ТЕМА: *Математическое доказательство*

План:

1) Умозаключения и их виды.
2) Схемы дедуктивных умозаключений.
3) Проверка правильности умозаключений с помощью кругов Эйлера.
4) Способы математического доказательства.

Умозаключения и их виды

Умозаключение (рассуждение) – способ получения нового знания на основе некоторого имеющегося.

Состоит из посылок и заключения.

Посылки – это высказывания, содержащие исходное знание.

Заключение – это высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходного.

Логический переход от посылок к заключению - ***вывод.***

- ***Пример.*** Все углероды горючи
  Алмаз - углерод
  } ***посылки***
  Алмаз горюч - ***заключение***

Умозаключение — форма мышления, в которой из одного или нескольких суждений на основании определенных правил вывода получается новое суждение, с необходимостью или определенной степенью достоверности следующее из них.

Умозаключения

- **Аналогия**
- **Дедуктивные**
- **Неполная индукция**

Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B \quad \text{или} \quad \frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

Пример. Ученику предлагается объяснить, почему число 23 можно представить в виде суммы 20+3.

Он рассуждает: «Число 23 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, 23=20+3».

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса

Пример. $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$.

Вывод: для всех натуральных чисел a и $в$ верно равенство $a \cdot в = в \cdot a$.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением

Пример. $3+5<3 \cdot 5$, $2+7<2 \cdot 7$, $4+8<4 \cdot 8$.

Вывод: $(\forall a,\ в \in \mathbf{N})\ a + в < a \cdot в$ - ложное утверждение. Контрпример: $1+2$ не меньше, чем $1 \cdot 2$

Выводы, полученные с помощью неполной индукции, носят характер предположения и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказать, либо опровергнуть.

Аналогия – это умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.

Пример. 27 · 3 = (20+7) · 3 = 20 · 3 + 7 · 3 = 81.

Действуя по аналогии, 712· 4 = (700+10+2) · 4 = 2800+40+8 = 2848.

По аналогии можно умножить 6288 на 3.

Вывод по аналогии носит характер предположения и нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Пример. ***Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.*** Действуя по аналогии, получаем вывод: число делится на 8, если оно делится на 2 и на 4. Вывод ложный (контрпример: число 12 делится на 2 и на 4, но не делится на 8).

Схемы дедуктивных умозаключений

«В холодную погоду нужно тепло одеваться. Сегодня холодно? Холодно. Вот и одевайся теплей!»

Дедуктивные умозаключения позволяют строить частные суждения из общих

Правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений

Правила вывода

(схемы дедуктивных (правильных) умозаключений):

$$\frac{A(x)\Rightarrow B(x),\ A(a)}{B(a)}$$ – ***правило заключения***

Пример. «Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5».

$$\frac{A(x)\Rightarrow B(x),\ \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$$ – ***правило отрицания***

Пример. «Если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5»

$$\frac{A(x)\Rightarrow B(x),\ B(x)\Rightarrow C(x)}{A(x)\Rightarrow C(x)}$$ – ***правило силлогизма***

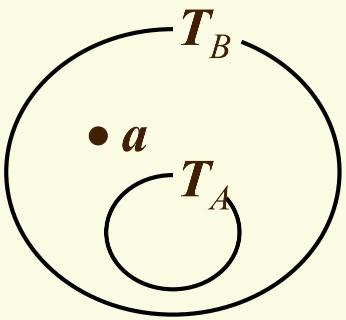
Пример. «Если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3»

Проверка правильности умозаключений с помощью кругов Эйлера

- **Пример**. «Если запись числа оканчивается цифрой 5, то число делится на 5. Число 125 делится на 5. Следовательно, запись числа 125 оканчивается цифрой 5».

Решение. Схема умозаключения - $\dfrac{A(x)\Rightarrow B(x),\ B(a)}{A(a)}$

$$\frac{T_A \subset T_B,\ a \in T_B}{a \in T_B}$$



Данная схема не является правилом дедуктивного умозаключения.

Способы математического доказательства

- ***<u>Доказать какое-либо утверждение</u>*** *– это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.*
- *Основа математического доказательства - дедуктивный вывод.*
- ***<u>Доказательство</u>*** *– это цепочка дедуктивных умозаключений, расположенных в определенном порядке, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.*

Доказательства
(по способу ведения)

прямые

основываясь на некотором истинном предложении и с учетом условия теоремы, строится цепочка дедуктивных умозаключений, которая приводит к истинному заключению

косвенные

истинность утверждения обосновывается с помощью опровержения противоречащего утверждения

Пример. ***Доказать, что если в четырехугольнике три угла прямые, то он – прямоугольник.***

Прямое доказательство.

Так как в любом выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°, то и данном она составляет 360°. Сумма трех прямых углов равна 270°, и, значит, четвертый имеет величину 360°– 270° = 90° . Если все углы четырехугольника прямые, он – прямоугольник. Следовательно, данный четырехугольник будет прямоугольником. Что и требовалось доказать.

- Пример косвенного доказательства - доказательство ***методом от противного***

Пример. *Доказать, что если а+3>10, то а ≠7.*

Доказательство.

Предположим, что заключение ложно, тогда истинно его отрицание, т.е. $a=7$. Подставим значение a в неравенство $a+3>10$. Получим $7+3>10$ или $10>10$, которое ложно. Пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и поэтому, если $a+3>10$, то $a\neq 7$.

- *Доказательство* ***методом исключения*** *- косвенный вид доказательства*

Пример. *Известно, что преступление могут совершить только А, либо В, либо С. Доказано, что А и В преступление не совершали.*

Вывод: преступление совершил С.

Особые методы доказательства:

1. <u>Полная индукция</u> - *такой метод доказательства, при котором истинность утверждения следует из истинности его во всех частных случаях.*

<u>Пример</u>. ***Доказать, что каждое составное натуральное число, большее 4, но меньшее 20, представимо в виде суммы двух простых чисел.***

<u>Доказательство</u>.

Составными здесь будут числа: 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18. Каждое из них можно представить в виде суммы двух простых чисел: 6=3+3, 8=5+3 и т.д. Так как данное утверждение истинно во всех частных случаях, то оно доказано.

2. <u>Математическая индукция</u>