РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

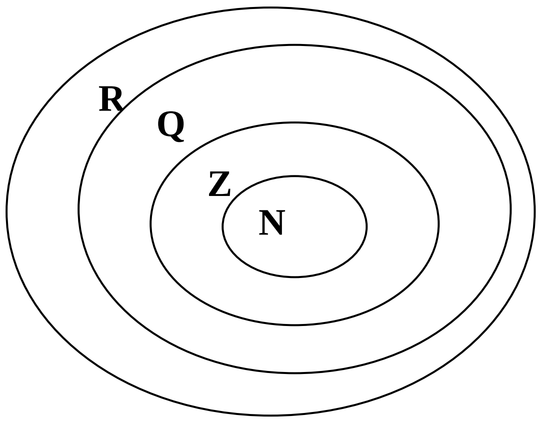
1. Краткие исторические сведения о возникновении понятия дроби и отрицательного числа

Большинство применений математики связано с измерением величин, но для этих целей натуральных чисел недостаточно: не всегда единица величины укладывается целое число раз в измеряемой величине. Чтобы в такой ситуации точно выразить результат измерения, нужно расширить запас чисел, введя числа, отличные от натуральных. К этому выводу люди пришли еще в глубокой древности. Измерение длин, площадей, масс и других величин привело сначала к возникновению дробных чисел – получили рациональные числа, а в 5 в до н. э. Пифагором было установлено, что существуют отрезки, длину которых нельзя выразить рациональным числом. Позднее, в связи с решением этой проблемы появились иррациональные числа. Рациональные и иррациональные числа назвали действительными.

Строгое определение действительного числа и обоснование его свойств было дано в 19 веке.

Взаимосвязи между различными множествами чисел можно изобразить наглядно при помощи кругов Эйлера.

N – натуральные
Z - целые
Q - рациональные
R – действительные



Действительные числа – не последние в ряду различных чисел. Процесс, начавшийся с расширения множества натуральных чисел, продолжается и сегодня – этого требует развитее различных наук и самой математики.

Знакомство учащихся с дробными числами происходит в начальных классах, а в средней школе понятие дроби уточняется и расширяется.

Целые числа

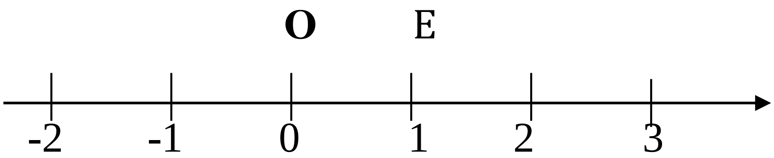
2. Понятие об отрицательном числе

Практическая деятельность и потребности самой математики приводит к необходимости расширения множества натуральных чисел и обогащению самого понятия числа. Многие величины допускают двойное смысловое истолкование, и поэтому числовое значение такой величины без дополнительных указаний определяет ее неоднозначно. Например, температура воздуха 1° не определяет нагретость воздуха без указания холода или тепла; информация «магазин находится на этой улице в 500 м от перекрестка» не определяет местонахождения магазина, так как не указано, в какую сторону от перекрестка надо двигаться к магазину: направо или налево.

Из этих примеров видно, что целесообразно наряду с натуральными числами иметь запас других чисел, которые описывали бы не только величину, но и «направление» и применение которых освободило бы от дополнительных пояснений. Такие числа введены в науку и их принято обозначать как натуральные числа, но со знаком « – » – они называются *отрицательными*.

Натуральные числа, число 0 и целые отрицательные числа образуют множество целых чисел, которые обозначаются **Z**.

Возьмем прямую и отметим на ней произвольную точку 0. Возьмём произвольную точку E, например, справа от 0. Условимся, что числу 1 соответствует точка E.



Отложим от точки E справа отрезок, равный OE (соответственно число 2). Этот процесс откладывания отрезков можно продолжать неограниченно. При этом каждому натуральному числу n будет соответствовать точка на прямой.

Назовем прямую OE *координатной прямой*, число n, соответствующее точке M, координатой точки M и условимся обозначать M(n).

Установим теперь взаимнооднозначное соответствие между множеством отрицательных чисел **N** и некоторым множеством точек координатной прямой OE, находящихся слева от точки O. Для этого будем откладывать отрезки, равные отрезку OE, слева от точки O. Таким образом, мы получим точки, соответствующие числам –1, –2, –3, ….

Теперь уже всем числам из множества **Z** соответствуют точки на координатной прямой. Числа 1 и –1 называются *противоположными*. Противоположные числа изображаются точками, симметричными относительно начала координат на числовой прямой. Противоположность двух чисел – свойство взаимное: если число $–n$ противоположно числу n, то число, противоположное числу $–n$, есть число $–(–n) = n$.

Рассмотрим два противоположных числа, например, –5 и 5. Точки, изображающие эти числа, находятся на одинаковом расстоянии в пять единиц от точки O, но с разных сторон от неё. Число «5» называют абсолютным значением (модулем) числа –5 и числа 5.

Абсолютным значением (модулем) целого числа n называется расстояние от начала координат до точки, соответствующей этому числу. Модуль числа n обозначаются $|n|$.

Определение. ***Модулем*** числа $z \in \mathbf{Z}$ называется само это число, если оно неотрицательное, и противоположное ему число $-z$, если оно отрицательно, т. е.

$$|Z| = \begin{cases} Z, \text{ если } Z > 0 \\ -Z, \text{ если } Z < 0 \end{cases}$$

Определение. Число a меньше числа b, если $b = a + k$.

Геометрическая интерпретация отношения «меньше» такова: $a < b$ тогда и только тогда, когда точка A(a) находится левее точки B(b) на координатной прямой.

Правило сложения целых чисел: сумма двух целых чисел одинакового знака есть число того же знака, модуль которого равен сумме модулей слагаемых. Сумма двух чисел разных знаков есть число, знак которого совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль, а его модуль равен разности между большим и меньшим модулем.

Например, $-7 + 5 = -(|-7| - |5|) = -(7-5) = -2$.

Теорема. Сложение в **Z** коммуникативно, ассоциативно и монотонно.

Определение. Вычитание в **Z** – это сложение с противоположным числом, т.е. $a - b = a + (-b)$.

Вычитание в **Z** – всегда выполнимая операция.

Определение. Произведение двух целых чисел есть положительное число, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и отрицательное число, если знаки сомножителей разные. Модуль произведения равен произведению модулей сомножителей.

Определение. Деление целых чисел определяется как действие, обратное умножению: частным от деления одного числа (делимого) на другое число (делитель) называется третье число, произведение которого на делитель дает делимое, т.е. $m : n = k$, что означает $k \cdot n = m$.

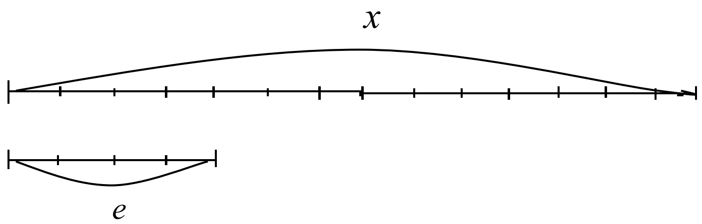
Деление нуля на любое целое $n \neq 0$ дает нуль.

Правило деления целых чисел: модуль частного от деления целых чисел равен частному от деления модуля делимого на модуль делителя, знак частного положителен, если делимое и делитель одинакового знака, и отрицателен, если делимое и делитель разных знаков.

Рациональные числа

3. Понятие дроби

Пусть требуется измерить длину отрезка x с помощью единичного отрезка e. При измерении оказалось, что отрезок x состоит из трёх отрезков, равных e, и отрезка, который короче e. В этом случае длина отрезка x не может быть выражена натуральным числом. Но если отрезок e разбить на 4 равные части, то отрезок x окажется состоящим из 14 отрезков, равных четвёртой части отрезка e. И тогда, говоря о длине отрезка x, нужно указать два числа 4 и 14: четвёртая часть отрезка *e* укладывается в отрезке *x* точно 14 раз. Поэтому условились длину отрезка *x* записывать в виде $\frac{14}{4} \cdot \text{E}$, где E – длина единичного отрезка *e*, а символ $\frac{14}{4}$ называть дробью.



В общем виде понятие дроби определяют так.

Определение. Пусть даны отрезок *x* и единичный отрезок *e*, длина которого E. Если отрезок *x* состоит из *m* отрезков, равных *n*-ой части отрезка *e*, то длина отрезка *x* может быть представлена в виде $\frac{m}{n} \cdot \text{E}$, где символ $\frac{m}{n}$ называют ***дробью*** и читают «эм энных».

В записи дроби $\frac{m}{n}$ числа *m* и *n* –натуральные, *m* – числитель, *n* – знаменатель.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *правильной*, если числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше или равен знаменателю.

На рисунке показано, что четвёртая часть отрезка *e* уложилась в отрезке *x* ровно 14 раз. Это не единственный вариант выбора такой части отрезка *e*, которая укладывается в отрезке *x* целое число раз. Если взять восьмую часть отрезка *e*, то отрезок *x* будет состоять из 28 таких частей и его длина будет выражаться дробью $\frac{28}{8}$. Вообще длина одного и того же отрезка *x* при заданном единичном отрезке *e* может выражаться различными дробями, причём, если длина выражена дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена и любой дробью вида $\frac{mk}{nk}$, $k \in \mathbf{N}$.

Теорема. Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ выражали длину одного и того же отрезка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $mq=np$.

4. Равенство дробей и его свойства

Определение. Две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называются равными, если $mq=np$.

Записывают $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Из теоремы и определения следует, что две дроби равны тогда и только тогда, когда они выражают длину одного и того же отрезка.

Теорема. Равенство дробей является отношением эквивалентности.
Доказательство. Равенство дробей рефлексивно: $\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$, так как равенство $mn=nm$ справедливо для любых натуральных m и n. Равенство дробей симметрично: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, так как из $mq=np$ следует, что $pn=qm$.
Равенство дробей транзитивно: если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ и $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, то $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$, так как $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $mq=np$, а так как $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, то $ps=qr$. Умножим обе части равенства $mq=np$ на s, а равенства $ps=qr$ на n, получим $mqs=nps$ и $nps= nqr$. Откуда $mqs=qrn$ или $ms=nr$. Последнее равенство означает, что $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$. Отсюда следует, что равенства дробей является отношением эквивалентности.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю.

Сокращение дробей – это замена данной дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся только на единицу, то дробь называют *несократимой.* Например, $\frac{5}{17}$ – несократимая дробь.

В результате сокращения дроби, как правило, должна получится равная ей несократимая дробь.

Приведение дробей к общему знаменателю – это замена дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели.
Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а наименьшим общим знаменателем – их наименьшее общее кратное $K(n,q)$.

5. Положительные рациональные числа

Отношение равенства является отношением эквивалентности на множестве дробей. Поэтому оно порождает на нём классы эквивалентности. В каждом таком классе содержатся равные между собой дроби. Например, множество дробей $\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\ldots\}$ – это один класс, множество дробей $\{\frac{1}{3},\frac{2}{6},\frac{3}{9},\ldots\}$ – это другой класс и т.д.

Дроби одного класса выражают длину одного и того же отрезка. Но длина отрезка должна представляться единственным числом. Поэтому считают, что равные дроби – это различные записи одного и того же положительного рационального числа.

Определение. ***Положительным рациональным числом*** называется класс равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому классу, есть запись этого числа.

Множество положительных рациональных чисел обозначается Q_+.

Определение. Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b другой дробью $\frac{p}{q}$, то $a=b$ тогда и только тогда, когда $mq=np$.

Из данного определения следует, что равные рациональные числа представляются равными дробями. Среди всех записей любого положительного рационального числа выделяют дробь, которая является несократимой, и любое рациональное число представимо единственным образом несократимой дробью. Для того чтобы рациональное число $\frac{m}{n}$ представить несократимой дробью, достаточно разделить числитель m и знаменатель n на их наибольший общий делитель.

6. Арифметические действия с положительными рациональными числами

Пусть при некотором единичном отрезке e длина отрезка x выражается дробью $\frac{m}{n}$, а длина отрезка y – дробью $\frac{p}{n}$, и пусть отрезок Z состоит из отрезков x и y. Тогда n-ая часть отрезка e укладывается в отрезке z $m+p$ раз, т.е. длина отрезка z выражается дробью $\frac{m+p}{n}$.

Определение. Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – дробью $\frac{p}{n}$, то их суммой называется число $a+b$, которое представляется дробью $\frac{m+p}{n}$.

Таким образом, $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$. (1)

Сумма рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей.

Если же числа a и b представлены дробями с различными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применять правило (1).

Сложение положительных рациональных чисел коммутативно и ассоциативно, т.е.

$(\forall a, b \in \mathbf{Q}_+)$ $a+b = b+a$;

$(\forall a, b, c \in \mathbf{Q}_+)\ (a+b)+c = a+(b+c).$

Коммутативность и ассоциативность сложения положительных рациональных чисел вытекает из коммутативности и ассоциативности сложения натуральных чисел.
Задание! Доказать это самостоятельно.

Для определения умножения положительных рациональных чисел рассмотрим следующую задачу: известно, что длина отрезка X выражается дробью $\frac{m}{n}$ при единице длины E, а длина единичного отрезка измерена при помощи единицы E_1 и выражается дробью $\frac{p}{q}$. Необходимо найти число, которым будет представлена длина отрезка X, если измерить ее при помощи единицы длины E_1.

Так как $X=\frac{m}{n}\cdot E$, то $n\cdot X=m\cdot E$, а из того, что $E=\frac{p}{q}\cdot E_1$ следует, что $q\cdot E=p\cdot E_1$. Умножим первое полученное равенство на q, а второе – на m. Тогда $(nq)\cdot X=(mq)\cdot E$ и $(mq)\cdot E=(mp)\cdot E_1$, откуда $(nq)\cdot X=(mp)\cdot E_1$. Это равенство показывает, что длина отрезка x при единице длины E_1 выражается дробью $\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$. Значит, умножение дробей связано с переходом от одной единицы длины к другой при измерении длины одного и того же отрезка.

Определение. Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – дробью $\frac{p}{q}$, то их ***произведением*** называется число $a\ b$, которое представляется дробью $\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$.

Таким образом, $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$. (2)

Произведение рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей.

Умножение положительных рациональных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

Вычитание положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная сложению: $a-b=c$ тогда и только тогда, когда $a=b+c$.

Разность $a-b$ положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда $b<a$. Если разность существует, то она единственна.

Правило вычитания положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, где $p<m$

$$\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}. \qquad (3)$$

Деление положительных рациональных чисел определяется как операция, обратная умножению, т.е. это такая операция, которая удовлетворяет условия $a : b = c$ тогда и только тогда, когда $a = b \cdot c$.

Правило деления положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}. \qquad (4)$$

Из этого правила следует, что частное положительных рациональных чисел всегда существует.

7. Отношение «меньше» на множестве положительных рациональных чисел

Определение. Пусть a и b – положительные рациональные числа. Считают, что число b меньше числа a, если существует такое положительное рациональное число c, что $a = b + c$.

Отношение «меньше» обладает свойствами:

1. Отношение меньше на множестве Q_+ антисимметрично и транзитивно, т.е. является отношением порядка, а множество Q_+ упорядоченным множеством.

2. Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$ (т.е. дробями с одинаковыми знаменателями), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $m < p$.

3. Если рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ (т.е. дробями с разными знаменателями), то $a < b$ в том и только в том случае, когда $mq < np$.

4. Во множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего числа.

5. Между любыми двумя различными числами a и b из Q_+ заключено бесконечно много чисел этого же множества. Это свойство называют свойством плотности множества Q_+.

6. Во множестве положительных рациональных чисел нет наибольшего числа.

8. Множество положительных рациональных чисел как расширение множества натуральных чисел

Чтобы множество положительных рациональных чисел являлось расширением множества натуральных чисел, необходимо выполнение ряда условий.

Первое условие – существование между **N** и $\mathbf{Q}_+$ отношения включения. Докажем, что $\mathbf{N} \in \mathbf{Q}_+$.

Пусть длина отрезка x при единичном отрезке e выражена натуральным числом m. Разобьём единичный отрезок на n равных частей. Тогда n-ая часть единичного отрезка будет укладываться в отрезке x точно $m \cdot n$ раз, т.е. длина отрезка x будет выражаться дробью $\frac{m \cdot n}{n}$. Значит, длина отрезка x выражается и натуральным числом m, и положительным рациональным числом $\frac{m \cdot n}{n}$. Но это должно быть одно и тоже число. Поэтому считают, что дроби вида $\frac{m \cdot n}{n}$ являются записями натурального числа m. Следовательно, $\mathbf{N} \in \mathbf{Q}_+$.

Например, натуральное число 6 можно представить в виде дробей: $\frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{18}{3}$ и т.д.

Отношение между множествами **N** и $\mathbf{Q}_+$ можно представить следующим образом.

Числа, которые дополняют множество натуральных чисел до множества положительных рациональных чисел, называются *дробными*.

Второе условие – это согласованность операций, т.е. результаты арифметических действий, произведенных по правилам, существующим для натуральных чисел, должны совпадать с результатами действий над ними, но выполненных по правилам, сформулированным для положительных рациональных чисел. Легко убедиться, что это условие выполняется.

Пусть a и b – натуральные числа, $a + b$ – их сумма, полученная по правилам сложения в **N**. Вычислим сумму чисел a и b по правилу сложения в $\mathbf{Q}_+$. Так как $a=\frac{a}{1}$, $b=\frac{b}{1}$, то $a + b=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{a+b}{1}=a + b$.

Убедиться в выполнимости второго условия для других операций можно аналогично.

Третье условие – выполнимость в $\mathbf{Q}_+$ операций, не всегда осуществимой в **N**. И это условие соблюдено: деление, которое не всегда выполняется в **N**, в множестве $\mathbf{Q}_+$ выполняется всегда.

Сделаем еще несколько дополнений, раскрывающих взаимосвязи между натуральными и положительными рациональными числами.

1. Черту в записи дроби $\frac{m}{n}$ можно рассматривать как знак деления. В самом деле, возьмем два натуральных числа m и n и найдем их частное по правилу деления в **Q**$_+$: $m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m \cdot 1}{1 \cdot n} = \frac{m}{n}$.

Обратно, если дана дробь $\frac{m}{n}$, то её можно рассматривать как частное натуральных чисел m и n: $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m : n$.

2. Любую неправильную дробь можно представить либо в виде натурального числа, либо в виде смешанной дроби.

Пусть $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь. Тогда $m > n$. Если m кратно n, то $\frac{m}{n}$ – запись натурального числа. Если m не кратно n, то разделим m на n с остатком: $m = nq + r$, где $r < n$. Подставим $nq + r$ вместо m в запись $\frac{m}{n}$ и применим правило сложения положительных рациональных чисел:

$$\frac{m}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}.$$

Так как $r < n$, то дробь $\frac{r}{n}$ – правильная. Следовательно, неправильная дробь $\frac{m}{n}$ оказалась представленной в виде суммы натурального числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Это действие назвали *выделением целой части* из неправильной дроби. Например, $\frac{17}{5} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

Сумму натурального числа и правильной дроби принято записывать без знака сложения, т.е. вместо $3 + \frac{2}{5}$ пишут $3\frac{2}{5}$. Такую запись называют *смешанной дробью*.

Справедливо также утверждение: всякую смешанную дробь можно представить в виде неправильной дроби. Например, $3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$.

9. Запись положительных рациональных чисел в виде десятичных дробей

Известно, что появление дробей связано с переходом к новым единицам измерения, причем знаменатель дроби показывает, на сколько долей делится исходная единица измерения. В настоящее время почти во всех странах мира действует *метрическая система единиц*, в которой новые единицы получаются или уменьшением или увеличением исходных в 10, 100, 1000 и т.д. раз. Например, 1 км =1000м. Поэтому в практической деятельности широко используются дроби, знаменатели которых являются степенями 10. Их называют *десятичными*.

Определение. Десятичной называется дробь вида $\frac{m}{10^n}$, где m и n – натуральные числа.

Десятичные дроби принято записывать без знаменателя. Например, дробь $\frac{367}{10^2}$ записывают в виде 3,67. Выясним, как образуется такая запись.

Пусть дана дробь $\frac{m}{10^n}$, где $m, n \in \mathbf{N}$. Представим числитель в виде:

$m = a_k \cdot 10^{k} + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Тогда по правилам действий над степенями при $n < k$, получим:

$$\frac{m}{10^n} = \frac{a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0}{10^n} =$$

$$= (a_k \cdot 10^{k-n} + a_{k-1} \cdot 10^{k-n-1} + \ldots + a_n) + \frac{a_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}.$$

Сумма $a_k \cdot 10^{k-n} + a_{k-1} \cdot 10^{k-n-1} + \ldots + a_n$ является записью целого неотрицательного числа, а сумма $\frac{a_{n-1}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^n}$ представляет дробную часть числа, ее принято записывать без знаменателя в виде $\overline{a_{n-1} \ldots a_0}$. Таким образом, дробь $\frac{m}{10^n}$ можно представить в виде: $\overline{A, a_{n-1} \ldots a_0}$, т.е. при записи дроби $\frac{m}{10^n}$ последние n цифр десятичной записи числа m отделяют запятой. Если числитель содержит менее чем n десятичных знаков, то перед ним пишут столько нулей, чтобы получилась $n+1$ цифра, после чего отделяют запятой n знаков, начиная с конца. Например, $\frac{47}{10^4} = \frac{00047}{10^4} = 0,0047$.

10. Сравнение десятичных дробей и действия над ними. Процент

Сравнение десятичных дробей и арифметические действия над ними легко выполнить, если дроби имеют один и тот же знаменатель.

В основе привидения десятичных дробей к общему знаменателю лежит следующее утверждение: *если к десятичной дроби $\overline{A, a_{n-1} \ldots a_0}$ приписать справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной*.

Это свойство позволяет приводить десятичные дроби к общему знаменателю следующим образом: *если у одной дроби после запятой стоит n цифр, а у другой p цифр, причем $n < p$, то для привидения их к общему знаменателю достаточно к первой дроби приписать справа $p - n$ нулей*.

Пользуясь этим правилом, легко выполнять сравнение десятичных дробей, так как оно сводится к сравнению натуральных чисел: *чтобы сравнить две десятичные дроби, надо уравнять в них число десятичных знаков после запятой, отбросить запятые и сравнить получившиеся натуральные числа*.

Например, 4,62517 > 4,623, так как 462517 > 462300.

Для дробей, имеющих одинаковые знаменатели, сложение и вычитание сводится к соответствующим операциям над их числителями. Это позволяет свести сложение и вычитание десятичных дробей к действиям над натуральными числами.

Например, $2{,}54 + 3{,}7126 = 2{,}5400 + 3{,}7126 = \frac{25400}{10000} + \frac{37126}{10000} = \frac{62526}{10000} = 6{,}2526$.

Умножение и деление десятичных дробей не требует приведения их к общему знаменателю, но они также сводятся к соответствующим действиям над натуральными числами.

Среди десятичных дробей выделяют и часто используют дробь 0,01. Ее называют процентом и обозначают 1%. Запись p % обозначает $\frac{p}{100}$. Например, 25% – это дробь $\frac{25}{100}$ или 0,25.

Проценты были введены, когда не существовало десятичных дробей. Чтобы произвести расчеты по займам, определяли прирост капитала из расчета 100 денежных единиц. Этот прирост и называли числом процентов (pro centum – на сто).

11. Бесконечные десятичные дроби

Простота сравнения и выполнения действий над десятичными дробями приводит к следующему вопросу: любую ли дробь вида $\frac{m}{n}$ $(m,n \in \mathbf{N})$ можно записать в виде конечной десятичной дроби, т.е. дроби, у которой после запятой стоит конечное число цифр? Ответ на этот вопрос дает теорема.

Теорема. Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была равна десятичной, необходимо и достаточно, чтобы в разложение ее знаменателя n на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5.

Например, $\frac{23}{80}$ можно записать в виде десятичной дроби, так как она несократима и $80 = 2^4 \cdot 5$. Дробь $\frac{11}{15}$ несократимая, но $15 = 3 \cdot 5$. Поскольку в разложение знаменателя входит множитель, отличный от 2 и 5, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной.

Дробь $\frac{1}{3}$ нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. Но деля 1 на 3, получаем $0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$. Далее находим, что $0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$ и т.д.

Вообще для любого n имеем: $\underbrace{0{,}33\ldots3}_{n \text{ цифр}} < \frac{1}{3} < \underbrace{0{,}33\ldots4}_{n \text{ цифр}}$

Вместо того чтобы писать бесконечное множество неравенств, говорят, что дроби $\frac{1}{3}$ соответствует *бесконечная десятичная дробь* 0,33..3… Это означает, что если отбросить в бесконечной дроби все цифры, начиная с некоторой, то будем иметь число, меньшее $\frac{1}{3}$, а если в полученном числе увеличить последнюю цифру на 1, то будет число, большее $\frac{1}{3}$.

Любую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной, приписав к ней справа последовательность нулей. Например, 0,25 = 0,2500…0…

Бесконечные десятичные дроби, которые получаются при записи положительного рационального числа, обладают одной особенностью – они являются *периодическими*. Это значит, что, начиная с некоторой цифры, они образуются бесконечным повторением одной и той же группы цифр. Например, число $\frac{3}{11}$ выражается бесконечной десятичной дробью 0,2727…27…, число $\frac{8}{55}$ – бесконечной десятичной дробью 0,14545..45… Для краткости первую из дробей пишут в виде 0,(27), а вторую – в виде 0,1(45). В скобки заключают повторяющуюся группу цифр, которая называется *периодом* этой дроби. Вместо 0,(27) можно написать 0,2(72), но эта запись более длинная.

Если в разложение знаменателя несократимой дроби на простые множители не входят цифры 2 и 5, то при обращении этой дроби в бесконечную десятичную дробь получится *чистая периодическая дробь*, т.е. дробь, период которой начинается сразу после запятой. Например, 0,(27). Если же в разложение знаменателя входит множитель 2 или 5, то периодическая дробь оказывается *смешанной* (например, 0,1(45)) – дробь, у которой между запятой и началом периода будет несколько цифр (а именно столько, каков больший из показателей степеней множителей 2 и 5). Например, если $n=2^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$, то между запятой и началом периода окажутся три цифры.

Теорема. Любое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью.

Доказательство. Пусть рациональное число представлено несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Чтобы преобразовать ее в десятичную, надо выполнить деление натурального числа m на натуральное число n. При этом будут остатки, меньшие n, т.е. числа вида 0,1,2…n–1. Если хотя бы один из остатков окажется равным нулю, то после деления получится конечная десятичная дробь (или, что то же самое, бесконечная десятичная дробь, заканчивающаяся последовательностью нулей). Если же все остатки отличны от нуля, то деление будет представлять собой бесконечный процесс, но количество различных остатков конечно, и поэтому, начиная с некоторого шага, какой-то остаток повторится, что приведет к повторению цифр в частном.

12. Переход от периодической дроби к обыкновенной

Пусть дана чистая периодическая дробь 0,(24), т.е. 0,242424…24… Обозначим соответствующее ей число через *a*. Если перенести запятую на две цифры вправо, число а увеличится в 100 раз и получим, что 100*a*=24,242424…24…, т.е. 100*a*=24+0,242424…24… = 24+*a*. Решая уравнение 100*a*=24+*a*, получаем, что $a=\frac{24}{99}$, т.е. $a=\frac{8}{33}$. Заметим, что 24 одновременно и числитель дроби $\frac{24}{99}$, и период дроби 0,(24).

Правило 1. *При обращении в обыкновенную дробь чистой периодической десятичной дроби получается дробь, числитель которой равен периоду, а знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде дроби.*

Например, $0,(35)=\frac{35}{99}$.

Аналогично выводится правило для обращения в обыкновенную дробь *смешанной* периодической десятичной дроби.

Правило 2. *Если целая часть дроби равна нулю, то получается дробь, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами, стоящими до начала второго периода, и числом, записанным цифрами, стоящими до начала первого периода; знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде, и такого числа нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.*

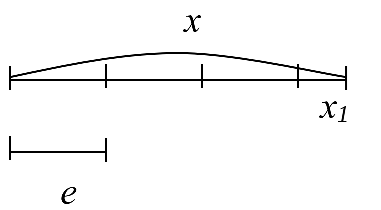
Например, $0,7(61)=\frac{761-7}{990}=\frac{377}{495}$.

<u>Действительные числа</u>

13. Понятие иррационального числа

Одним из источников появления десятичных дробей является деление натуральных чисел, другим – измерение величин. Выясним, как могут получится десятичные дроби при измерении длины отрезка.

Пусть *x*– отрезок, длину которого надо измерить, *e* – единичный отрезок. Длину отрезка *x* обозначим X, а длину отрезка *e* – E. Пусть отрезок *x* состоит из *n* отрезков, равных *e*, и отрезка x_1, который короче отрезка *e*, т.е. $n\cdot E<X<(n+1)\cdot E$.



Числа *n* и *n*+1 есть приближенные значения длины отрезка *x* при единице длины E с недостатком и с избытком с точностью до 1.

Чтобы получить ответ с большей точностью, возьмем отрезок e_1 и будем укладывать его в отрезке x_1. При этом возможны два случая.

1) Отрезок e_1 уложился в отрезке x_1 точно n раз. Тогда длина n отрезка x выражается конечной десятичной дробью: $X=(n+\frac{n_1}{10})\cdot E = \overline{n,n_1}\cdot E$. Например, $X=3{,}4\cdot E$.

2) Отрезок x_1 оказывается состоящим из n отрезков, равных e_1, и отрезка x_2, который короче отрезка e_1. Тогда $\overline{n,n_1}\cdot E < X < \overline{n,n_1 n_1'}\cdot E$, где $\overline{n,n_1}$ и $\overline{n,n_1 n_1'}$ – приближенные значения длины отрезка x с недостатком и с избытком с точностью до 0,1.

Во втором случае процесс измерения отрезка x можно продолжать, взяв новый единичный отрезок e_2 – сотую часть отрезка e.

На практике этот процесс измерения длины отрезка на каком-то этапе закончится. И тогда результатом измерения длины отрезка будет либо натуральное число, либо конечная десятичная дробь. Если же представить этот процесс измерения длины отрезка в идеале, то возможны два исхода:

1) На k-том шагу процесс измерения окончится. Тогда длина отрезка x выразится конечной десятичной дробью вида $\overline{n,n_1 n_2 \ldots n_к}$.

2) Описанный процесс измерения длины отрезка x продолжается бесконечно. Тогда отчет о нем можно представить символом $\overline{n,n_1 n_2 \ldots n_к \ldots}$, который называют бесконечной десятичной дробью.

Итак, при измерении длин отрезков могут получаться бесконечные десятичные дроби. Но всегда ли эти дроби периодические? Оказывается, что нет. Существуют отрезки, длины которых нельзя выразить бесконечной периодической дробью (т.е. положительным рациональным числом) при выбранной единицы длины. Это было важнейшим открытием в математике, из которого следует, что рациональных чисел недостаточно для измерения длин отрезков.

Теорема. Если единицей длины является длиной стороны квадрата, то длина диагонали этого квадрата не может быть выражена положительным рациональным числом.

Доказательство. Пусть длина стороны квадрата выражается числом 1. Предположим противное тому, что надо доказать, т.е. что длина диагонали квадрата выражается несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Тогда по теореме Пифагора, выполнялось бы равенство $1^2+1^2=\frac{m^2}{n^2}$. Из него следует, что $m^2=2n^2$, значит, m^2 – четное число, тогда и число m – четное (квадрат нечетного числа не может быть четным). Итак, $m = 2p$. Заменив в равенстве $m^2=2n^2$ число m на $2p$, получаем, что $4p^2 = 2n^2$, т.е. $2p^2=n^2$. Отсюда следует, что n^2 – четное, следовательно, n – четное число. Таким образом, числа n и m – четные, значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2, что противоречит предположению о ее несократимости. Установленное противоречие доказывает, что если единицей длины является длина стороны квадрата, то длину диагонали этого квадрата нельзя выразить рациональным числом.

Из теоремы следует, что существуют отрезки, длины которых нельзя выразить положительным рациональным числом или, другими словами, записать в виде бесконечной периодической дроби. И значит, бесконечные десятичные дроби могут быть непериодическими.

Считают, что бесконечные непериодические десятичные дроби являются записью новых чисел – *положительных иррациональных чисел*. Поэтому говорят, что бесконечные непериодические десятичные дроби – это и есть положительные иррациональные числа.

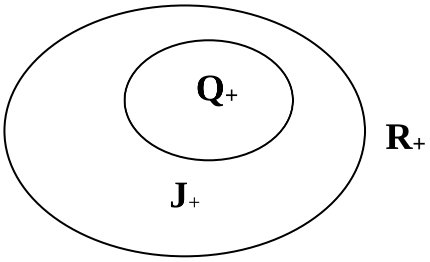
Итак, получено понятие положительного иррационального числа через процесс измерения длин отрезков. Но иррациональные числа можно получить и при извлечении корней из некоторых рациональных чисел. Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ – это иррациональные числа. Иррациональными являются также lg 5, sin 31, числа π=3,14…, e=2,7828… и другие.

Множество положительных иррациональных чисел обозначают $\mathbf{J}_+$.

14. Множество положительных действительных чисел и действия над ними. Свойства

Объединение двух множеств чисел: положительных рациональных и положительных иррациональных называется множеством положительных действительных чисел и обозначается символом $\mathbf{R}_+$.

Таким образом, $\mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{J}_+ = \mathbf{R}_+$.



Любое положительное действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью – периодической (если оно является рациональным), либо непериодической (если оно является иррациональным).

Для любого действительного числа a справедливо неравенство:

$$a_k \leq a < a'_k.$$

Например, десятичным приближением числа $\sqrt{3}$=1,73205… по недостатку с точностью до 0,001 является число 1,732, а по избытку – число 1,733.

Видим, что десятичные приближения действительного числа являются конечными десятичными дробями. На этом и основываются, определяя действия над ними.

Пусть даны действительные числа a и b, a_k и b_k – их приближенные значения по недостатку, a'_k и b_k' – приближенные значения по избытку.

Определение. Суммой положительных действительных чисел a и b называется такое число $a+b$, которое удовлетворяет следующему неравенству:

$$a_k+b_k \le a+b < a'_k+b_k'.$$

Например, найдем сумму $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ с точностью до 0,001. Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,0001

$$1{,}4142 \le \sqrt{2} < 1{,}4143$$

$$1{,}7320 \le \sqrt{3} < 1{,}7321.$$

Тогда $3{,}1462 \le \sqrt{2}+\sqrt{3} < 3{,}1464$. С точностью до 0,001 сумма $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ равна 3,146.

Определение. Произведением положительных действительных чисел a и b называется такое число $a \cdot b$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$a_k \cdot b_k \le a \cdot b < a'_k \cdot b_k'.$$

Например, найдем произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ с точностью до 0,1. Возьмем десятичные приближения данных чисел с точностью до 0,01

$$1{,}41 \le \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$1{,}73 \le \sqrt{3} < 1{,}74.$$

Тогда $2{,}4393 \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} < 2{,}4708$. С точностью до 0,1 произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ равно 2,4.

Сложение и умножение положительных действительных чисел обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, а умножение дистрибутивно относительно сложения и вычитания. Таким образом, для любых положительных действительных чисел выполняются следующие равенства:

1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$,
3) $a \cdot b = b \cdot a$,
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
5) $a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$.

Свойства множества положительных действительных чисел:

1. *Множество* $\mathbf{R}_+$ *является упорядоченным множеством*.

Так как отношение «меньше» для положительных действительных чисел транзитивно и антисимметрично, то оно является отношением порядка, а множество $\mathbf{R}_+$ – упорядоченным множеством.

2. *В множестве* $\mathbf{R}_+$ *нет ни наименьшего, ни наибольшего элемента*.

Кроме того, между любыми двумя числами из $\mathbf{R}_+$ лежит бесконечно много рациональных чисел.

3. *Непрерывность: если числовое множество X расположено слева от числового множества Y, то найдется хотя бы одно число, разделяющее эти множества.* Например, удалим из множества $\mathbf{R}_+$ число 6. Обозначим через X множество чисел, меньших 6, а через Y – чисел, больших 6. Хотя X расположено слева от Y, после удаления числа 6 нет ни одного числа, разделяющего эти множества. Значит, смысл свойства непрерывности состоит в том, что в

множестве $\mathbf{R}_+$ нет не только таких «скачков», как, например, в множестве **N** натуральных чисел, но и таких «щелей», как в множестве $\mathbf{Q}_+$ положительных рациональных чисел.

15. Множество действительных чисел и действия над ними

С помощью положительных действительных чисел можно выразить результат измерения любой скалярной величины: длины, площади, массы и т.д. Но на практике часто нужно выразить числом не результат измерения величины, а её изменение. Причем её изменение может происходить различно – она может увеличиваться, уменьшаться или оставаться неизменной. Поэтому, чтобы выразить изменение величины, кроме положительных действительных чисел нужны иные числа, а для этого нужно расширить множество $\mathbf{R}_+$, присоединив к нему число 0 и отрицательные числа.

*Объединение множества положительных действительных чисел с множеством отрицательных действительных чисел и нулем есть множество **R** всех действительных чисел.*

Множество **R** действительных чисел и множество точек координатной прямой находятся во взаимно однозначном соответствии: каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу.

Действительные числа сравнивают, определяя отношения «меньше» и «больше» так: $a < b$, если оно расположено левее на координатной прямой; $a > b$, если оно расположено правее на координатной прямой.

Из этого определения вытекает, что любое положительное число больше нуля, а любое отрицательное число меньше нуля. Кроме того, по определению «меньше» и «больше» можно получить утверждение: $a<b$ тогда и только тогда, когда разность $a–b$ есть отрицательное число; $a>b$ тогда и только тогда, когда разность $a–b$ есть положительное число.

Для любых заданных действительных чисел a и b истинно только одно из положений: $a<b$, $a>b$, $a=b$.

Действия над действительными числами выполняются по следующим правилам.

Суммой двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) сумма двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определённым во множестве положительных действительных чисел.
2) сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное; чтобы найти модуль суммы, надо сложить модули слагаемых;
3) сумма двух чисел, имеющих разные знаки, есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с большим модулем; чтобы найти модуль суммы, надо из большего модуля вычесть меньший.

Произведением двух действительных чисел называется число, которое удовлетворяет условиям:

1) произведение двух положительных чисел есть число положительное и находится по правилам, определённым во множестве положительных действительных чисел;
2) произведение двух отрицательных чисел есть число положительное;
3) произведение двух чисел, имеющих разные знаки, есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения, надо перемножить модули этих чисел.

Вычитание и деление действительных чисел определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Вычитание во множестве действительных чисел выполняется всегда, так же как и деление, за исключением случая деления на нуль.