

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани

Кафедра общей и профессиональной педагогики

О. В. Игракова

Математика

**Учебно-методическое пособие к изучению дисциплины
для студентов 1-го курса бакалавриата,
обучающихся по направлению
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки – Начальное образование,
Дошкольное образование)
очной и заочной форм обучения**

Славянск-на-Кубани
Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
2017

ББК 22.1

УДК 51

И27

Рекомендовано к печати кафедрой общей и профессиональной педагогики филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани, протокол № 6 от 9.02.2017 г.

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент

С. А. Поздняков

Игракова, О. В.

И27 **Математика** : учеб.-метод. пособие к изучению дисциплины для студентов 1-го курса бакалавриата, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки – Начальное образование, Дошкольное образование) очной и заочной форм обучения / О. В. Игракова. – Славянск-на-Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2017. – 69 с. 50 экз.

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» составлено в соответствии с ФГОС высшего образования, учебным планом и учебной программой курса. В содержание пособия включены краткий теоретический материал по разделам «Множества и операции над ними», «Соответствия и отношения», «Элементы алгебры», планы практических занятий, которые содержат контрольные и проблемные вопросы, задания для работы в аудитории и вне ее, а так же задания в тестовой форме, теоретические вопросы и список рекомендуемой литературы. Пособие призвано помочь студентам освоить теоретический материал дисциплины, подготовиться к практическим занятиям и промежуточной аттестации.

Издание адресовано студентам 1-го курса бакалавриата, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки – Начальное образование, Дошкольное образование) очной и заочной форм обучения.

ББК 22.1

УДК 51

© Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Переход начальной школы на новый Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования, возможность выбора и конструирования собственной методики обучения, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета требуют от учителя хорошей математической подготовки и, прежде всего, знания научных основ начального курса математики.

Курс «Математика», изучающийся бакалаврами по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование по профилям «Начальное образование. Дошкольное образование», призван обеспечить необходимую подготовку студентов для успешного обучения и воспитания младших школьников, дальнейшего углубления и расширения математических знаний.

Учебным планом предусмотрено изучение этой дисциплины с 1 по 2 курс в течение 4-х семестров. Изучение данного курса тесно связано с дисциплиной «Методика преподавания математики».

Стержневыми, базисными понятиями начального курса математики являются понятие числа и величины, поэтому в курсе математики они должны занимать центральное место. Формирование этих понятий требует от студентов осознанного владения рядом общих математических понятий, таких, как множество, отношение и др. Следовательно, курс математики должен своевременно рассматривать эти понятия, поэтому предлагаемый материал изучается студентами на первом курсе и разбит на три блока (модуля), где рассматриваются следующие разделы:

- 1 семестр: «Множества и операции над ними», «Соответствия и отношения», «Элементы алгебры: числовые функции, выражения, уравнения и неравенства».

- 2 семестр: «Логические основы математики (математические утверждения и их структура)», «Текстовая задача и процесс ее решения», «Комбинаторные задачи и элементы теории вероятностей».

Раздел «Множества и операции над ними» знакомит студентов с основными понятиями теории множеств. Его изучение связано с овладением теоретико-множественным языком, который будет использоваться не только при рассмотрении логической структуры математических понятий, предложений и доказательств, но и при построении всего курса. Знания в этой области нужны учителю начальных классов, во-первых, для понимания содержания начального курса математики, независимо от того, явно или неявно в нем используются теоретико-множественные понятия; во-вторых, для освоения таких важных с профессиональной точки зрения понятий, как взаимно однозначное соответствие, отношение, число, геометрическая фигура.

В начальной школе дети знакомятся с различными зависимостями, отношениями, но чтобы использовать их в аспекте развития мыслительной

деятельности детей, учитель должен овладеть некоторыми общими понятиями современной алгебры – понятием соответствия, отношения и др. Учителю надо понимать их суть. Этой цели посвящен раздел «Соответствия и отношения».

Изучение раздела «Элементы алгебры: функции, выражения, уравнения, неравенства» связано с решением двух основных задач:

- дать обоснование тем вопросам, которые необходимы учителю для понимания ряда понятий, изучаемых в начальных классах,
- уточнить, углубить и обобщить знания студентов, полученных ими в курсе математики средней школы и сформировать соответствующие компетенции.

Процесс изучения дисциплины в соответствии с ФГОС ВО направлен на формирование следующих компетенций студентов:

- способностью использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном пространстве (ОК-3);
- готовностью реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов (ПК-1).

Предлагаемое пособие содержит краткий теоретический материал по указанным разделам дисциплины, планы практических занятий и практические задания к самостоятельной работе студентов по каждому модулю (разделу). По каждой теме приведены теоретические вопросы для подготовки к занятиям, задачи, рекомендуемые для решения в аудитории и дома. Задания подобраны различных типов, выстроены по возрастанию уровня сложности и направлены на развитие у студентов логики аналитических рассуждений. При подборе дидактического материала учитывалась профессиональная направленность, которая представлена тщательным отбором системы заданий: с ее помощью устанавливается связь изучаемого материала с начальным курсом математики. Наиболее трудные задания отмечены знаком * и предназначены для наиболее успевающих и увлекающихся математикой студентов.

Материал, представленный в пособии, призван помочь студентам в ходе освоения лекционного курса, на практических занятиях и при подготовке к ним, а также к контрольным работам, тестовому контролю, зачету или экзамену по математике. Решение предложенных задач послужит цели закрепления изученных теоретических положений и формирования навыка применения приобретенных знаний в практической деятельности, а также позволит активизировать процесс получения студентами новых знаний.

1 СЕМЕСТР

РАЗДЕЛ 1 МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

ТЕМА 1 «ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ»

Цель: сформировать у студентов понятие множества, элемента множества, отношения между множествами; выработать умения задавать множества различными способами, определять отношения между множествами.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 1

1. Дайте понятие множества и элемента множества.
2. Что означает пустое множество?
3. Каковы способы задания множеств?
4. Какие числовые множества вам известны?
5. Что такое характеристическое свойство?
6. Для каких множеств применим каждый из способов задания множеств?
7. Какие могут быть отношения между множествами?
8. Что называется подмножеством данного множества?
9. В каком случае множества равны?
10. Какие виды подмножеств данного множества вам известны?
11. Как подсчитать число подмножеств заданного множества?
12. Связь введенных понятий с начальным курсом математики.

Задания для работы в аудитории по теме 1

Задача № 1. Укажите элементы множеств: $A = \{x: x \in \mathbf{N}, x < 6\}$;
 $B = \{x: x \in \mathbf{Z}, -4 \in x < 3\}$;
 $C = \{x: x \in \mathbf{R}, 2x^2 = 10\}$.

Задача № 2. Запишите, используя символы:

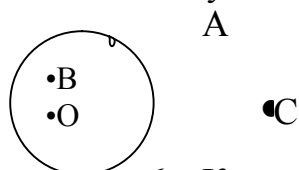
- а) число 14 – натуральное,
- б) число 7 – не является натуральным,
- в) число 0 – рациональное,
- г) $\sqrt{7}$ – число действительное.

Задача № 3. Прочитайте следующие высказывания, укажите среди них верные:

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| а) $100 \in \mathbf{N}$; | б) $-8 \in \mathbf{Z}$; | в) $-12 \notin \mathbf{N}$; |
| г) $5,36 \in \mathbf{Q}$; | д) $102 \notin \mathbf{R}$; | е) $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$; |
| ж) $-7,3 \in \mathbf{R}$; | з) $\frac{3}{4} \in \mathbf{N}$; | и) $0 \in \mathbf{N}$. |

Задача № 4. P – множество натуральных чисел, больших семи и меньших четырнадцати. Выясните, какие из чисел 13, 10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.

Задача №5. М – множество точек окружности, изображенной на рисунке. Прочитайте следующие предложения и укажите среди них верные.



- а) $A \in M$; б) $O \in M$;
в) $B \in M$; г) $C \notin M$.

Задача № 6. Как изменить условие предыдущей задачи, чтобы все утверждения а)–г) были верными?

Задача № 7. А – множество решений уравнения $x^2+1=0$. Верно ли, что А – пустое множество? Приведите пример уравнения, множество решений которого состоит из:

- а) одного элемента; б) двух элементов.

Задача № 8. Из каких элементов состоит множество трехзначных чисел, составленных из цифр 1 и 3?

Задача № 9. Какие из следующих множеств пусты:

- а) множество людей на Венере;
б) множество городов России с населением более 1 млн;
в) множество параллелограммов с неравными противоположными сторонами;
г) множество квадратов без центра симметрии;
д) множество натуральных чисел, меньших 1;
е) множество двузначных чисел, меньших 9.

Задача № 10. Даны два множества $X=\{2,4,6\}$, $Y=\{0,2,4,6,8\}$. Верно ли, что:

- а) множества X и Y пересекаются;
б) множество X является подмножеством множества Y;
в) множество $P=\{4,0,6,8,2\}$ равно множеству Y.

Задача № 11. Известно, что элемент а содержится в множестве А и в множестве В. Следует ли из этого, что:

- а) $A \subset B$; б) $B \subset A$; в) $A=B$.

Задача № 12. Даны множества: $A=\{a, b, c, d, e, f, g, k\}$, $B=\{a, e, k\}$, $C=\{b, d, g, k, t\}$, $D=\{a, e\}$, $E=\{e, f, k, g, a\}$. Укажите, какие из них являются подмножествами множества А. Является ли D подмножеством С?

Задача № 13. Образуйте все подмножества множества $A=\{1, 2, 3, 4\}$.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 1

1. Укажите, какие из записей верны:

- | | | | |
|---------------------------|------------------------------------|--|--|
| а) $270 \in \mathbb{N}$; | д) $1\frac{2}{3} \in \mathbb{N}$; | и) $18 \in \mathbb{Z}$; | н) $22\frac{7}{8} \notin \mathbb{N}$; |
| б) $1 \in \mathbb{N}$; | е) $14 \notin \mathbb{N}$; | к) $0 \in \mathbb{Z}$; | о) $-14,2 \notin \mathbb{Z}$; |
| в) $0 \in \mathbb{N}$; | ж) $-7 \in \mathbb{N}$; | л) $-27 \in \mathbb{Z}$; | п) $-14,2 \in \mathbb{Z}$. |
| г) $-70 \in \mathbb{N}$; | з) $-\frac{1}{4} \in \mathbb{N}$; | м) $22\frac{7}{8} \notin \mathbb{Z}$; | |

2. Перечислите элементы следующих множеств:

А – множество нечетных чисел на отрезке $[1;15]$;

В – множество натуральных чисел, меньших 8;

С – множество натуральных чисел, больших 10, но меньших 12;

Д – множество двузначных чисел, делящихся на 10;

Е – множество натуральных делителей числа 18.

3. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства, если x – действительное число:

а) $x \leq -3,8$;

б) $2,7 \leq x \leq 9$.

4. Докажите, что следующие множества являются пустыми:

а) $\{x : x \in \mathbb{N}, x < 0\}$; б) $\{x : x \in \mathbb{N}, 8 < x < 9\}$; в) $\left\{x : x \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{3}\right\}$.

5. Найдите множество корней каждого из уравнений. Какие из этих множеств пусты:

а) $2x + 3 = 3, x \in \mathbb{R}$;

в) $x^2 - 4 = 0, x \in \mathbb{Z}$;

б) $2(x - 5) = 3x, x \in \mathbb{R}_+$;

г) $(2x + 7)(x - 2) = 0, x \in \mathbb{R}_+$.

6. Перечислите элементы следующих множеств:

А – множество нечетных однозначных чисел;

В – множество натуральных чисел, меньших или равных 20;

С – множество двузначных чисел, делящихся на 10.

7. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств:

а) $\{a, e, и, o, y, э, ы, ю, я\}$;

б) $\{111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999\}$.

8. Дано множество $P = \{3, 5, 7, 9\}$. Образуйте все возможные его подмножества. Сколько их должно быть?

9. Верны ли следующие записи:

а) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$;

б) $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

в) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

10. Равны ли следующие множества:

а) $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{6, 4, 2\}$;

б) $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{I, II, III\}$;

в) $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ и $B = \{2, 3, 1\}$.

11. Пусть $A = \{3, 1, 2\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 4\}$. Что можно сказать о множествах А и В?

12*. На плоскости даны множества: А – всех трапеций, В – всех прямоугольников, С – всех четырехугольников, Д – всех квадратов, Е – всех

параллелограммов, К – всех многоугольников. Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая последующая обозначала подмножества предыдущего.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 1

1.1 Понятия множества и элемента множества

В математике часто рассматривают те или иные группы объектов, как единое целое: натуральные числа, треугольники и т. д. Все эти различные совокупности называют *множествами*.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Например, множество гласных букв русского алфавита, множество натуральных чисел и т. д.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Можно рассматривать множество, состоящее из одного объекта и множество, не содержащее ни одного объекта.

Обозначают множества буквами латинского алфавита: A, B, C, D ... Z.

Множество, не содержащее ни одного объекта, называют пустым и обозначают $\emptyset$.

Объекты, из которых образованно множество, называют элементами. Обозначают элементы малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d ... z.

Предложение «объект a принадлежит множеству A» кратко запишется: $a \in A$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. Например, множество дней недели, множество месяцев в году – конечные множества; множество точек на прямой, множество натуральных чисел – бесконечные.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами (множество «звеньев» во 2 «А» классе, каждое звено есть множество, состоящее из нескольких учеников класса).

В начальной школе обычно имеют дело с конечными множествами. Элементами множества могут быть самые разнообразные предметы любой природы, как конкретные (растения, животные, предметы обихода и т. д.), так и абстрактные (числа, геометрические фигуры, отношения и т. д.), или изображения таких объектов.

1.2 Способы задания множеств

Считают, что множество определяется своими элементами, т. е. *множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.*

Множество можно задать *перечислив все его элементы*. Например, если множество A состоит из чисел 3, 4, 5, 6, 7, то используют запись $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Однако, если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множеств: *указывают характеристическое свойство его элементов*.

Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. Например, множество B двузначных чисел: характеристическое свойство – «быть двузначным числом».

В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества. Например, множество C натуральных чисел, меньших 7, можно задать так: $C = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 7\}$.

Важно уметь переходить от одного способа задания множества к другому. Этому обучаются уже младшие школьники, выполняя задание «Записать числа, которые больше 65 и меньше 75».

1.3 Отношения между множествами

В математике изучаются не только те или иные множества, но и взаимосвязи между ними. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы принадлежат одновременно A и B , то говорят, что эти множества *пересекаются*. Например, $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{b, d, k, m\}$; $C = \{x, y, z\}$. Множество A и B пересекаются, т.е. имеют общие элементы b и d , а множества A и C , а также B и C не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

Рассмотрим множество $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, d, e\}$. Эти множества пересекаются и, кроме того, каждый элемент множества B является элементом множества A . В этом случае говорят, что множество B включается в множество A или множество B является подмножеством множества A и пишут $B \subset A$. Термин «подмножество» применяется в математике в смысле «часть множества».

Множество B является подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является так же элементом множества A . Пустое множество считают подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя.

Из определения следует, что среди всех подмножеств заданного множества A должно быть обязательно пустое множество и само множество A , их называют *несобственными*. Все остальные подмножества будут *собственными*.

Доказано, что если множество A содержит n элементов, то у него 2^n различных подмножеств.

Рассмотрим множество: $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{c, a, d, b, e\}$. Они пересекаются и каждый элемент множества A является элементом множества B , т. е. $A \subset B$, и наоборот, т. е. $B \subset A$. В этом случае говорят, что множества A и B *равны* и пишут $A=B$.

Равные множества состоят из одних и тех же элементов и порядок записи элементов множества не существен.

Понятие подмножества является обобщением понятия части и целого, которые осваивают младшие школьники, выполняя разные задания. Например: «Назови среди данных чисел чётные», «Среди данных четырёхугольников найди прямоугольники».

Задание! Смоделируйте случаи пустого множества и самого множества (в смысле подмножеств множества A) на конкретных ситуациях, с которыми можно познакомить учащихся начальных классов.

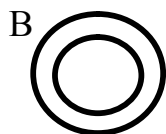
В начальных классах можно предложить вопросы, касающиеся конкретных множеств предметов с целью выявления отношений между множествами окружающих нас предметов. Например, вопросы «Все ли березы – деревья?» и «Все ли деревья – березы?». Этими вопросами выявляется отношение включения между множествами берез и деревьев. Другой пример: «Все ли автомашины красные?», «Все ли красные предметы – автомашины?», «Но имеются ли красные автомашины?». Этими вопросами выявляется отношение пересечения между множествами красных предметов и автомашин.

1.4. Изображение множеств в виде кругов Эйлера

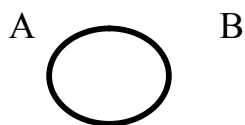
Отношения между множествами наглядно представляют при помощи особых чертежей, называемых *кругами Эйлера*. Для этого множества представляют в виде кругов, овалов или любых других геометрических фигур. Возможны следующие случаи:



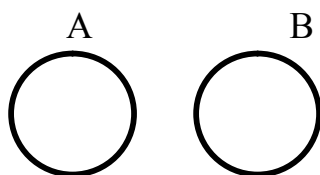
множества A и B пересекаются



множество A содержится во множестве B



множества A и B равны



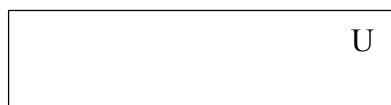
множества A и B не пересекаются

Круги или близкие к ним фигуры, точки которых изображают элементы множеств, называют кругами Эйлера. Изображение различных множеств в виде кругов Эйлера с учётом отношений между ними называют диаграммой Эйлера – Венна.

Универсальное множество – это самое «большое» множество, содержащее в себе все множества, рассматриваемые в задаче.

Например: если речь идёт об учениках 1 «Б» класса СОШ № 26, то универсальным множеством может служить множество всех учеников школы № 26 или множество всех учеников школ города (в зависимости от контекста).

На диаграммах Эйлера–Венна универсальные множества принято обозначать в виде прямоугольника и буквой U.



ТЕМА 2 «ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ»

Цель: сформировать у студентов понятие операции пересечения и объединения множеств; выработать умение изображать множества и отношение между множествами с помощью кругов Эйлера, находить пересечение и объединение множеств, заданных различными способами, пользоваться свойствами операций пересечения и объединения.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 2

1. Как изображают отношения между множествами с помощью кругов Эйлера?
2. Что называется пересечением множеств?
3. Что называется объединением множеств?
4. Как изобразить пересечение и объединение множеств с помощью кругов Эйлера?

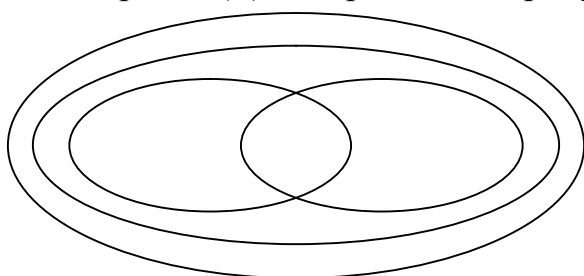
5. Как найти пересечение и объединение конечных множеств, заданных перечислением элементов?
6. Как найти пересечение и объединение множеств, заданных с помощью характеристического свойства элементов?
7. Каковы свойства пересечения и объединения множеств?
8. Что означает универсальное множество?
9. Какую операцию вы выполните первой, если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок?

Задания для работы в аудитории по теме 2

Задача № 1. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами C и D , если:

- а) C – множество двузначных чисел, $D = \{3, 43, 34, 56, 103\}$;
- б) C – множество двузначных чисел, D – множество четных натуральных чисел;
- в) C – множество двузначных чисел, D – множество трехзначных чисел;
- г) C – множество двузначных чисел, D – множество натуральных чисел, не меньших 10.

Задача № 2. Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников (A), параллелограммов (B), прямоугольников (C), ромбов (D) и квадратов (E) изображены на рисунке. Покажите каждое из множеств.



Задача № 3. Найдите пересечение множеств:

- а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, d, e, g, h\}$;
- б) $A = \{x: -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$, $B = \{x: -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$.

Задача № 4. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cap B$?

Задача № 5. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

Задача № 6. Из каких элементов состоит пересечение множества букв в слове «МАТЕМАТИКА» и множества букв в слове «ГЕОМЕТРИЯ»?

Задача № 7. M – множество однозначных чисел, P – множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит пересечение данных множеств? Содержатся ли в нем числа -7 и 9 ?

Задача № 8. А – множество точек окружности, В – множество точек прямой l. Из скольких элементов может состоять пересечение данных множеств? Может ли оно быть пустым?

Задача № 9. М – множество спортсменов в некоторой школе, Р – множество мальчиков в этой школе. Изобразите эти множества при помощи кругов Эйлера. Укажите характеристическое свойство элементов множества $M \cap P$.

Задача № 10. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cup B$?
Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

Задача № 11. Найдите объединение множеств, если:

- а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$,
- б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$.

Задача № 12. Из каких элементов состоит объединение множества букв в словах «МАТЕМАТИКА» и «ГЕОМЕТРИЯ»?

Задача № 13. Найдите объединение множеств А и В, если

$$A = \left\{x: -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}, B = \left\{x: -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\right\}.$$

Задача № 14. С – множество букв в Вашем имени, D – множество гласных букв русского алфавита. Найдите множество $C \cup D$ и $D \cup C$ и сравните их. Для множеств С и D постройте диаграмму Эйлера–Венна.

Задача № 15. М – объединение множества двузначных натуральных чисел и множества натуральных чисел от 1 до 7. Принадлежат ли множеству М числа: 14, 99, 100, 5, 7, 10?

Задача № 16. Школьникам предложено начертить две фигуры, принадлежащие объединению множеств С и D, если:

- а) С – множество ромбов, D – множество прямоугольников;
- б) С – множество равнобедренных треугольников,
D – множество прямоугольных треугольников.

Выполняя задание а), учащийся К. начертил квадрат и прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Прав ли он?

Учащийся Р., выполняя задание б), начертил равносторонний треугольник и прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 3 см. Верно ли он выполнил задание?

Задача № 17. Назовите все множества, о которых идет речь в задаче:

- а) У школы посадили 4 липы и 3 березы. Сколько всего деревьев посадили у школы?
- б) У Коли было 6 книг. В день рождения ему подарили еще 4 книги. Сколько книг стало у Коли?

Задача № 18. Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли из этого, что

- а) $x \in B \cup A$;
- б) $x \in A \cup B$;
- в) $x \in B \cup A$?

Задача № 19. Определите порядок выполнения действий в следующих выражениях:

а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B \cap C$; в) $A \cap B \cup C \cap D$; г) $A \cup B \cap C \cup D$.

Задача № 20. Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества А, В и С. Отметьте штриховкой области, изображающие множества:

а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cup C$; в) $(A \cap B) \cup C$.

Задача № 21. Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:

а) $P \cap M \cap K$; б) $P \cap (M \cup K)$; в) $P \cap M \cup P \cap K$.

Задача № 22. Даны множества: А – натуральных чисел, кратных 2, В – натуральных чисел, кратных 3, С – натуральных чисел, кратных 5.

а) Изобразите данные множества при помощи кругов Эйлера и покажите область, изображающую множество $A \cap B \cup C$.

б) Сформулируйте характеристическое свойство элементов этого множества и назовите 3 элемента, которые ему принадлежат.

в) Верно ли, что $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме2

1. Какое из данных множеств является подмножеством другого:

а) А – множество натуральных чисел, кратных 2;

В – множество натуральных чисел, кратных 6;

С – множество натуральных чисел, кратных 3.

б) А – множество треугольников;

В – множество прямоугольных треугольников;

С – множество остроугольных треугольников.

Изобразите при помощи кругов Эйлера.

2. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами А, В и С, если известно, что:

1) $A \subset B$ и $B \subset C$,

2) $A \subset B$, С пересекается с В, но не пересекается с А,

3) А, В и С пересекаются, но ни одно не является подмножеством другого. Приведите примеры для каждого случая.

3. Найдите пересечение множеств А и В, если:

а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$;

б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$;

в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

4. Р – множество двузначных натуральных чисел, S – множество всех нечетных натуральных чисел. Какие числа входят в множество $K = P \cap S$?

Верно ли, что

- а) $21 \in K$; в) $7 \notin K$;
б) $32 \in K$; г) $17 \notin K$?

5. Найдите пересечение множества различных букв, входящих в слово «МАТЕМАТИКА», и множества различных букв, входящих в слово «ГРАММАТИКА»?

6. Используя координатную прямую, найдите пересечение множеств решений неравенств, в которых x – действительное число:

- а) $x > -2$ и $x > 0$; в) $x \geq 5$ и $x < -7,5$;
б) $x > -3,7$ и $x \leq 4$; г) $-2 < x < 4$ и $x \geq -1$;
д) $-7 \leq x \leq 5$ и $-6 \leq x \leq 2$.

7*. Из 100 учащихся, изучающих английский и немецкий языки, 85 изучают английский, 45 – немецкий. Сколько человек изучают оба языка?

8. Найдите объединение множеств A и B , если $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

9. M – множество однозначных чисел; P – множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит объединение данных множеств? Содержатся ли в нем числа -7 и 9 ?

10. $A = \{n : n \in N, n < 5\}$, $B = \{n : n \in N, n > 7\}$. Найдите объединение этих множеств. Верно ли, что $4 \in A \cup B$; ?

11. Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества A , B и C и отметьте штриховкой области, изображающие множества:

- а) $(A \cup B) \cap C$; б) $A \cup B \cap C$; в) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

12. Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:

- а) $(P \cap M) \cap K$; б) $P \cup (M \cap K)$; в) $(M \cup P) \cap (P \cup K)$.

13. Даны множества: X – двузначных чисел, Y – четных натуральных чисел, P – натуральных чисел, кратных 4.

а) Укажите характеристическое свойство элементов каждого из множеств A и B , если $A = X \cap Y \cap P$, $B = X \cap (Y \cap P)$.

б) Изобразите множества X , Y , P при помощи кругов Эйлера и покажите области, представляющие множества A и B (для каждого случая выполняйте отдельный рисунок).

- в) Верно ли, что $24 \in A$, а $23 \in B$?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 2

2.1 Операции над множествами: пересечение множеств

Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества.

Пусть даны два множества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Образуем множество C , в которое включим общие элементы множеств A и B , т. е. $C = \{6, 8\}$. Полученное множество C называется пересечением множеств A и B .

Пересечением множеств A и B называют множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и множеству B .

Пересечение обозначают $A \cap B$. Изображение пересечения с помощью кругов Эйлера:



Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что их пересечение пусто и пишут $A \cap B = \emptyset$.

Если элементы множеств A и B перечислены, то чтобы найти $A \cap B$ достаточно перечислить элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и множеству B , т. е. их общие элементы.

Если множества заданы характеристическими свойствами своих элементов, то характеристическое свойство множества $A \cap B$ составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

Задание! Подберите несколько примеров пересекающихся и непересекающихся множеств из начального курса математики.

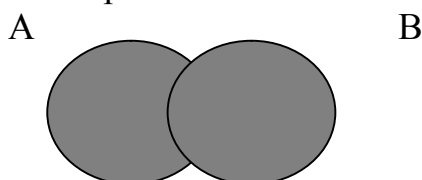
2.2 Объединение множеств

Пусть даны два множества $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Образуем множество D , в которое включим элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств, т. е. A или B : $D = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Полученное множество называется объединением множеств A и B .

Объединением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B .

Объединение обозначают $A \cup B$. С помощью кругов Эйлера объединение множеств изобразится так:



Если элементы множеств A и B перечислены, то чтобы найти $A \cup B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B .

Если множества заданы характеристическими свойствами своих элементов, то характеристическое свойство множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств множеств A и B с помощью союза «или».

Умение вычленять множества в задачах, и операции, которые над ними выполняются, – важный этап в их решении. Чтобы правильно выбрать действие, с помощью которого решается задача: «В букете 3 ромашки и 4 колокольчика. Сколько всего цветов в букете?», надо понять, что в задаче рассматриваются два множества – множество ромашек (3 элемента) и множество колокольчиков (4 элемента). Эти множества объединены в одно, и требуется найти число элементов в этом объединении.

2.3 Свойства пересечения и объединения множеств

Если обратиться к пересечению и объединению множеств, то можно увидеть, что в них не фиксируется порядок оперирования множествами (при объединении к элементам одного множества можно присоединить элементы другого, а можно поступить наоборот) – это означает, что пересечение и объединение обладают переместительным (или коммутативным) и сочетательным (или ассоциативным) свойством.

Свойства пересечения:

1. Коммутативность: $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cap U = A$
6. $A \cap A = A$

Свойства объединения:

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cup U = U$
6. $A \cup A = A$

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в распределительных или дистрибутивных свойствах этих операций. Таких свойств два:

1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множества, т. е. для любых множеств A , B и C выполняется равенство:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т. е. для любых множеств A , B и C выполняется равенство:
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение.

Понятие пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств.

ТЕМА 3 «ВЫЧИТАНИЕ И ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВ»

Цель: сформировать у студентов понятие операций вычитания и дополнения множеств; выработать умение находить вычитание и дополнение множеств, заданных различными способами.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 3

1. Что называется разностью двух множеств?
2. Что называется дополнением множества?
3. Как изобразить разность и дополнение при помощи кругов Эйлера?
4. Какие свойства разности вам известны?
5. Как практически найти разность двух множеств, заданных перечислением своих элементов?
6. Как практически найти разность двух множеств, заданных характеристическими свойствами своих элементов?

Задания для работы в аудитории по теме 3

Задача № 1. Известно, что $x \in A \setminus B$. Следует ли из этого, что:

- а) $x \in A$; б) $x \in B$?

Задача № 2. Найдите разность множеств A и B , если

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Задача № 3. Даны множества: A – натуральных чисел, кратных 3, B – натуральных чисел, кратных 9. Сформулируйте характеристическое свойство элементов множества B_A' . Верно ли, что $123 \in B_A'$, а $333 \notin B_A'$?

Задача № 4. Найдите дополнение множества Y до множества X , если:

- а) X – множество точек прямой AB , Y – множество точек отрезка AB ,
б) X – множество точек квадрата, Y – множество точек круга, вписанного в этот квадрат.

Задача № 5. Из каких чисел состоит дополнение:

- а) множества натуральных чисел до множества целых,
б) множества целых чисел до множества рациональных.

Задача № 6. Начертите три круга, изображающие три попарно пересекающиеся множества A , B и C , и выделите области, представляющие множества:

- а) $A \cup B \setminus C$; б) $A \setminus C \cup B \setminus C$; в) $A \setminus B \cap C$.

Задача № 7. A – множество натуральных чисел, кратных 7, B – множество натуральных чисел, кратных 3, C – множество четных натуральных чисел. Из каких чисел состоят множества:

- а) $(A \cap B) \setminus C$; б) $(A \cup B) \setminus C$.

Задача № 8. Проиллюстрируйте при помощи кругов Эйлера, что для любых множеств A , B и C таких, что $B \subset C$, $C \subset A$, истинны равенства:

- а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; б) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Задача № 9. Постройте три круга, изображающие три попарно пересекающиеся множества A , B и C , и выделите области, представляющие множества:

- а) $A \setminus B \cup C$; б) $A \setminus (B \cup C)$.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 3

1. Найдите разность множеств A и B , если

- а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \emptyset$;
б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{1, 3, 5\}$;
в) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{6, 2, 3, 4, 5, 1\}$.

2. Найдите дополнение множества Y до множества X , если X – множество прямоугольников, Y – множество квадратов.

3. Из каких чисел состоит дополнение множества рациональных чисел до множества действительных.

4. Постройте три круга, изображающие три попарно пересекающиеся множества A , B и C , и выделите область, представляющую множество:

$$(A \setminus B) \cap C$$

5. A – множество натуральных чисел, кратных 7, B – множество натуральных чисел, кратных 3, C – множество четных натуральных чисел. Из каких чисел состоят множества:

- а) $(A \cap C) \setminus B$; б) $C \cup B \setminus A$?

6. Даны множества: $P = \{x: x \in \mathbb{R}, \frac{11}{4} \leq x \leq \frac{32}{5}\}$, $Q = \{x: x \in \mathbb{R}, \frac{19}{7} \leq x \leq \frac{19}{3}\}$, $S = \{x: x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 15\}$. Укажите характеристическое свойство элементов множества $S \setminus P \cap Q$.

7. О какой операции и над какими множествами идет речь в следующих задачах:

а) У Коли 10 книг, 2 книги он подарил товарищу. Сколько книг осталось у Коли?

б) В зале было 100 стульев. После того как вынесли несколько стульев, в зале осталось 86 стульев. Сколько стульев вынесли из зала?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 3

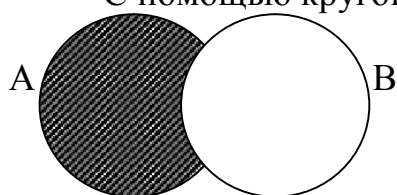
3.1 Вычитание множеств. Дополнение множества

Если заданы два множества, то можно вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называется разностью и определяют следующим образом.

Разностью множества A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B .

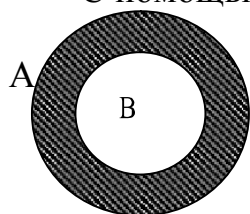
Обозначают разность $A \setminus B$. Тогда по определению: $A \setminus B = \{x: x \in A, x \notin B\}$.

С помощью кругов Эйлера разность изобразится следующим образом:



В школьном курсе математики чаще всего приходится выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A и обозначают $B'_A = A \setminus B$.

С помощью кругов Эйлера дополнение изображают:



Пусть $B \subset A$. Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A , которые не принадлежат множеству B .

Если элементы множеств A и B перечислены и $B \subset A$, то чтобы найти дополнение достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B .

В случае когда указаны характеристические свойства элементов множества A и B и известно, что $B \subset A$, то множество B'_A задают так же с помощью характеристического свойства, общий вид которого « $x \in A$ и $x \notin B$ ».

Условились считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Что касается объединения множеств и вычитания, то их считают равноправными.

Вычитание множеств обладает рядом *свойств*, т.е. для любых множеств A , B и C справедливы следующие равенства:

$$1. (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B,$$

2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

ТЕМА 4 «РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ»

Цель: сформировать у студентов понятие разбиения множества на классы; выработать умение правильно производить классификацию множеств, разбивать множества на классы при помощи свойств.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 4

1. Что такое классификация множеств и с чем она связана?
2. Каковы условия разбиения множества на классы?
3. В разбиении множества на классы с помощью одного, двух, трех, ..., n свойств каково количество классов разбиения в каждом случае?

Задания для работы в аудитории по теме 4

Задача № 1. Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества X_1, X_2, X_3 . В каком из следующих случаев множество X оказалось разбитым на классы:

- а) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{9\}$;
- б) $X_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $X_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $X_3 = \{10, 11, 12\}$;
- в) $X_1 = \{3, 6, 9, 12\}$, $X_2 = \{1, 5, 7, 11\}$, $X_3 = \{2, 10\}$?

Задача № 2. Из множества $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ выделили подмножества:

- а) A – четных чисел, B – нечетных чисел;
- б) A – чисел, кратных 2, B – чисел, кратных 3, C – чисел, кратных 4;
- в) A – нечетных однозначных чисел, B – четных двузначных чисел.

В каком случае произошло разбиение множества на классы?

Задача № 3. На какие классы разбивается множество точек плоскости при помощи:

- а) окружности;
- б) прямой.

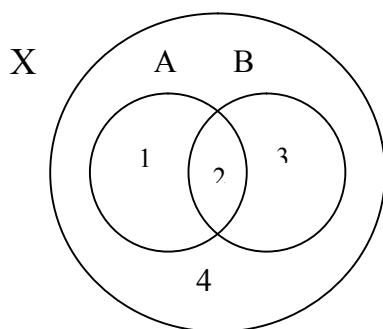
Задача № 4. На множестве натуральных чисел рассматривается свойство «быть кратным 7». Сколько классов разбиения множества натуральных чисел оно определяет? Назовите по два элемента из каждого класса.

Задача № 5. Из множества четырехугольников выделили подмножество фигур с попарно параллельными сторонами. На какие классы разбивается множество четырехугольников с помощью свойства «иметь попарно параллельные стороны»? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

Задача № 6. Изобразите при помощи кругов Эйлера множество N натуральных чисел и его подмножества: четных чисел и чисел, кратных 7. Можно ли утверждать, что множество N разбито:

- а) на два класса: четных чисел и чисел, кратных 7;
- б) на четыре класса: четных чисел, кратных 7; четных чисел, не кратных 7; нечетных чисел, кратных 7; нечетных чисел, не кратных 7.

Задача № 7. На рисунке изображены множество X – студентов группы, A – множество спортсменов этой группы, B – множество отличников этой группы. Укажите классы разбиения множества X , полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.



Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 4

1. Из множества треугольников выделили подмножества треугольников:

- а) прямоугольные, равнобедренные, равносторонние;
- б) остроугольные, тупоугольные, прямоугольные;
- в) равносторонние, прямоугольные, тупоугольные.

В каком случае произошло разбиение множества треугольников на классы?

2. На множестве четырехугольников рассматриваются два свойства: «быть прямоугольником» и «быть квадратом». На какие классы разобьется множество четырехугольников при помощи этих свойств? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

3. Изменится ли ответ предыдущей задачи, если на множестве четырехугольников рассмотреть свойства:

- а) «быть прямоугольником» и «быть ромбом»;
- б) «быть прямоугольником» и «быть трапецией».

4. X – множество студентов группы, A – множество спортсменов этой группы, B – множество отличников этой группы.

а) Выполните рисунок и укажите классы разбиения множества X , полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.

б) Сколько получилось бы классов разбиения, если бы ни один отличник группы не был спортсменом? Выполните соответствующий рисунок и назовите классы разбиения.

5. О каких множествах и операциях над ними идет речь в задаче: «С одной грядки сняли 25 кочанов капусты, а с другой – 15 кочанов. Всю эту капусту разложили в корзины, по 8 кочанов в каждую. Сколько потребовалось корзин?»

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 4

4.1 Понятие разбиения множества на классы

В жизни приходится сталкиваться с задачами классификации. В науке проблема классификации является одной из самых важных задач. Особенно хорошо это видно на примере ботаники, где существует очень сложная «многоступенчатая» классификация растений.

В математике буквально с первых лет обучения дети узнают, что бывают числа, записываемые с помощью одного знака и двух знаков. Более старшие ученики узнают, что есть еще трехзначные, четырехзначные и т. д. записи чисел.

Классификация – действие распределения объектов по классам.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, если:

- 1) подмножества $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ не пересекаются,*
- 2) объединение подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ совпадает с множеством X .*

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной.

4.2 Разбиение множества на классы с помощью свойств

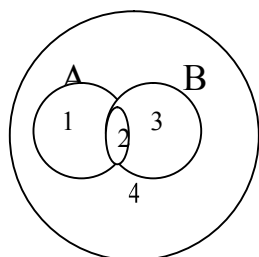
Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают разными свойствами. Предположим, что нас интересуют числа, обладающие свойством «быть кратным 3». Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные числа можно сказать, что они не кратны 3, т.е. получаем еще одно подмножество множества натуральных чисел. Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то получаем разбиение этого множества на два класса.



Вообще, если на множестве X задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – класс, обладающий этим свойством, а второй – класс объектов, не обладающих этим свойством. Такая классификация называется *дихотомической*.

Рассмотрим ситуацию, когда для элементов множества N заданы два свойства: «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества натуральных чисел можно выделить два подмножества: A – подмножество чисел кратных 3, B – подмножество чисел кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.



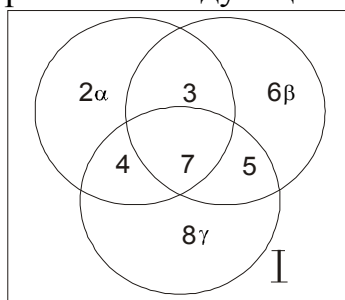
Разбиения множества натуральных чисел на подмножества A и B не произошло, но круг, изображающий множество N , можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей. Каждая область изображает некоторое подмножество множества N :

- 1 – множество чисел кратных 3, но не кратных 5,
- 2 – множество чисел кратных 3 и кратных 5,
- 3 – множество чисел кратных 5, но не кратных 3,
- 4 – множество чисел не кратных 3 и не кратных 5.

Объединение этих четырех подмножеств есть множество N .

Таким образом, выделение *двух свойств* привело к разбиению множества N натуральных чисел на *четыре класса*.

В случае разбиение множества на классы с помощью 3-х свойств изображение следующее:



Нетрудно подсчитать, что получилось в этом случае восемь классов. Они помечены цифрами от 1–8.

Таким образом, можно подметить закономерность: *при разбиении множества на классы с помощью n свойств получается 2^n классов разбиения.*

Задание! Приведите пример и опишите задание из начальной школы, в котором применяется классификация объектов (с помощью одного и двух свойств).

ТЕМА 5 «ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ И ЕГО СВОЙСТВА»

Цель: сформировать у студентов понятие декартова произведения множеств; выработать умение находить и изображать декартово произведение двух числовых множеств на координатной плоскости, пользоваться свойствами декартова произведения при решении задач.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 5

1. Что такое упорядоченные пары?
2. Что называется декартовым произведением двух множеств?
3. Как можно задать декартово произведение множеств?
4. Как можно изобразить наглядно декартово произведение двух числовых множеств?
5. Что называется кортежем? Длиной кортежа?
6. Дайте определение декартова произведения n множеств.
7. Какие свойства декартова произведения вам известны?
8. Обладает ли декартово произведение множеств свойствами коммутативности и ассоциативности?

Задания для работы в аудитории по теме 5

Задача № 1. Дано уравнение $2x-3=y$. Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара (4; 5) решением данного уравнения? А пара (5; 4)?

Задача № 2. Элементами множеств A и B являются пары чисел:

$$A = \{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3), (5, 0)\},$$

$$B = \{(1, 9), (2, 7), (3, 6), (4, 7), (5, 0)\}.$$

Найдите пересечение и объединение данных множеств.

Задача № 3. Перечислите элементы декартова произведения $A \times B$, если:

а) $A = \{a, в, с, d\}; B = \{b, k, l\};$

б) $A = B = \{a, в, с\}.$

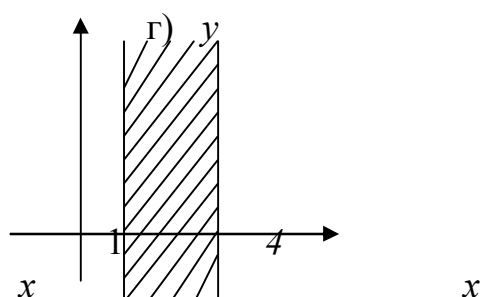
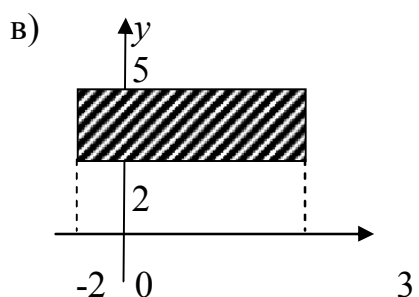
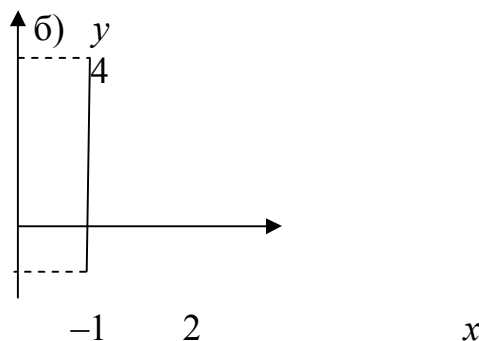
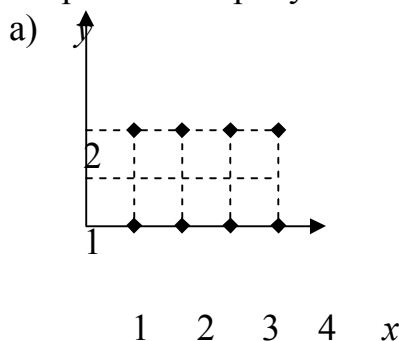
Задача № 4. Запишите различные двузначные числа, используя цифры 3, 4, 5. Сколько среди них таких, запись которых начинается с цифры 3?

Задача № 5. Проверьте справедливость равенства

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ для множеств $A = \{3, 5, 7\}, B = \{7, 9\}, C = \{0, 1\}.$ Выполняется ли для них равенство $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)?$

Задача № 6. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $A \times B$, если $A = [-2; 2]$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Задача № 7. Определите, декартово произведение каких множеств X и Y изображено на рисунках:



Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 5

1. Даны два множества: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$. Перечислите элементы множеств $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что:
 - а) множества $A \times B$ и $B \times A$ содержат одинаковое число элементов;
 - б) множества $A \times B$ и $B \times A$ равны?
2. Запишите множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$, если $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2, 3\}$.
3. Сколько букв в слове «барабан»? Сколько различных букв в этом слове? Сформулируйте эту задачу, используя понятия множества и кортежа.
4. Выполняется ли для множества $A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{8, 9\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ равенство $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$?
5. Изобразите в прямоугольной системе координат множество $A \times B$, если:
 - а) $A = [-2, 2]$, $B = (2; 4)$;
 - б) $A = \mathbf{R}$, $B = [2, 4]$.
6. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множества:
 - а) $X \times Y$, если $X = \{x: x \in \mathbf{Z}, -3 \leq x \leq 3\}$, $Y = \{y: y \in \mathbf{R}, -1 \leq y \leq 2\}$;
 - б) $X \times X$, если $X = \{x: x \in \mathbf{R}, -1 \leq x \leq 6\}$.

7. Покажите графически, что декартово произведение множеств $A=\{3,2,1\}$ и $B=\{4, 4, 6\}$ не обладает переместительным свойством.
- 8*. Найдите декартово произведение отрезка и окружности.
(Указание! Используйте трехмерное пространство).

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 5

5.1 Декартово произведение множеств и его свойства

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33, 55. Несмотря на то, что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, числа различны. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов.

Упорядоченную пару, образованную из элементов a и b , принято записывать, используя круглые скобки: $(a; b)$. Элемент a называется *первой координатой (компонентой) пары*, а элемент b – *второй координатой (компонентой) пары*.

Пары $(a; b)$ и $(c; d)$ равны в том случае, когда $a=c$ и $b=d$.

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,5\}$. Образует упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству A , а вторая – множеству B . Перечислив все такие пары, получим множество: $\{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$. Это множество называют декартовым произведением множеств A и B .

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству A , а вторая компонента принадлежит множеству B .

Обозначают декартово произведение $A \times B$.

Так как декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ состоят из различных элементов, то операция нахождения декартова произведения множеств свойствами коммутативности и ассоциативности не обладает. Но она дистрибутивна относительно объединения и вычитания множеств, т.е. для любых множеств A , B и C выполняются равенства:

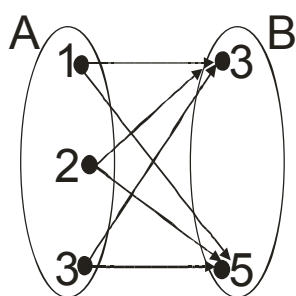
$$1. (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$$

$$2. (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Задание! Показать самостоятельно справедливость невыполнения свойств коммутативности и ассоциативности.

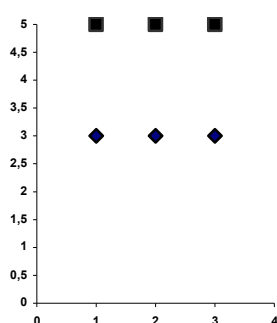
5.2 Графическое изображение декартова произведения двух множеств

Если множества A и B конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств при помощи графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств $A=\{1, 2, 3\}$ и $B=\{3, 5\}$ можно представить так:



A \ B	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости. Например, декартово произведение $A \times B$ множеств $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 5\}$ на координатной плоскости будет выглядеть так:



Заметим, что элементы множества A мы изобразили на оси Ox , а элементы множества B – на оси Oy . Такой способ наглядного представления декартова произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

5.3 Понятие кортежа. Декартово произведение n множеств

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и т. д. элементов. Например, запись числа 367 – это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» – это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют *кортежами* и различают по длине. *Длина кортежа* – это число элементов, из которых он состоит. Например, (3; 6; 7) – это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) – это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще n множеств.

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество всех кортежей длины n , первая компонента которых принадлежит множеству A_1 , вторая – множеству $A_2, \dots, n$ -я – множеству A_n .

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ обозначают так: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

ТЕМА 6 «ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕНИИ, РАЗНОСТИ И ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ»

Цель: выработать умение находить число элементов в объединении, разности и декартовом произведении множеств при решении конкретных задач.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 6

1. По какой формуле можно найти число элементов в объединении двух непересекающихся множеств?
2. По какой формуле можно найти число элементов в объединении двух любых множеств?
3. Какова формула нахождения числа элементов разности двух конечных множеств.
4. По какой формуле находится число элементов в декартовом произведении множеств?

Задания для работы в аудитории по теме 6

Задача № 1. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21 – немецкий язык, а 15 – английский и немецкий. Сколько студентов курса не изучают ни немецкий, ни английский языки?

Задача № 2. В третьем классе дети коллекционируют марки и монеты. Марки коллекционируют 8 человек, монеты – 5 человек. Всего коллекционеров 11. Сколько человек коллекционируют только марки? Сколько только монеты?

Задача № 3. Из 38 учащихся класса 24 занимаются в хоре и 15 в лыжной секции. Сколько учащихся занимаются и в хоре, и в лыжной секции, если в классе нет учащихся, не посещающих занятий хора или лыжной секции.

Задача № 4. В группе туристов, состоящей из 100 человек, 10 человек не знали ни немецкий, ни французский языки, 75 знали немецкий, 83 знали французский. Сколько туристов знали два языка?

Задача № 5. У Маши 3 различных юбки и 4 различных кофты. Сколько различных комплектов, состоящих из юбки и кофты, она может составить?

Задача № 6. Множество A содержит 7 элементов. Сколько элементов в множестве B , если декартово произведение $A \times B$ состоит из:

- а) 42 элементов; б) 7 элементов.

Задача № 7. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 4 и 7? (Решите задачу разными способами).

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 6

1. Из 32 школьников 12 занимаются в волейбольной секции, 15 – в баскетбольной, 8 человек занимаются и в той, и в другой секции. Сколько школьников не занимаются ни в волейбольной, ни в баскетбольной секции?
2. Катя положила в коробку 4 зеленых круга, 6 треугольников и 3 красных многоугольника. Всего в коробке оказалось 11 фигурок. Сколько среди них красных треугольников?
3. В школе 70 учеников. Из них 27 ходит в драмкружок, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов. 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не ходят в драмкружок?
4. В школе 400 учащихся. Из них в музыкальных кружках занимается 130 человек, а в спортивных кружках – 190 человек. Известно, что одновременно и спортом, и музыкой занимаются 40 человек. Сколько человек занимаются только в одном кружке?
5. Сколько различных наборов можно составить из книги и блокнота, если имеется 20 видов различных книг и 15 видов различных блокнотов?
6. Решите задачу методом перебора всех возможных вариантов, а затем покажите, что решение связано с определением числа элементов декартова произведения множеств: «В костюмерной танцевального кружка имеются белые и розовые кофты, а также синие, черные и коричневые юбки. Сколько можно из них составить различных костюмов?»
7. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, если цифры в записи числа: 1) повторяются; 2) не повторяются?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 6

6.1 Число элементов в объединении и разности конечных множеств

Чтобы найти число элементов объединения двух конечных непересекающихся множеств, достаточно найти это объединение и пересчитать элементы. Но можно определять число элементов в объединении конечных множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов.

Условимся предложение «Множество A содержит a элементов» записывать в таком виде: $n(A)=a$.

Можно доказать, что если в множестве A содержится a элементов, а в множестве B – b элементов и множества A и B не пересекаются, то в объединении множеств A и B содержится $a+b$ элементов, т.е.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b \quad (1)$$

Это правило нахождения числа элементов в объединении двух конечных непересекающихся множеств, его можно обобщить на случай t попарно непересекающихся множеств.

В общем виде правило подсчета элементов в объединении двух конечных множеств может быть представлено в виде формулы:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (2)$$

Нетрудно убедиться в том, что если $B \subset A$, то

$$n(B'_A) = n(A) - n(B),$$

т. е. число элементов дополнения подмножества B до данного конечного множества A равно разности численностей этих множеств.

Полученные формулы для подсчета числа элементов в объединении двух и более множеств можно использовать для решения текстовых задач.

6.2 Число элементов в декартовом произведении конечных множеств

Выясним, как узнать, сколько элементов находится в декартовом произведении множеств A и B , не прибегая к нахождению самого декартова произведения и пересчету его элементов.

Можно доказать, что если в множестве A содержится a элементов, а в множестве B – b элементов, то в декартовом произведении множеств A и B содержится $a \cdot b$ элементов, т.е.

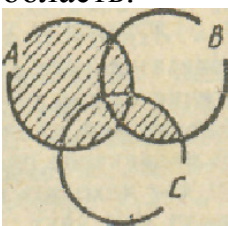
$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = a \cdot b.$$

Правило распространяется на случай t множеств.

Полученные формулы можно использовать при решении задач.

Тестовые задания к разделу 1

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Выбери утверждение, соответствующее записи $10 \in \mathbb{Z}$	1) 10 принадлежит множеству целых чисел 2) 10 принадлежит множеству рациональных чисел 3) 10 принадлежит множеству действительных чисел 4) 10 принадлежит множеству натуральных чисел
2	A является подмножеством B , если...	1) $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4\}$ 2) $A = \{2; 3\}$, $B = \{3; 2; 1\}$ 3) $A = \{3; 4\}$, $B = \{1; 2\}$ 4) $A = \{1; 3\}$, $B = \{2; 4\}$
3	Пустое множество является подмножеством	1) только самого себя 2) конечного множества 3) бесконечного множества 4) любого множества
4	Если множество $A = \{3; 4; 10\}$, $B = \{2; 6; 7; 9\}$, то $A \cap B = \dots$	1) $\emptyset$ 2) $\{2; 3; 4; 6; 7; 9; 10\}$, 3) $\{2\}$, 4) $\{3; 4; 6; 7; 9; 10\}$.
5	Множество $A = \{3, 4\}$ содержит ... подмножеств	1) 2 2) 4 3) 6 4) 8
6	Если на множестве X задано	1) 2 класса

	три свойства, то это множество разбивается на:	2) 4 класса 3) 1 класс 4) 8 классов
7	Декартово произведение множеств нельзя изображать:	1) при помощи графа 2) с помощью таблицы 3) на координатной оси 4) на координатной плоскости
8	Если множество $A=\{1;2;7;8\}$, $B=\{0;1;7;10\}$, то $A \setminus B = \dots$	1) $\{1\}$ 2) $\{0;2;8;10\}$ 3) $\emptyset$ 4) $\{2;8\}$
9	Назовите подмножество множества натуральных чисел:	1) $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ 2) $\{-3, -2, -1, 0\}$ 3) $\{1, 2, 3, 4\}$ 4) $\{-1, 0, 1, 2\}$
10	Декартово произведение множеств $A = \{m, p\}$ и $B = \{e, f, k\}$ есть множество	1) $A \times B = \{(m, e), (m, f), (m, k), (p, e), (p, f), (p, k)\}$ 2) $A \times B = \{(m, p), (m, f), (m, k), (p, e), (p, f), (p, k)\}$ 3) $A \times B = \{(e, m), (f, m), (k, m), (e, p), (f, p), (k, p)\}$ 4) $A \times B = \emptyset$
11	Если множество $A=\{1;2;7;8\}$, $B=\{1;7;10\}$, то $A \cup B = \dots$	1) $\{1\}$ 2) $\{2; 8; 10\}$ 3) $\emptyset$ 4) $\{1; 2; 7; 8; 10\}$
12	Множества A и B называются равными, если:	1) они состоят из одних и тех же элементов 2) $A \not\subset B, B \subset A$ 3) $A \subset B, B \not\subset A$ 4) $A \not\subset B, B \not\subset A$
13	Среди перечисленных свойств выделите дистрибутивное свойство объединения относительно пересечения множеств	1) $A \cup B = B \cup A$ 2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
14	На рисунке A и B находятся в отношении: 	1) включения множеств 2) объединения множеств 3) равенства множеств 4) пересечения множеств
15	На рисунке штриховкой обозначена следующая область: 	1) $A \setminus B \cup C$; 2) $A \setminus B \cap C$; 3) $A \cap B \cup C$; 4) $A \cup B \cap C$.

РАЗДЕЛ 2 СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ

ТЕМА 7 «СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ»

Цель: сформировать у студентов понятие соответствия; выработать умение задавать соответствия между элементами двух множеств, различных способов задания соответствий, строить графы и графики различных соответствий.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 7

1. Что называется соответствием? Обозначение.
2. Какие виды соответствий вы знаете?
3. Какие способы задания соответствий вам знакомы?
4. Что представляет собой граф и график соответствия?
5. Какое соответствие называется взаимно однозначным?
6. Что значит соответствие обратное данному?
7. Что называется отображением?
8. Какие множества называются равномошными?
9. Есть ли разница между равными и равномошными множествами?
10. Каковы особенности графов и графиков взаимно обратных соответствий?
11. Какое множество называется счетным?

Задания для работы в аудитории по теме 7

Задача № 1. Вычислив длины заданных отрезков, учащийся записал: $AB = 7$ см, $CD = 12$ см, $KL = 15$ см, $XU = 12$ см. Соответствия между какими множествами он установил? Задайте его при помощи графа.

Задача № 2. Даны множества: $X = \{2,5\}$, $Y = \{3,6\}$. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какое из подмножеств задает соответствие:

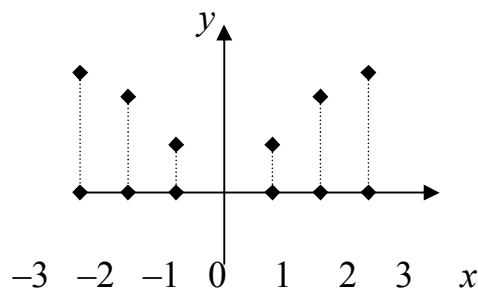
- | | |
|--------------------|------------------------|
| а) «большее»; | б) «меньшее»; |
| в) «меньшее на 1»; | г) «меньшее в 3 раза»? |

Задача № 3. Соответствие «число x в два раза больше числа y » рассматривается между множествами X и Y . Каким будет его график, если:

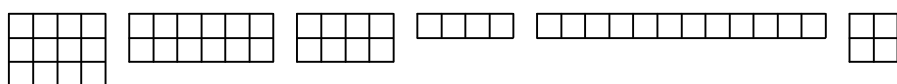
- | | |
|--|--------------------------------------|
| а) $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \mathbf{N}$; | б) $X = [2, 8]$, $Y = \mathbf{R}$, |
| в) $X = Y = \mathbf{R}$. | |

Задача № 4. Множества $X = \{1,3,4,6\}$, $Y = \{0,1\}$ находятся в соответствии $S = \{(1;1); (3;0); (4;1); (6;1)\}$. Задайте соответствие S^{-1} , обратное соответствию S , и постройте на одном чертеже их графики.

Задача № 5. Постройте график соответствия, обратного данному.



Задача № 6. X – множество прямоугольников на рисунке, $Y = \mathbb{N}$. Между элементами этих множеств установлено соответствие P : «прямоугольник x имеет площадь, равную y ». Постройте граф соответствия P . Является ли оно взаимно однозначным?



F_1

F_2

F_4

F_3

F_5

F_6

Задача № 7. Даны множества $A = \{1; 2; 5\}$, $B = \{3, 7\}$. Найдите $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что найденные множества равномощны?

Задача № 8. Покажите, что множество A счетно, если $A = \{9, 10, 11, 12, \dots\}$.

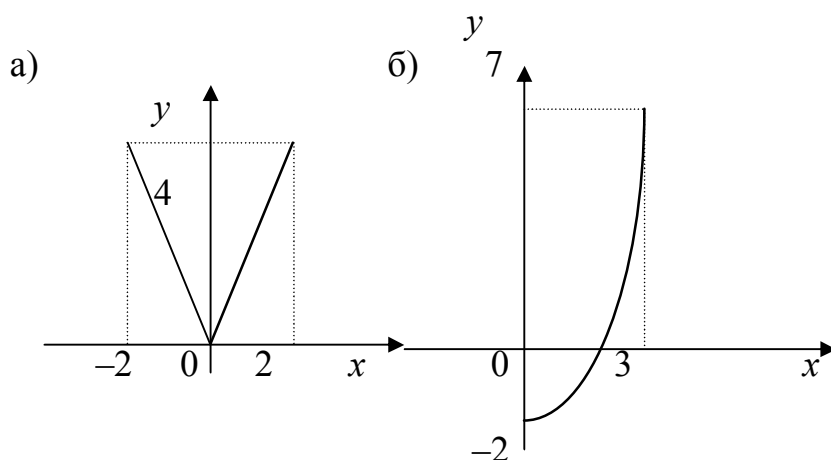
Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 7

1. Между множествами $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Y = \mathbb{Z}$ задано соответствие « $x - y = 3$ », причем $x \in X$, $y \in Y$. Какая фигура является графиком этого соответствия?

2. Даны множества: $M = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, 0, -4, 4\}$ и $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Соответствие R между элементами этих множеств – «квадрат числа m равен числу n », причем $m \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Запишите множество пар, находящихся в заданном соответствии. Верно ли, что:

а) $(-3, 9) \in R$; б) $(0, 0) \in R$; в) $(-4, 16) \in R$?

3. Постройте графики соответствий, обратных данным



4. Покажите, что множество A счетно, если

а) $A = \{a: a = 3n, n \in \mathbb{N}\}$; б) $A = \{a: a = n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

5. Даны множества $X = \{k, l, m, n, p\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Установите три различных взаимно однозначных соответствия между данными множествами. Сколько всего таких соответствий можно установить между множествами X и Y ?

6. Докажите, что множества, о которых идет речь в следующих задачах, равномощны: 1) Запиши все двузначные числа, которые меньше, чем 20. Увеличь каждое из них в 5 раз. 2) Запиши все четные однозначные числа и увеличь каждое из них в три раза. Какие получились числа: четные или нечетные?

7. Соответствие $R = \{(-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,0), (1,0), (2,0), (2,1), (2,2)\}$ задано между множествами $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ и $\{-2, 0, 1, 2\}$. Постройте граф данного соответствия. Постройте в прямоугольной системе координат графики соответствия R и R^{-1} , обратного данному.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 7

7.1 Понятие соответствия между двумя множествами

Изучая окружающий нас мир, математика рассматривает не только его объекты, но и главным образом связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями.

Можно говорить, например, о соответствии между множеством магазинов и множеством покупателей (каждому магазину соответствует покупатель, который его посетил).

В начальном курсе математики изучаются различные взаимосвязи между элементами одного, двух и более множеств. Поэтому учителю надо понимать их суть, что поможет ему обеспечить единство в методике изучения этих взаимосвязей.

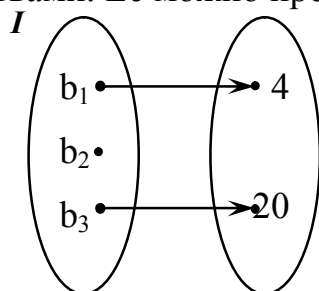
Пример соответствия, изучаемого в начальном курсе математики: найти значение выражения

$b_1) (17-1):4,$

$b_2) (12+18):(6-6),$

$b_3) 2 \cdot 7 + 6.$

В данном примере устанавливается соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями. Имеем два множества: множество из трех числовых выражений и множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Выполняя это задание, мы устанавливаем связь (соответствие) между этими множествами. Ее можно представить наглядно, при помощи графа.



Можно задать это соответствие, перечислив все пары элементов, находившихся в нем: $\{(b_1, 4), (b_3, 20)\}$.

Таким образом, любое соответствие между двумя множествами X и Y можно рассматривать как множество упорядоченных пар, образованных из их элементов.

Соответствием между множествами X и Y называется всякое подмножество декартового произведения этих множеств.

Соответствие обозначают буквами: P, S, T, R и др. Если S – соответствие между элементами множеств X и Y , то по определению $S \subset X \times Y$.

7.2 Способы задания соответствий

Поскольку соответствие – это подмножество, то его можно задавать как любое множество, т. е. либо *перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии (способ перечисления пар)*, либо *указав характеристическое свойство элементов этого подмножества (словесный способ)*. Например, соответствие между множествами $X = \{1, 2, 4, 6\}$ и $Y = \{3, 5\}$ можно задать:

1) при помощи предложения с двумя переменными: $a < b$ при условии, что $a \in X; b \in Y$;

2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартового произведения $X \times Y$: $\{(1, 3); (1, 5); (2, 3); (2, 5); (4, 5)\}$. К этому способу задания относят соответствие при помощи графа и графика (графический).

Если множества конечны, то соответствия между ними можно задать с помощью таблицы (табличный способ). Например:

Ф. И. О.	1	2	3	4	5	6
Иванов А. И.						
Петров И. С.						
Сидоров К. А.						
Никитин О. И.						
Козлов П. В.						
Панова Л. Н.						

Соответствие можно задать формулой, выражающей зависимость между элементами множеств X и Y (аналитический способ).

7.3 Соответствие, обратное данному

Пусть, например, S – это соответствие «больше на 2» между множествами $X = \{4, 5, 8, 10\}$ и $Y = \{2, 3, 6\}$. Тогда $S = \{(4, 2), (5, 3), (8, 6)\}$.

Соответствие, обратное данному – это соответствие «меньше на 2». Оно рассматривается между множествами Y и X , и чтобы его представить наглядно, достаточно на графе соответствия S направление стрелок поменять

на противоположное. Обозначают соответствие, обратное данному S^{-1} . Тогда $S^{-1} = \{(2,4), (3,5), (6,8)\}$.

Задание! Построить графы соответствий S и S^{-1} , указанных в примере.

Предложение «элемент x находится в соответствии S с элементом y » записывается кратко: xSy .

Пусть S – соответствие между множествами X и Y . Соответствие S^{-1} между множествами Y и X называется обратным данному, если $yS^{-1}x$, тогда и только тогда, когда xSy .

Соответствия S и S^{-1} называют взаимно обратными.

Графики взаимно обратных соответствий S и S^{-1} симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Задание! Убедиться в этом с помощью построения соответствий, указанных в вышеизложенном примере.

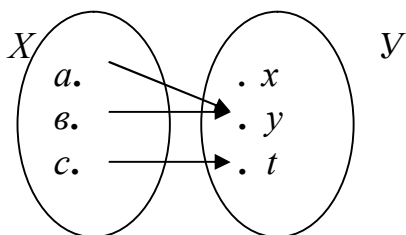
7.4 Отображения. Взаимно-однозначное соответствие

В математике выделяют различные виды соответствий. Это неслучайно, поскольку взаимосвязи, существующие в окружающем нас мире, многообразны.

Важный частный случай понятия соответствия – отображения множеств. При соответствии между множествами X и Y образ элемента $a \in X$ может оказаться пустым, а может содержать и несколько элементов.

Отображением множества X в множество Y называется такое соответствие между этими множествами, что образ любого элемента $a \in X$ состоит из одного и только одного элемента множества Y .

Таким образом, график отображения множества X в множество Y не может содержать двух различных пар (a, y_1) и (a, y_2) с одной и той же первой компонентой. При этом для любого $a \in X$ в нем найдется пара вида (a, b) , где $b \in Y$. На графе отображения X в Y из каждой точки множества X будет выходить одна и только одна стрелка.

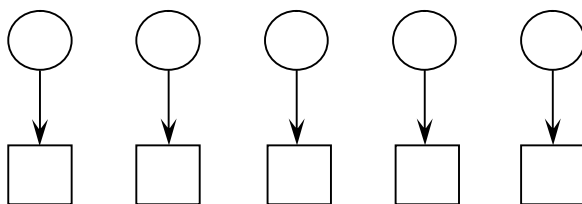


Пример: X – множество студентов в аудитории, Y – множество столов в той же аудитории, причем каждый студент сидит за одним из столов. Соответствие «Студент x сидит за столом y » задает отображение X в Y . образом студента x при этом отображении является стол, за которым он сидит.

Взаимно-однозначным соответствием между множествами X и Y называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества X сопоставляется единственный элемент множества Y и

каждый элемент множества Y соответствует только одному элементу множества X .

Пример: X – множество кружков, Y – множество квадратов и соответствие между ними задано при помощи стрелок.



Это соответствие взаимно-однозначное, так как каждому кружку из множества X сопоставляется единственный квадрат из множества Y и каждый квадрат из Y соответствует только одному кружку из множества X .

Множества X и Y называются равномоощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обозначают $X \sim Y$.

Равномоощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномоощные конечные множества называют еще равночисленными. В начальном курсе обучения математике равночисленность выражается словами «столько же».

Понятие равночисленности множеств лежит в основе определения отношений «больше на ...», «меньше на ...».

Если бесконечное множество равномоощно множеству N натуральных чисел, то его называют счетным.

ТЕМА 8 «ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ И ИХ СВОЙСТВА»

Цель: сформировать у студентов понятия бинарного отношения на множестве, отношения эквивалентности и порядка; выработать умение задавать отношения различными способами, определять свойства отношений на множестве, строить графы и графики отношений, четко различать отношение эквивалентности и отношение порядка.

Контрольные и проблемные вопросы по теме

1. Что называется бинарным отношением на множестве? Обозначения.
2. В чем состоит разница отношения и соответствий?
3. Какие способы задания отношений вы знаете?
4. Какие виды отношений вам известны?
5. Как построить граф отношения?
6. Какие свойства отношений вам известны? Дайте им определение
7. Какое отношение называется отношением эквивалентности?

8. Какова связь отношения эквивалентности с разбиением множества на классы?
9. Какое отношение называется отношением порядка?
10. Какое множество называется упорядоченным?
11. Какое отношение называется отношением линейного порядка?
12. Какое отношение называется отношением нестрогого порядка?

Задания для работы в аудитории по теме 8

Задача № 1. На множестве $X = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ задано отношение R . Перечислите пары чисел, связанных этим отношением, и постройте его граф, если:

- а) R – « x больше y в 3 раза»;
- б) R – « x больше y на 3».

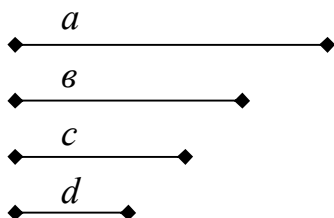
Задача № 2. Запишите в виде равенства предложение:

- а) число x меньше y на 2;
- б) число x меньше y в 2 раза.

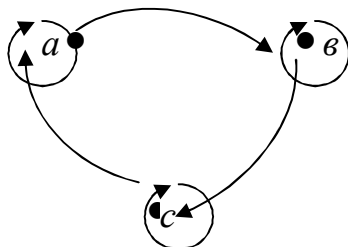
Задача № 3. Задает ли на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ какое-либо отношение следующее множество упорядоченных пар: $\{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$?

Задача № 4. Отношение « $x \geq y$ » рассматривается на множестве X . Каким будет его график на координатной плоскости, если $X = \{2, 4, 6, 8\}$?

Задача № 5. На множестве отрезков рисунка задано отношение R : «отрезок x длиннее отрезка y ». Постройте граф этого отношения и задайте различными способами отношение, обратное данному.



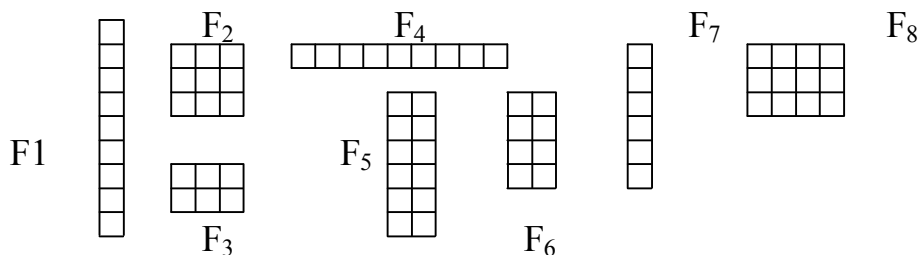
Задача № 6. Докажите, что отношение R , заданное при помощи графа, рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.



Задача № 7. На множестве отрезков задано отношение «короче». Верно ли, что оно антисимметрично и транзитивно? Рефлексивно ли оно?

Задача № 8. Какими свойствами обладает отношение «меньше», заданное на множестве натуральных чисел?

Задача № 9. На множестве X прямоугольников задано отношение «иметь равные площади». Постройте граф отношения и докажите, что оно является отношением эквивалентности. Какие классы эквивалентности порождает это отношение на множестве X ?



Задача № 10. На множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 4». Является ли оно отношением эквивалентности?

Задача № 11. Можно ли разбить множество $X = \{7-3, 2^2, 5 \times 2, 60:6, 1+3, 0:4, 0 \times 10, 4:(10-10)\}$ на классы при помощи отношения «иметь равные значения»?

Задача № 12. На множестве целых чисел от 0 до 999 задано отношение K – «иметь в записи одно и то же число цифр». Покажите, что K – отношение эквивалентности. На сколько классов эквивалентности разбивается данное множество при помощи отношения K ? Назовите наименьший и наибольший элементы каждого класса.

Задача № 13. X – множество отрезков. Какие из следующих отношений являются отношениями порядка на этом множестве:

- а) « x равно y »; б) « x длиннее y »; в) « x длиннее y в 3 раза».

Задача № 14. Упорядочивает ли множество натуральных чисел отношения:

- а) «больше в 2 раза»; б) «больше на 2»;
в) «непосредственно следовать за»; г) « x – делитель y ».

Задача № 15. Решите задачу для младших школьников и укажите свойства отношений, которые были при этом использованы:

«Мальчик составил пирамидку из трех колечек: желтого, красного и зеленого. В каком порядке он расположил колечки, если желтое больше зеленого, а красное меньше зеленого?»

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 8

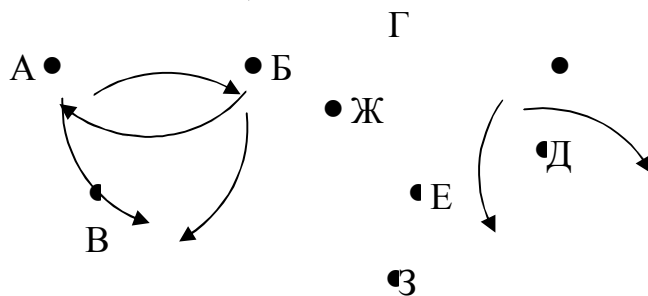
1. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ рассматриваются отношения « $x=y$ », « x делится на y » и « x больше y на 2». Какое из приведенных подмножеств множества $X \times X$ задает данные отношения:

- а) $\{(4,2), (6,2), (8,2), (6,4), (8,4), (8,6), (2,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$;
б) $\{(4,2), (6,4), (8,6)\}$;
в) $\{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$.

2. Отношение « $x \geq y$ » рассматривается на множестве X . Каким будет его график на координатной плоскости, если:

- а) X – множество натуральных чисел;
- б) X – множество действительных чисел.

3. На рисунке дан граф отношения «быть братом» на множестве детей, живущих в одном доме (дети обозначены точками А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З). Кто из них является девочкой, а кто мальчиком?



4. На множестве $X = \{2, 4, 6, 8, 12\}$ заданы отношения «больше» и «кратно». В чем их сходство и различие?

5. На множестве $X = \{a, b, c\}$ задано отношение $R = \{(a, b), (a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (b, c), (c, b)\}$. Какими свойствами оно обладает?

6. На множестве $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ заданы отношения «больше» и «больше или равно». Постройте графы и сформулируйте свойства данных отношений. Какое из них обладает свойством рефлексивности? Почему?

7. Постройте граф отношения «легче, чем», между элементами множества $A = \{\text{кролик, заяц, собака, поросенок}\}$, если известно, что заяц тяжелее собаки, кролик легче поросенка, а собака тяжелее поросенка. Кто из животных самый легкий и кто самый тяжелый?

8. Решите задачу, используя граф бинарного отношения. «Дано пять чисел. Известно, что первое больше пятого, второе меньше третьего, пятое больше третьего, а четвертое меньше пятого. Какое из чисел больше: первое или четвертое? Пятое или второе? Можно ли утверждать, что второе число меньше четвертого?»

9. Объясните, почему отношение равенства отрезков является отношением эквивалентности, а отношение «короче» не является?

10. X – множество прямых плоскости. Какое из следующих отношений является отношением эквивалентности на этом множестве:

- а) « x параллельна y »; б) « x перпендикулярна y »; в) « x пересекает y ».

11. Сколько классов эквивалентности порождает на множестве натуральных чисел отношение «оканчиваться одной и той же цифрой»? Назовите по одному представителю каждого класса.

12. Отношение T – «иметь одно и тоже число делителей» – задано на множестве $X = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. Является ли T отношением эквивалентности? Отношением порядка?

13. Решите задачу для младших школьников и укажите свойства отношений, которые были при этом использованы:

«Четверо учащихся получили разные оценки за контрольную работу. Игорь получил оценку выше, чем Петр, Петр ниже, чем Максим, но выше, чем Кирилл. Кто получил самую низкую оценку?»

14. На множестве A натуральных чисел от 1 до 100 рассматривают отношение R – « a имеет ту же четность, что и b ». Является ли это отношение эквивалентностью? На какие классы эквивалентности распадается множество A по данному отношению?

15. Множество A состоит из капитана Иванова, старших лейтенантов Остапчука и Григорьева, лейтенантов Осипенко, Васильева и Шатилова, прапорщиков Семенова, Лебедева и Кравчука. Изобразите при помощи графа отношение R – « a старше по званию, чем b » в этом множестве. Является ли R каким-либо отношением порядка?

16. Какие из следующих отношений между людьми являются отношениями эквивалентности, а какие отношениями порядка:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| а) « a сестра b »; | б) « a начальник b »; |
| в) « a друг b »; | г) « a имеет тот же цвет глаз, что и b »; |
| д) « a на 4 см выше, чем b »; | е) « a родился в том же году, что и b »? |

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 8

8.1 Понятие отношения на множестве

В математике изучают не только связи между элементами двух множеств, т.е. соответствия, но и связи между элементами одного множества. Называют их отношениями.

Отношения многообразны. Между понятиями – это отношения рода и вида, части и целого, между предложениями – отношения следования и равносильности, между числами – «больше», «меньше», «равно» и т. д.

Если рассматриваются отношения между двумя элементами, то их называют *бинарными*. Примеры бинарных отношений встречаются не только в математике, но и всюду в жизни, вокруг нас: родственные и другие отношения между людьми (быть отцом, сестрой и т. д.), отношения между событиями во времени (раньше, позже, одновременно), между предметами по их расположению в пространстве (выше, ниже, левее и др.)

Пусть на множестве $X = \{2, 4, 6, 8\}$ задано отношение «меньше». Это означает, что для любых двух чисел из множества X можно сказать, какое из них меньше: $2 < 4$, $2 < 6$, $2 < 8$, $4 < 6$, $4 < 8$, $6 < 8$. Полученные неравенства можно записать в виде упорядоченных пар: $(2; 4)$, $(2; 6)$, $(2; 8)$, $(4; 6)$, $(4; 8)$, $(6; 8)$. Но все эти пары есть элементы декартова произведения $X \times X$.

Бинарным отношением на множестве X называют всякое подмножество декартова произведения $X \times X$.

Обозначаются отношения так же как и соответствия буквами : S, P, T, R и др. Если R – отношение на множестве X, то по определению, $R \subset X \times X$.

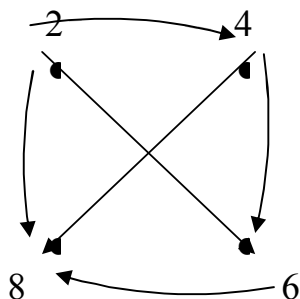
Элементы x и y находятся в отношении R кратко записывают xRy (читается: «элемент x находится в отношении R с элементом y »).

8.2 Способы задания отношений

Отношения задаются также как и соответствия. Отличия касаются задания отношений при помощи графа.

Построим, например, граф отношения «меньше», заданного на множестве

$X = \{2, 4, 6, 8\}$. Для этого элементы множества X изобразим точками (вершины графа), а отношение «меньше» – стрелками (ребра графа).



Отношение можно задать при помощи предложения с двумя переменными. Например, «число x меньше числа y » или в символической записи (если это возможно) « $x < y$ ».

Для отношения R, заданного на множестве X, всегда можно задать отношение R^{-1} , ему обратное. Оно определяется также, как соответствие, обратное данному.

Понятием отношения, обратного данному, часто пользуются при начальном обучении математике.

8.3. Свойства отношений

Отношения обладают свойствами.

Отношение R на множестве X называется рефлексивным, если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.

Если отношение R рефлексивно на множестве X, то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля. Справедливо и обратное утверждение. Например: отношение «равенства» на множестве натуральных чисел.

Отношение R на множестве X называется симметричным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y , следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x .

Пример симметричного отношения: отношение перпендикулярности на множестве отрезков.

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y , граф содержит и стрелку, идущую от y к x . Справедливо и обратное утверждение.

Отношение R на множестве X называется антисимметричным, если для различных элементов x и y из множества X выполнено условие: из того, что x находится в отношении R с элементом y , следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.

Например: отношение «длиннее» на множестве отрезков.

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка одна. Справедливо и обратное утверждение.

Отношение R на множестве X называется транзитивным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z , следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z .

Пример транзитивного отношения: отношение «длиннее» на множестве отрезков.

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z , содержит стрелку, идущую от x к z . Справедливо и обратное утверждение.

Отношение R на множестве X называется связанным, если для любых элементов x и y из множества X , выполняется условие: из того, что x и y различны, следует, что либо x находится в отношении R с элементом y , либо элемент y находится в отношении R с элементом x .

Например, свойством связности обладает отношение «больше» на множестве натуральных чисел.

На графе связанного отношения любые две вершины соединены стрелкой.

8.4 Отношение эквивалентности и порядка

Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношения равенства на множестве дробей, равенства геометрических фигур и т. д.

Вообще, если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).

Верно и обратное утверждение: если какое-либо отношение, заданное на множестве X , порождает разбиение этого множества на классы, то оно является отношением эквивалентности.

Если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам.

Отношение R на множестве X называется отношением порядка (или отношением строгого порядка), если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.

Примерами отношений порядка могут служить: отношение «короче» на множестве отрезков, отношение «выше» на множестве людей, сравниваемых по росту.

Множество X называется упорядоченным, если на нем задано отношение порядка.

Так, множество N натуральных чисел можно упорядочить, если задать на нем отношение «меньше».

Тестовые задания к разделу 2

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Каким свойством обладает отношение «точка X симметрична точке Y относительно прямой L »	1) рефлексивности 2) антирефлексивности 3) транзитивности 4) симметричности
2	Каким свойством обладает отношение «отрезок X длиннее отрезка Y »	1) транзитивности 2) симметричности 3) рефлексивности 4) антисимметричности
3	Каким свойством обладает отношение «число X следует за Y »	1) рефлексивности 2) симметричности 3) антисимметричности 4) транзитивности
4	Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно одновременно обладает свойствами:	1) связности, транзитивности и антисимметричности; 2) рефлексивности, симметричности и транзитивности; 3) антисимметричности, транзитивности и рефлексивности; 4) симметричности, транзитивности и связности.

5	Если S – соответствие между элементами множеств X и Y , то по определению:	1) $S \subset X \cap Y$, 2) $S \subset X \times Y$, 3) $S \subset X \cup Y$, 4) $S \subset X \setminus Y$.
6	Если S – соответствие « x больше y на 3», тогда S^{-1} – это соответствие:	1) « y меньше x на 3», 2) « x не меньше y на 3», 3) « x меньше y на 3», 4) « y не меньше x на 3».
7	Отношениями называют связи между:	1) элементами двух множеств; 2) элементами одного множества; 3) элементами трех множеств; 4) множествами.
8	R рефлексивно на X тогда и только тогда, когда:	1) xRx для любого $x \in X$, 2) $xRy \rightarrow yRx$, 3) xRy и $x \neq y \rightarrow yRx$, 4) xRy и $yRz \rightarrow xRz$.
9	Граф симметричного на множестве X отношения обладает особенностью:	1) в каждой вершине графа имеется петля, 2) вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y , граф содержит и стрелку, идущую от y к x , 3) если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна, 4) с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z , граф содержит стрелку, идущую от x к z .
10	Если отношение, заданное на множестве X , порождает разбиение этого множества на классы, то оно является:	1) отношением порядка, 2) отношением эквивалентности, 3) отношением линейного порядка, 4) рефлексивным.

РАЗДЕЛ 3 ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

ТЕМА 9 «ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ»

Цель: сформировать у студентов понятия числовой функции, графика функции, рассмотреть свойства, способы задания и виды функций; выработать умения выявлять функциональные зависимости, строить графики заданных функций, использовать свойства прямой и обратной пропорциональности и линейной функции при решении задач из начального курса математики.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 9

1. Что называется функцией? Обозначение.
2. Что значит область определения функции? Множество значений?
3. Что называется графиком функции?
4. Какие способы задания функции Вам известны?
5. Какая функция является монотонной, возрастающей, убывающей на некотором промежутке?
6. Какая функция называется прямой пропорциональностью?
7. Что является графиком прямой пропорциональности?
8. Каковы свойства прямой пропорциональности?
9. Какая функция называется обратной пропорциональностью?
10. Что является графиком обратной пропорциональности?
11. Каковы свойства обратной пропорциональности?
12. Приведите пример заданий из начального курса математики с использованием прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин.
13. Какая функция называется линейной?
14. Что является графиком линейной функции?
15. Каковы свойства линейной функции?
15. От чего зависит расположение графика линейной функции?

Задания для работы в аудитории по теме 9

Задача № 1. Какие из следующих функций задают на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел функцию:

а) $y = 4x$; б) $y = \frac{4}{x}$; в) $x^2 + y^2 = 4$.

Задача № 2. Постройте график функции $y = 5 - x$, если ее область определения такова:

а) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, б) $X = [0, 5]$, в) $X = \mathbf{R}$.

Задача № 3. Функция f задана при помощи таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

- а) укажите ее область определения и область значений,
 б) задайте функцию f при помощи формулы,
 в) постройте график этой функции на координатной плоскости,
 г) докажите, что функция f возрастает на всей области определения.

Задача № 4. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 5x^2 - 4$; б) $y = \frac{3}{x+5}$; в) $y = \sqrt{1-x}$, г) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$.

Задача № 5. Докажите, что соответствие между значениями переменных x и y , рассматриваемое в задаче, является функцией. Укажите область ее значений при условии, что $x < 5$; постройте график данной функции.

«Катя купила 3 тетради, а Лена на x тетрадей больше. Сколько тетрадей (y) купила Лена и Катя вместе?»

Задача № 6. Известно, что функция f является прямой пропорциональностью, задана на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и при x , равном 3, значение функции равно 12.

- а) задайте функцию f при помощи формулы и таблицы, постройте ее график;
 б) какие свойства функции f можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

Задача № 7. Укажите среди следующих функций, заданных табличным способом,

- а) прямые пропорциональности:

x	2	4	6	8	10
y	14	28	42	56	70

x	1	2	3	4	5
y	-3	$-\frac{2}{3}$	-9	$-\frac{4}{3}$	-15

x	2	4	6	8	10
y	4	16	36	64	100

x	1	2	3	4	5
y	0,2	0,4	0,6	0,8	1

- б) обратные пропорциональности:

x	1	2	4	10	40
-----	---	---	---	----	----

x	-2	-4	-3	6	12
y	6	3	4	-2	-1

x	2	3	6	8	12
y	12	8	4	3	1

x	1	3	4	6	8
y	-1	-5	-7	-11	-15

y	20	10	5	2	$\frac{1}{2}$
-----	----	----	---	---	---------------

Задача № 8. Построить график функции $y = \frac{12}{x}$ при условии, что ее область определения:

1. Множество действительных чисел;
2. $[1; 6]$;
3. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Задание 9. Постройте график функции $y = 2x - 3$ при условии, что ее областью определения является:

- 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-3; 2]$; 3) $\{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Задание 10. Известно, что график функции $y = 2x + b$ проходит через точку $(1; 4)$. Пройдет ли он через точку $(3; 8)$?

Задание 11. Найдите коэффициенты k и b , если функция задана формулой:

- 1) $x - 2x = -3$; 2) $2x - 3y = 10$; 3) $x - 3y = 0$.

Задание 12. Зависимость массы (y) ящика с деталями от числа деталей (x) выражается формулой $y = 0,3x + 1,5$. Вычислите массу ящика с деталями, при следующих значениях:

x	10	15	20	23
y				

Каким будет график данной зависимости?

Задача 13. До привала туристы прошли 12 км. После привала они шли x часов со скоростью 2,5 км/ч. Составьте формулу, выражающую зависимость между временем движения x и всем пройденным расстоянием y . Какую функцию задает эта формула? Какова область определения функции, если весь пройденный путь не превышает 25 км?

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 9

1. Постройте графики следующих функций при условии, что они заданы на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел:

- а) $y = x$; б) $y = 3$; в) $x = 5$; г) $y = 0$.

2. Докажите, что соответствие между значениями переменных x и y , рассматриваемое в задаче, является функцией. Укажите область ее значений при условии, что $x < 5$; постройте график данной функции.

«Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли 2 туриста. При встрече оказалось, что один прошел 3 км, а второй – на x км больше. Каково расстояние (y км) между пунктами А и В?»

3. Найдите область определения функций:

- а) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; б) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

4. Постройте графики функций $y = -2x$ и $y = 10x$ и покажите, что первая из них – убывающая на множестве $\mathbb{R}$, а вторая – возрастающая на том же множестве.

5. Выясните, какая зависимость существует между величинами в данной задаче и решите ее:

«Вместимость одной банки 3 литра. Сколько потребуется банок, чтобы разлить 6 литров фруктового сока? 9 литров? 12 литров?

6. Известно, что функция f является обратной пропорциональностью. Задана на множестве $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ и при $x=5$, значения функции равно 6.

а) задайте функцию f при помощи формулы и таблицы. Постройте ее график;

б) какие свойства функции можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

7. Зависимость стоимости (y) телеграммы от числа слов (x) в ней выражается формулой $y=5x+20$. Вычислите стоимость телеграммы при следующих значениях x :

x	10	16	25	30
y				

Какова область определения данной зависимости, если стоимость телеграммы не превышает 120 рублей?

8. Из населенного пункта в город, находящийся на расстоянии 20 км со скоростью 5 км/ч отправился пешеход. На каком расстоянии (S км) от города будет пешеход через t часов? Какие значения может применять t ?

9. Дана функция $y = -0,4x-2$, $x \in R$. Постройте ее график и укажите те значения x , при которых $y>0$, $y<0$, $y<-4$.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 9

9.1 Понятие функции

Функция – одно из важнейших понятий математики.

В начальном курсе математики понятие функции и все, что с ним связано, в явном виде не изучается, но идея функциональной зависимости пронизывает его.

Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R .

Множество X называют *областью определения функции*.

Функции принято обозначать буквами f , g , h и др. Если f – функция, заданная на множестве X , то действительное число y , соответствующее числу x из множества X , часто обозначают $f(x)$ и пишут $y = f(x)$. Переменную x при этом называют *аргументом* (или *независимой переменной*) функции f . Множество чисел вида $f(x)$ для всех x из множества X называют *областью значений функции* f .

Пусть $y = f(x)$ – функция с областью определения X . Тогда ее **графиком** является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу x и ординату $f(x)$ для всех x из множества X .

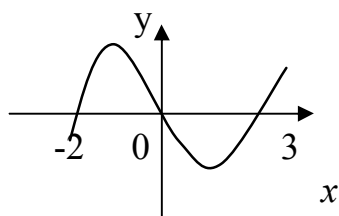
9.2 Способы задания функции

1. С помощью формулы.

Формула указывает, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Например, формула $y = 2x - 3$, где x – действительное число, задают функции.

С помощью одной и той же формулы можно задать сколь угодно много функций, которые будут отличаться друг от друга областью определения. Часто при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается. В таких случаях считают, что область определения функции является область определения выражения $f(x)$.

2. С помощью графика



Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции.

3. С помощью таблицы.

x	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3

9.3 Свойства числовых функций

Функция f называется *монотонной* на некотором промежутке A , если она на этом промежутке *возрастает* или *убывает*.

Функция f называется *возрастающей* на некотором промежутке A , если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

График возрастающей на промежутке A функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика увеличиваются.

Функция f называется *убывающей* на некотором промежутке A , если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

На графике убывающей на промежутке A функции при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика уменьшаются.

9.4 Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы $y=kx$, где k – не равное нулю действительное число.

Число k называется коэффициентом пропорциональности.

Функция $y=kx$ является математической моделью многих реальных ситуаций, рассматриваемых в начальном курсе математики.

Некоторые свойства прямой пропорциональности:

- 1) Область определения функции $y=kx$ и область её значений – множество действительных чисел.
- 2) Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.
- 3) При $k > 0$ функция $y=kx$ возрастает на всей области определения, при $k < 0$ – убывает на всей области определения.
- 4) Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Это свойство характерно только для прямой пропорциональности и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются прямо пропорциональные величины.

Задание! Решите задачу разными способами

«За 8 ч токарь изготовил 16 деталей. Сколько часов потребуется токарю на изготовление 48 деталей, если он будет работать с той же производительностью?»

9.5 Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы $y = \frac{k}{x}$, где k – не равное нулю действительное число.

x, y – переменные, k – коэффициент пропорциональности.

Функция $y = \frac{k}{x}$ является математической моделью многих задач, решаемых в начальном курсе математики.

Свойства обратной пропорциональности:

1. Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ и область её значений x является множество действительных чисел, отличных от нуля.
2. Графиком обратной пропорциональности является гипербола.
3. При $k > 0$ ветви гиперболы расположены в 1-й и 3-й четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является убывающей на всей области определения x (рис. 1). При

$k < 0$ ветви гиперболы расположены в 2-й и 4-й четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является возрастающей на всей области определения x (рис. 2).

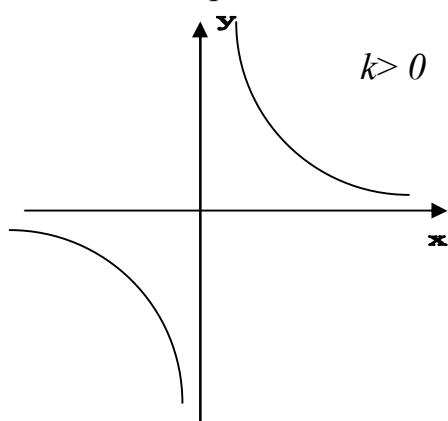


Рисунок 1

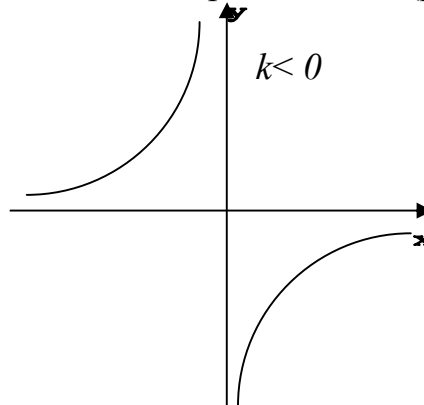


Рисунок 2

4. Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз, соответствующее значение y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Это свойство присуще только обратной пропорциональности и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются обратно пропорциональные величины.

Задание! Решите задачу разными способами «Велосипедист, двигаясь со скоростью 10 км/час, проехал расстояние от А до В за 6 ч. Сколько времени потратит велосипедист на обратный путь, если будет ехать со скоростью 20 км/час».

9.6 Линейная функция

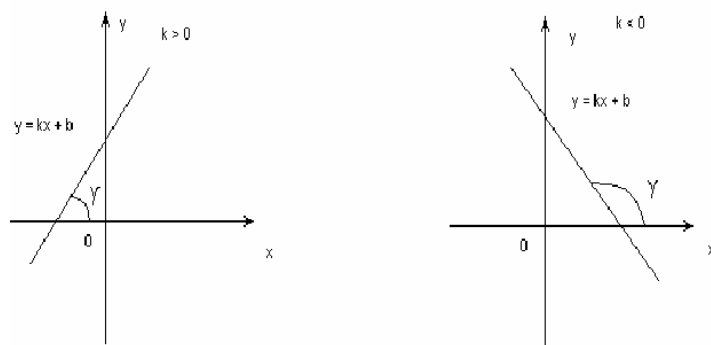
Линейной называется функция, которую можно задать при помощи формулы $y=kx+v$, где x – независимая переменная, а k и v – заданные действительные числа.

Если, в частности $k=0$, то получается функция вида $y=v$ – её называют *постоянной функцией*.

Областью определения линейной функции является множество действительных чисел. Графиком линейной функции является прямая. Положение этой прямой на плоскости определяют коэффициенты k и v .

Если обозначить через γ –угол между осью Ox и графиком линейной функции, и измерять его против часовой стрелки, то можно заметить, что величина угла зависит от коэффициента k .

Если $k > 0$, то угол γ острый, если $k < 0$, то угол γ тупой.



Коэффициент b есть значение длины отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy . При $k > 0$ функция $y = kx + b$ – возрастает, а при $k < 0$ – убывает на всей области определения.

ТЕМА 10 «ВЫРАЖЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА»

Цель: сформировать у студентов понятия числового выражения, выражения с переменными, значения выражения, тождества, числового равенства и неравенства; выработать умение находить область определения выражений, значение выражения, выполнять тождественные преобразования выражений, использовать выражения при решении задач начального курса математики, устанавливать истинность числовых равенств и неравенств.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 10

1. Что входит в алфавит математического языка?
2. Из чего состоят числовые выражения? Приведите примеры.
3. Что значит «выражение не имеет смысла»?
4. Дайте строгое определение числового выражения.
5. Что называется значением числового выражения?
6. Из чего состоят выражения с переменными?
7. Какие выражения называются тождественно равными?
8. Что называется тождеством?
9. Что называется тождественным преобразованием выражения?
10. Какие тождественные преобразования рассматриваются в начальном курсе математики?
11. Что называется числовым равенством? Истинным числовым равенством?
12. Какие свойства истинных числовых равенств Вам известны?
13. Что называется числовым неравенством?
14. Какие бывают числовые неравенства?
15. Назовите свойства истинных числовых неравенств.

Задания для работы в аудитории по теме 10

Задание 1. Среди следующих записей укажите числовые выражения:

- а) $42:5$; г) $2x7=7x2$;
б) 27 ; д) $(17+13):10-15$;
в) $(32+10):14$; е) $142>71x2$.

Задание 2. Какие из следующих выражений имеют смысл, если рассматривать их на множестве натуральных чисел

- а) $(135+67)x12$; б) $(135-217):2$; в) $362:4$.

Задание 3. Установите, какова область определения выражений, если рассматривать их на множестве действительных чисел:

- а) $(3-y):64$; б) $64:(3-y)$; в) $(5+x):(x-12)$.

Задание 4. Вычислите значение выражения

$$((36:2-14)x(42x2-14)+20):2$$

Задание 5. Обоснуйте каждый шаг в преобразованиях:

$$324x5=(300+20+4)x5=300x5+20x5+4x5=1500+100+20=1500+120=1620.$$

Задание 6. Упростите выражение путем тождественных преобразований

$$6(2av-3)+2a(6v-5)$$

Задание 7. Решите задачу, решение запишите в виде выражения:

«На туристическую базу в первый день прибыли 150 туристов, на другой день 170. Чтобы пойти по маршрутам, 200 туристов разбились на группы, по 20 человек в каждой, а остальные по 15 человек в группе. Сколько получилось групп?»

Задание 8. Преобразуйте выражение и найдите его значение при $x=-8$, $y=25$

$$\frac{3x^2 - xy}{9x^2 - y^2}.$$

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 10

1. Вычислите значение выражения:

- а) $(72:12-(18-15)):(24:3-2x4)$,
б) $(16,583:7,21+54,68x853,2+28,82x0,1):1,6-1,02$.

2. Какие из следующих равенств являются тождествами на множестве действительных чисел:

- а) $3p+5m=5m+3p$, в) $3px5m=5mx3p$,
б) $3p-5m=5m-3p$, г) $3p:5m=5m:3p$.

3. Упростите выражение путем тождественных преобразований

$$(12a-16b):4-(10a-4b).$$

4. Решите задачу, решение запишите в виде выражения:

«В мастерской за 5 дней сшили 2 000 фартуков. Сколько фартуков сошьют за 8 дней, если будут шить в день на 50 фартуков больше?»

5. Найдите область определения выражений:

а) $\frac{10}{(x-2)(x+1)}$; б) $\frac{8-2y}{\sqrt{2x-3}}$; в) $\frac{x+5}{x^2-1}$.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 10

10.1 Алфавит математического языка

Изучение данного понятия связано с использованием математического языка; он относится к искусственным языкам, которые создаются и развиваются с той или иной наукой. Как и любой другой, математический язык имеет свой алфавит. В него входят:

- 1) цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; с их помощью по специальным правилам записываются числа,
- 2) знаки операций: +, −, *, : ...;
- 3) знаки отношений: <, >, =, ...;
- 4) строчные буквы латинского алфавита, их применяют для обозначения чисел;
- 5) скобки (круглые, фигурные и др.), их называют техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слов, называя их выражениями, а из слов получаются предложения – числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

10.2 Числовые выражения

В математике встречаются два вида математических выражений – числовые выражения и выражения с переменными. Примерами числовых выражений являются выражения $3+7$; $2,5 + 3,7-1,4$. Они образуются из чисел, знаков действий и скобок. Считают, что каждое число также является числовым выражением.

Число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении, называется *значением числового выражения*.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они не имеют смысла. Например, выражение $8:(4-4)$ смысла не имеет, т.к. его значения найти нельзя, $4-4=0$, а деление на нуль невозможно.

Если f и g – числовые выражения, то $(f)+(g)$, $(f)-(g)$, $(f)(g)$, $(f):(g)$ – числовые выражения. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступени (сложение и вычитание).

В начальных классах учащиеся первоначально знакомятся с записями вида $2+3$, $7-4$, называя их соответственно суммой и разностью. Затем появляются числовые выражения и более сложной структуры, но термины «математическое выражение» и «значение выражения» появляются, когда учащиеся производят вычисления в пределах сотни.

10.3. Выражения с переменными

Выражения вида $2x+1$, $3x^2+x$, $2^x+0,5x$ называют выражениями с переменной x . Они образованы из чисел, знаков действий и букв. Выражение может содержать и несколько переменных.

Если в выражение с переменными подставить вместо переменных конкретные числа, то получим числовое выражение. После выполнения всех действий с числами получится число, которое называют значением выражения с переменными при выбранных значениях переменных.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, т. е. выполнимы все указанные действия, называются *допустимыми значениями* переменных или областью определения выражения.

Значения двух выражений с переменными при одних и тех же значениях переменных называют *соответственными значениями* выражений.

Переменную в математике обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например $\square$. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: $2 \cdot \square + 3$.

В начальной школе работа с буквенными выражениями сводится к подстановке вместо букв их значений и вычислению значения получившегося числового выражения.

10.4 Тожественные преобразования выражений

Два выражения называют тождественно равными, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.

Например, $5(x+2)$ и $5x+10$ – тождественно равные выражения.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называется *тождеством* на этом множестве.

Тождествами считают и верные числовые равенства.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называют *тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве*.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др.

10.5 Числовые равенства и неравенства

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $f=g$, которое называют *числовым равенством*.

Возьмем, например, числовые выражения $3+2$ и $6-1$ и соединим их знаком равенства $3+2=6-1$. Оно истинное. Если же соединить знаком равенства $3+2$ и $7-3$, то получим ложное числовое равенство. Таким образом, с логической точки зрения числовое равенство это высказывание, истинное или ложное.

Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.

Свойства истинных числовых равенств:

1. Если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

2. Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком « $<$ » (или « $>$ »). Получим предложение $f < g$ (или $f > g$), которое называют *числовым неравенством*.

С логической точки зрения числовое неравенство – это высказывание, истинное или ложное.

Свойства числовых неравенств:

1. Если к обеим частям истинного числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство.

2. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство.

3. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и отрицательное значение, а также поменяем знак неравенства на противоположный, то получим также истинное числовое неравенство.

ТЕМА 11 «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Цель: сформировать у студентов понятия уравнения с одной переменной, корня уравнения, решения уравнения, равносильности уравнений, неравенства с одной переменной, решение неравенства, равносильности неравенств; выработать умения; выработать умение решать уравнения и неравенства.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 11

1. Что называется уравнением с одной переменной?

2. Что такое корень уравнения?
3. Сколько корней может иметь уравнение?
4. Что значит решить уравнение?
5. Какие уравнения называются равносильными?
6. Как можно получить равносильные уравнения?
7. Какова особенность решения уравнений в начальном курсе математики?
8. Что называется неравенством с одной переменной?
9. Что является решением неравенства?
10. Что значит решить неравенство?
11. Какие неравенства называются равносильными на множестве?
12. Как можно получить равносильные неравенства?

Задания для работы в аудитории по теме 11

Задание 1. Установите, какие из следующих записей являются уравнениями с одной переменной:

а) $(x - 3) \times 5 = 12x$;

г) $3 + (12 - 7) \times 5 = 16$;

б) $(x - 3) \times 5 = 12$;

д) $(x - 3) \times y = 12x$;

в) $(x - 3) \times 17 + 12$;

е) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Задание 2. Уравнение $2x^4 + 4x^2 - 6 = 0$ задано на множестве натуральных чисел. Объясните, почему число 1 является корнем этого уравнения, а 2 и -1 не являются его корнями.

Задание 3. В уравнении $(x + \dots)(2x + 5) - (x - 3)(2x + 1) = 20$ одно число стерто и заменено точками. Найдите стертое число, если известно, что корнем этого уравнения является число 2.

Задание 4. Установите, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве действительных чисел.

а) $3 + 7x = -4$ и $2(3 + 7x) = -8$,

б) $3 + 7x = -4$ и $6 + 7x = -1$,

в) $3 + 7x = -4$ и $x + 2 = 0$.

Задание 5. Решите уравнение и обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе их упрощения:

$$\frac{7x + 4}{2} - x = \frac{3x - 5}{2}.$$

Задание 6. Решите уравнение:

$$\frac{2}{2 - x} - \frac{1}{2} = \frac{4}{(2 - x)x}; x \in \mathbf{R}.$$

Является ли число 2 корнем этого уравнения?

Задание 7. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

а) $(x + 70) \times 4 = 328$;

б) $560 : (x + 9) = 56$.

Задание 8. Решите задачу, составив уравнение:

«На первой полке на 16 книг больше, чем на второй. Если с каждой полки снять по 3 книги, то на первой полке книг будет в 1,5 раза больше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?»

Задание 9. Установите, какие из следующих записей являются неравенствами с одной переменной:

а) $-12-7x < 3x + 8$,

г) $12x + 3(x - 2)$,

б) $15(x + 2) > 4$,

д) $17 - 12x \geq 8$,

в) $17(13 + 8) < 14 - 9$,

е) $2x^2 + 3x - 4 > 0$.

Задание 10. Является ли число 3 решением неравенства:

$6(2x + 7) < 15(x + 2)$, $x \in \mathbf{R}$? А число 4,25?

Задание 11. Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

а) $-17x < 51$ и $3 > x$,

б) $\frac{3x - 1}{4} > 0$ и $3x - 1 > 0$, в) $6 - 5x > -4$ и $x < 2$.

Задание 12. Решите неравенство:

$3(x - 2) - 4(x + 1) < 2(x - 3) - 2$

Задание 13. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая – 8 см. Какой может быть длина третьей стороны, если периметр треугольника меньше 22 см.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 11

1. Решите уравнения и обоснуйте все преобразования:

а) $x - \frac{3x - 2}{5} = 3 - \frac{2x - 5}{3}$;

б) $(2 - x)x - 2 - x(x + 1,5) = 4$.

2. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

$(85x + 765) : 170 = 98$.

3. Решите задачу, составив уравнение:

«Весь путь от туристической базы до станции, равный 26 км, велосипедист проехал за 1 час 10 минут. Первые 40 минут этого времени он ехал с одной скоростью, а остальное время – со скоростью на 3 км / ч меньше. Найдите скорость велосипедиста на первом участке пути ».

4. Какие из следующих высказываний истинные:

а) $-7x < -28 \Rightarrow x > 4$, б) $x < 6 \Rightarrow x < 5$, в) $x < 6 \Rightarrow x < 20$.

5. Докажите, что решением неравенства $2(x + 1) + 5 > 3 - (1 - 2x)$ является любое действительное число.

6. Докажите, что не существует действительного числа, которое являлось бы решением неравенства $3(2 - x) - 2 > 5 - 3x$.

7. Решите неравенство, множество решений отметьте на числовой оси.

$$\frac{1,3 - 3x}{2} + \frac{5x - 0,4}{0,3} \leq \frac{1,8 - 8x}{1,2}$$

8. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая – 8 см. Какой может быть длина третьей стороны, если периметр треугольника больше 17 см?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 11

11.1 Уравнения с одной переменной

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X . Тогда высказывательная форма вида $f(x) = g(x)$ называется уравнением с одной переменной.

Значение переменной x из множества X , при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется *корнем уравнения* (или его решением). *Решить уравнение* – это значит найти множество его корней.

Уравнение может содержать один корень, два корня, множество корней, а может не иметь корней.

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала преобразовывают, заменяя другим, более простым; полученное уравнение опять преобразовывают, заменяя более простым, и т. д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными*, если множества их корней совпадают.

Замена уравнения равносильным ему уравнением называется *равносильным преобразованием*.

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекают следствия, которые используются при решении уравнений:

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение, которое определено на том же множестве и не обращается на нем в нуль, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекает следствие: *если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.*

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий.

11.2 Неравенства с одной переменной

Предложения $2x+7>10-x$, $x^2+7x<2$, $(x+2)(2x-3)>0$ называют неравенствами с одной переменной.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X . Тогда неравенство вида $f(x)>g(x)$ или $f(x)<g(x)$ называется *неравенством с одной переменной*. Множество X называется *областью его определения*.

Значение переменной x из множества X , при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его *решением*. *Решить неравенство* – это значит найти множество его решений.

Так, решением неравенства $2x+7>10-x$, $x\in\mathbf{R}$ является число $x=5$, так как $2\cdot 5+7>10-5$ – истинное числовое неравенство. А множество его решений – это промежуток $(1, \infty)$, который находят, выполняя преобразование неравенства: $2x+7>10-x \Rightarrow 3x>3 \Rightarrow x>1$.

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Два неравенства называются *равносильными*, если их множества решений равны.

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)+h(x)>g(x)+h(x)$ равносильны на множестве X .

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используются при решении неравенств:

- 1) Если к обеим частям неравенства $f(x)>g(x)$ прибавить одно и то же число d , то получим неравенство $f(x)+d>g(x)+d$, равносильное исходному.
- 2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X .

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x)>g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d , то получим неравенство $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Теорема 5. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X .

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Тестовые задания к разделу 3

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Какая из следующих формул не задает на множестве действительных чисел функцию?	1) $y = -5x$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $x^2 + y^2 = 25$; 4) $y = 3 - 2x$.
2	Обратной пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы:	1) $y = kx + b$; 2) $y = kx$; 3) $y = \frac{k}{x}$; 4) $y = x^2$.
3	В каких координатных четвертях расположен график функции $y = -\frac{3}{x}$	1) I и II; 3) I и IV; 2) I и III; 4) II и IV.
4	Найдите координату y точки пересечения с осью ординат графика функции $y = 5x - \frac{1}{3}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{15}$; 4) $-\frac{1}{3}$.
5	Значение выражения $24 : 3 \cdot 2 + 2^0$	1) 17; 2) 13; 3) 16; 4) 12
6	Вычислите $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3$	1) $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) 1
7	Произведение корней уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ равно...	1) 0; 2) 6; 3) 28; 4) -6.
8	Свойство «с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз, соответствующее значение y увеличивается (уменьшается) во столько же раз» характерно для	1) прямой пропорциональности; 2) обратной пропорциональности; 3) линейной функции; 4) квадратичной функции.
9	Графиком какой функции является гипербола?	1) $y = 7x$; 2) $y = \frac{12}{x}$; 3) $y = 3 - 2x$; 4) $y = 2$
10	Неравенство $2x + 7 > 10 - x$, $x \in \mathbf{R}$ имеет следующее множество решений:	1) $(17; \infty)$; 2) $(3; \infty)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(1, \infty)$.

Теоретические вопросы по 1 семестру

1. Понятие множества и элемента множества.
2. Виды множеств. Основные числовые множества.
3. Способы задания множеств.
4. Отношения между множествами. Круги Эйлера.
5. Пересечение множеств.
6. Объединение множеств.
7. Свойства пересечения и объединения множеств.
8. Вычитание множеств. Дополнение множеств.
9. Понятие разбиения множества на классы.
10. Разбиение множества на классы с помощью свойств.
11. Декартово произведение множеств. Свойства декартова произведения 2-х множеств.
12. Графическое изображение декартова произведения 2-х множеств.
13. Понятие кортежа. Декартово произведения n множеств.
14. Число элементов в объединении и разности конечных множеств.
15. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств.
16. Понятие соответствия.
17. Способы задания соответствий.
18. Виды соответствий. Соответствие, обратное данному.
19. Отображения. Взаимно однозначное соответствие. Равномощные множества.
20. Понятие отношения на множестве.
21. Способы задания отношений.
22. Свойства отношений (рефлексивность, симметричность, примеры).
23. Свойства отношений (антисимметричность, транзитивность, связность, примеры).
24. Отношение эквивалентности. Взаимосвязь отношения эквивалентности и разбиения множества на классы.
25. Отношение порядка. Упорядоченное множество.
26. Понятие функции.
27. Способы задания функции. Свойства функций (монотонность, возрастание, убывание).
28. Прямая пропорциональность (определение, свойства, график, примеры).
29. Обратная пропорциональность (определение, свойства, график, примеры).
30. Линейная функция (определение, свойства, график, примеры).
31. Выражения. Алфавит математического языка.
32. Числовые выражения.
33. Выражения с переменными.
34. Тождественные преобразования выражений.
35. Числовые равенства и их свойства.
36. Числовые неравенства и их свойства.
37. Уравнения с одной переменной.
38. Теоремы о равносильности уравнений и следствия к ним.
39. Неравенства с одной переменной.
40. Теоремы о равносильности неравенств и следствия к ним.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Стойлова, Л. П. Математика: учебник для использования в образовательных учреждениях, реализующих программы ВПО по дисциплине «Математика» по направлению 050100 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Начальное образование» / Л. П. Стойлова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Академия, 2012. – 464 с. – (Высшее педагогическое образование. Бакалавриат). – ISBN 978-5-7695-7970-7.

2. Математика. Сборник задач: учебное пособие для студентов учреждений ВПО, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль «Начальное образование» / Л. П. Стойлова, Е. А. Конобеева, Т. А. Конобеева, И. В. Шадрина. – М. : Академия, 2012. – 240 с. – (Бакалавриат) – ISBN 978-5-7695-8142-7.

3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для бакалавров / Н. В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 495 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – ISBN 978-5-9916-2648-4.

Дополнительная литература

1. Амадова, Г. М. Математика : учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений : в 2-х кн. Кн. 1 / Г. М. Амадова, М. А. Амадов. – М.: Академия, 2008. – 249 с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 978-5-7695-3999-2.

2. Амадова, Г. М. Математика.: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений : в 2-х кн. Кн. 2 / Г. М. Амадова, М. А. Амадов. – М. : Академия, 2008. – 237 с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 978-5-7695-4002-8.

3. Грес, П. В. Математика для бакалавров [Электронный ресурс] : Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений : учебное пособие / П. В. Грес. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Логос, 2013. – 288 с. – ISBN 978-5-98704-751-4 – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233778>.

4. Дорофеева, А. В. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник для академического бакалавриата / А. В. Дорофеева. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2017. – 406 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-03298-7 – URL: <https://www.biblio-online.ru/book/A3EFDC48-87CB-41E5-A078-05BDBB3BD6E8>.

5. Дорофеева, А. В. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник для академического бакалавриата / А. В. Дорофеева. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2017. – 406 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-03298-7 – URL: <https://www.biblio-online.ru/book/A3EFDC48-87CB-41E5-A078-05BDBB3BD6E8>.

6. Мачулис, В. В. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В. В. Мачулис. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2017. – 306 с. – (Университеты России). – ISBN 978-5-534-01277-4. – URL: <https://www.biblio-online.ru/book/4BE2493C-98A2-401F-82C5-693AE62E332F>.

7. Павлюченко, Ю. В. Высшая математика для гуманитарных направлений [Электронный ресурс] : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Ю. В. Павлюченко, Н. Ш. Хассан ; под общ. ред. Ю. В. Павлюченко. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2016. – 238 с. – (Бакалавр. Прикладной курс). – ISBN 978-5-9916-7037-1. – URL: <https://www.biblio-online.ru/book/D2AEA1B2-6193-4204-BB49-896667D5F243>.

8. Сборник заданий региональных олимпиад по математике среди учащихся начальных классов 2005–2014 гг.: для студентов направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» Профиль «Начальное образование» / Игракова О. В., авт.-сост., Буренок И. И., сост., Полищук Н. Н., сост.; ФГБОУ ВПО «КубГУ» филиал в г. Славянске-на-Кубани. Факультет педагогики и психологии. - Славянск-на-Кубани : Издательский центр филиала ФГБОУ ВПО «КубГУ» в г. Славянске-на-Кубани, 2014. – 100 с.

Периодические издания

1. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=journal_red&jid=330573.

2. Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=journal_red&jid=344860.

3. Квант : [полнотекстовый архив номеров за период: 1970-2010 гг.]. – URL: <http://www.kvant.info/old.htm>.

4. Математика в высшем образовании. – URL: https://e.lanbook.com/journal/2368#journal_name.

5. Математические труды. – URL: <http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=1389771>.

6. Современная математика и концепции инновационного математического образования. – URL: <http://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53797>.

7. Начальная школа. – URL: <http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=1709622>.

8. Начальная школа плюс до и после. – URL: <http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=1293677>.

9. Начальная школа: проблемы и перспективы, ценности и инновации. – URL: <http://elibrary.ru/contents.asp?titleid=52840>.

Интернет ресурсы

1. ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» : сайт. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red.

2. ЭБС Издательства «Лань» : сайт. – URL: <http://e.lanbook.com>.
3. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» : сайт. – URL: <https://www.biblio-online.ru/catalog/E121B99F-E5ED-430E-A737-37D3A9E6DBFB>.
4. eLibrary.ru : научная электронная библиотека : сайт. – URL: <http://elibrary.ru/>.
5. базы данных компании «Ист Вью» [раздел: Периодические издания (на русском языке)]: сайт. – URL: <http://dlib.eastview.com>.
6. Математика // Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная информационная система : сайт. – URL: http://window.edu.ru/catalog/resources?p_rubr=2.2.74.12.
7. Математика и естественно-научное образование // Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная информационная система : сайт. - URL: http://window.edu.ru/catalog/?p_rubr=2.2.74.
8. Math-Net.Ru : общероссийский математический портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН : сайт. – URL: <http://www.mathnet.ru>.
9. MATH.RU : портал математического образования / Отделение математических наук Российской академии наук : сайт. - URL: <http://www.math.ru>.
10. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов : сайт. – URL: <http://school-collection.edu.ru>.
11. Российский общеобразовательный портал : сайт. – URL: <http://www.school.edu.ru>.
12. Федеральный образовательный портал «Информационно-коммуникационные технологии в образовании»: сайт. – URL: <http://www.ict.edu.ru/>.
13. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) : сайт. – URL: <http://fcior.edu.ru>.
14. Энциклопедиум: Энциклопедии. Словари. Справочники // ЭБС «Университетская библиотека ONLINE»: сайт. – URL: <http://enc.biblioclub.ru/>.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 СЕМЕСТР	
РАЗДЕЛ 1	
МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ	5
ТЕМА 1 «ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ»	5
ТЕМА 2 «ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ОБЪЕДИНЕНИЕ МНОЖЕСТВ»	11
ТЕМА 3 «ВЫЧИТАНИЕ И ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВ»	18
ТЕМА 4 «РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА НА КЛАССЫ»	21
ТЕМА 5 «ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ И ЕГО СВОЙСТВА»	25
ТЕМА 6 «ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕНИИ, РАЗНОСТИ И ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ»	29
Тестовые задания к разделу 1	31
РАЗДЕЛ 2	
СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ	33
ТЕМА 7 «СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ»	33
ТЕМА 8 «ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ И ИХ СВОЙСТВА»	38
Тестовые задания к разделу 2	45
РАЗДЕЛ 3 ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ	47
ТЕМА 9 «ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ»	47
ТЕМА 10 «Выражения. Числовые равенства и неравенства»	54
ТЕМА 11 «Уравнения и неравенства с одной переменной»	58
Тестовые задания к разделу 3	63
Теоретические вопросы по 1 семестру	64
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ	65

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

ИГРАКОВА Оксана Викторовна

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие к изучению дисциплины
для студентов 1-го курса бакалавриата,
обучающихся по направлению
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки – Начальное образование,
Дошкольное образование)
очной и заочной форм обучения

Подписано в печать 16.03.2017 г.
Формат 60х84/16. Бумага типографская. Гарнитура «Таймс».
Печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 3,08
Тираж 50 экз. Заказ № 26

Филиал Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200

Отпечатано в издательском центре
филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353563, г. Славянск-на-Кубани, ул. Коммунистическая, 2