Доказательство.

а : в = с, т.е. а = с · в

(∀ с∈N) 1 ≤ с. Умножим обе части неравенства на в.

в ≤ с·в. Так как с · в = а, то в ≤ а.

Замечание. 0 : в = 0

<u>Теорема 2.</u> *Если частное натуральных чисел а и в существует, то оно единственно.*

Невозможность деления на нуль

1) $a \neq 0$, $в = 0$

Предположим, что $a : в$ существует.

Тогда $\exists c: \ a = c \cdot 0 \ \Rightarrow \ a=0$ – противоречие с условием.

$\Rightarrow$ частное $a \neq 0$ и $в = 0$ не существует.

2) $a = 0$, $в = 0$

Предположим, что $a : в$ существует.

Тогда $\exists \ c: \ 0 = c \cdot 0$ – истинно для любого c

Частное $a = 0$ и $в = 0$ – любое число, что невозможно.

ДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НА НУЛЬ НЕВОЗМОЖНО

Лекция 7
Тема: «Деление целых неотрицательных чисел»

План:

Отношение «больше в» и «меньше в».

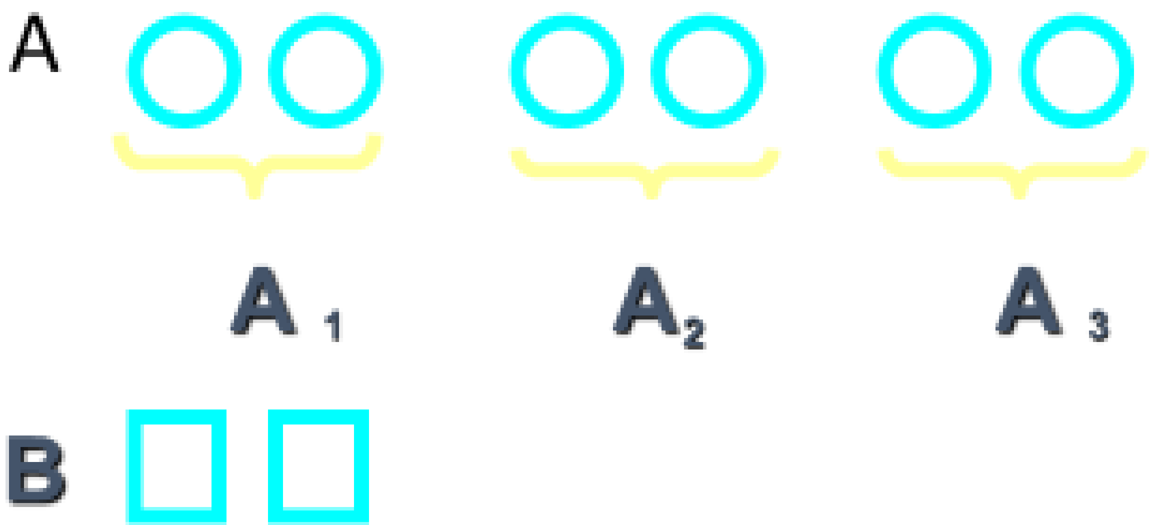
Правила деления.

Деление с остатком.

Свойства множества целых неотрицательных чисел.

Отношение «больше в» и «меньше в»

$n(A)=6$ $n(B)=2$



$A_1 \sim B$

$A_2 \sim B$

$A_3 \sim B$

Число 6 больше числа 2 в три раза,

число 2 меньше числа 6 в 3 раза.

Если $a = n(A)$, $в = n(B)$, $a > в$ и множество A можно разбить на с подмножеств, равномощных множеству B, то число а больше числа в в с раз, а число в меньше числа а в с раз.

Правило: *чтобы узнать во сколько раз одно число больше или меньше другого, необходимо большее число разделить на меньшее.*

Правило деления сумы на число

$$(a+b) : c = a : c + b : c$$

Доказательство.

- $a \vdots c \Rightarrow m \in N: \ m=a:c$ и $a=c \cdot m$
- $b \vdots c \Rightarrow n \in N: \ n=b:c$ и $b=c \cdot n$
- $a+b= c \cdot m+c \cdot n=c(m+n) \Rightarrow a+b$ делится на c и $(a+b):c=m+n=a:c+b:c$

Правило деления числа на произведение:

$$a : (b \cdot c) = (a:b) : c = (a:c) : b$$

Доказательство.

Пусть $\underline{(a:b):c=x}$.

Тогда $a:b=c \cdot x \Rightarrow a=b \cdot (c \cdot x)=(b \cdot c) \cdot x$.

Это значит, что $\underline{a:(b \cdot c)=x}$

Правило умножения числа на частное двух чисел:

$$a \cdot (b:c) = (a \cdot b):c$$

Пример

$$(720+600):24=720:24+600:24=30+25=55$$

Деление с остатком

$$37 : 8 = ?$$

$$37 = 8 \cdot \underbrace{4}_{\text{неполное частное}} + \underbrace{5}_{\text{остаток}}$$

Разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b – это значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, что $a=b \cdot q + r$ и $0 \leq r < b$

При делении чисел на b может получиться всего b различных остатков: 0,1,2,3,…, b-1.

Если $a < b$, то при делении a на b с остатком неполное частное $q = 0$, а остаток $r = a$, т.е. $a = 0 \cdot b + a$.

Теорема. Для любого целого неотрицательного числа a и натурального числа b существуют целые неотрицательные числа q и r, такие что

$a = b \cdot q + r$, причем $0 \leq r < b$. При этом пара чисел q и r - единственная.

В начальной школе:

9 : 2 = 4 (ост. 1)

Остаток всегда меньше делителя

Свойства множества целых неотрицательных чисел

1) Упорядоченность.

а) транзитивность отношения «меньше»

если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$

Доказательство.

$a < b \Rightarrow \exists x \; b = a + x$

$b < c \Rightarrow \exists y \; c = b + y$

$$c = (a + x) + y = \underbrace{a + (x + y)}_{\textbf{ц.н.ч.}} \Rightarrow a < c$$

б) антисимметричность отношения «меньше»

если $a < b$, то неверно, что $b < a$.

Доказательство.

$a < a$ – неверно.

Если $a < a$, то $\exists c$: $a = a + c$, что невозможно.

Пусть $a < b$ и $b < a$. Тогда по свойству транзитивности отношения «меньше» $a < a$, что невозможно.

Отношение «меньше» является **отношением** ***порядка***, а множество целых неотрицательных чисел – ***упорядоченным множеством***

2) Бесконечность

0,1,2,3,4,… - ряд бесконечен

3) Дискретность.

$a, \underbrace{a+1}_{\text{непосредственно следующее за } a}$

Ни для одного целого неотрицательного числа a нельзя указать такое натуральное число x, что

$$a < x < a + 1$$

a и a + 1 – соседние числа.