<u>Лекция №4</u>

Тема: «***Высказывания с кванторами***»

План: **1)** *Кванторы общности и существования.*

2) *Доказательство истинности или ложности высказываний с кванторами.*

Высказывания с кванторами

Часто встречаются слова: «каждый», «все», «некоторые», «хотя бы один». Например, «<u>в любом</u> прямоугольнике противоположные стороны равны» или «<u>некоторые</u> натуральные числа кратны 5».

«число x кратно 5» - высказывательная форма,

«<u>всякое</u> число x кратно 5» - ложное высказывание.

Выражение «*для всякого x*» называется ***<u>квантором общности</u>*** по переменной x и обозначается символом $\forall \mathbf{x}$.

$(\forall \boldsymbol{x})\mathrm{A}(\boldsymbol{x})$ означает: «для всякого значения x предложение $\mathrm{A}(x)$ – истинное высказывание».

<u>Читают:</u>

- для всякого x из множества X истинно $\mathrm{A}(x)$;
- всякий элемент из множества X обладает свойством А.

Наряду со словом «всякий» употребляются слова «каждый, любой».

Выражение *«существует х такое, что…»*, называют ***квантором существования*** по переменной х и обозначается символом ∃**х**.
(∃х) А(х) означает*: «существует такое значение х, что А(х) истинное высказывание».*
Читают:
а) существует такое х из множества Х, что истинно А(х);
б) хотя бы один элемент х из множества Х обладает свойством А.
Вместо слова **«существует»** используют слова

«некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Вывод: если задана одноместная высказывательная форма А(*х*), то чтобы превратить её в высказывание, достаточно связать квантором общности или существования содержащуюся в ней переменную. Если же предикат содержит несколько переменных, то перевести её в высказывание можно, если связать квантором каждую переменную.

***Пример*. Выявить логическую структуру высказывания «Некоторые нечетные числа делятся на 5».**

Решение. Квантор существования выражен словом «*некоторые*».

Высказывательная форма «*нечетные числа делятся на 5*», заданная на множестве X нечетных чисел.

Обозначим высказывательную форму A(x), тогда логическая структура: $(\exists x \in X)\ A(x)$.

Или по-другому: $(\exists x \in X)\ x \vdots 5$, где X – множество нечетных чисел.

Доказательство истинности или ложности высказываний с кванторами

($\forall x \in X$)A(x) - высказывание с квантором общности

Убедиться в истинности – показать, что $T_A = X$, убедиться в ложности - показать, что $T_A \neq X$.

Пример. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

а) Для каждого x из множества {0, 1, 4} значение выражения (4–x):(2x+1) есть число целое.

б) всякое натуральное число делится на 5.

Решение. а) Чтобы убедиться в истинности высказывания, надо показать, что при подстановке каждого числа из множества {0, 1, 4} в выражение (4–x):(2x+1) получается целое число. Действительно, значение этого выражения при всех заданных значениях x есть число целое. Установили это *путем перебора всех возможных случаев.*

б) Высказывание «*всякое натуральное число делится на 5*» – ложное. Убедиться в этом можно, назвав натуральное число, которое не делится на 5, например, 12. В ложности высказывания убедились, *приведя контрпример*.

Правило. *Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.*

($\exists x \in X$) $A(x)$ – высказывание с квантором существования

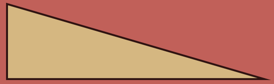
Оно будет истинно, если $T_A \neq \varnothing$ и ложно, когда $T_A = \varnothing$

Пример. Установить, истинны или ложны следующие высказывания:

а) Среди треугольников есть прямоугольные.

б) Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними.

Решение. а) Высказывание содержит квантор существования. Чтобы убедиться в истинности, достаточно *привести пример*, начертив прямоугольный треугольник.



б) Из того, что начертить треугольник, который был бы одновременно прямоугольным и равносторонним не удаётся, ещё не следует вывод о ложности данного высказывания. В этом надо убедиться *путём доказательства*. Действительно, если треугольник прямоугольный, то в нем один угол 90°, а в равностороннем все углы 60°. Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним. Поэтому данное высказывание ложное.

<u>Правило.</u> ***Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.***

Убедиться в ложности высказывания – это значит *опровергнуть* его.