Лекции по курсу «Математика»
<u>Раздел: Элементы геометрии</u>

Тема «Геометрические фигуры, изучаемые в начальном курсе математики»

План:

1. ***Из истории возникновения геометрии.***
2. ***Свойства геометрических фигур на плоскости.***

В последние годы наметилась тенденция к включению значительного по объему геометрического материала в начальном курсе математики. Но для того, чтобы учитель мог познакомить учащихся с различными геометрическими фигурами, мог научить их правильно изображать, ему нужна соответствующая математическая подготовка.

Из истории возникновения геометрии

Геометрия зародилась в Древнем Египте 5-6 тысяч лет назад и первоначально была набором правил, которые помогали измерять длины, площади, объемы и решать практические задачи.

В Древней Греции геометрия стала теоретической наукой. В 3 веке до н. э. Эвклид построил ее на аксиоматической основе. Эта форма оказалась настолько совершенной, что 2 тысячи лет работы Эвклида «Начала» была основным руководством по геометрии, которую стали называть евклидовой.

Переворот в геометрии произошел в 19 веке, когда Н. А. Лобачевский построил «Воображаемую геометрию» , в которой выполнялась аксиома:
на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит, по крайней мере, две прямые не пересекающие данную.
Она заменила пятый постулат Эвклида. Эта замена и привела к новой геометрии– неевклидовой. Позже, были созданы и другие геометрии. С появлением неевклидовой геометрии возникла проблема строгого логического обоснования самой евклидовой геометрии. Наибольшую известность в этой области получили работы известного математика Д. Гильберта– ему удалось построить аксиоматику евклидовой геометрии, которая широко используется в настоящее время.

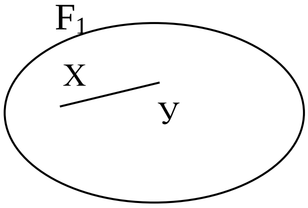
Свойства геометрических фигур на плоскости

Геометрическую фигуры определяют как любое множество точек. Отрезок, прямая, круг, шар – геометрические фигуры.

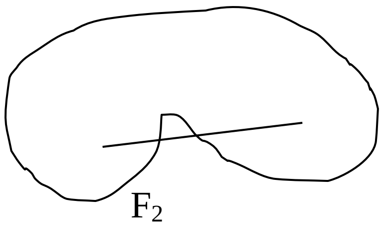
Если все точки геометрической фигуры принадлежат одной плоскости, то она называется ***плоской***.
Например: отрезок, прямоугольник – плоские фигуры. Куб, шар, пирамида – фигуры, не являющиеся плоскими, т.е. пространственные фигуры.

Так как понятие геометрической фигуры определено через понятие множества, то можно говорить о том, что одна фигура включена в другую (или содержится в другой), можно рассматривать объединение, пересечение, разность фигур.

Различают выпуклые и невыпуклые фигуры. Фигура называется ***выпуклой***, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок.



выпуклая фигура



невыпуклая фигура

Выпуклыми фигурами является плоскость, прямая, луч, отрезок, точка, круг.

Для многоугольников известно другое определение. Многоугольник называется ***выпуклым,*** если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Углы

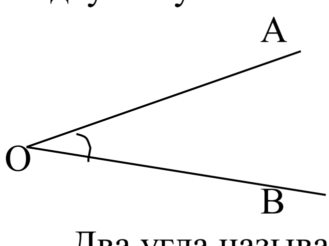
Угол – это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из из этой точки. Лучи называются сторонами угла, а их общее начало– его вершиной.

Угол обозначают по-разному: указывают либо его вершину, либо его сторону, либо три точки (вершину и две точки на сторонах угла). Например, $\angle A$, $\angle(k,l)$, $\angle ABC$.

Угол называется ***развернутым,*** если его стороны лежат на одной прямой.

Угол, составляющий половину развернутого угла называется ***прямым***. Угол, меньший прямого, называется ***острым***, а угол, больший прямого, но меньше развернутого, называется ***тупым***.

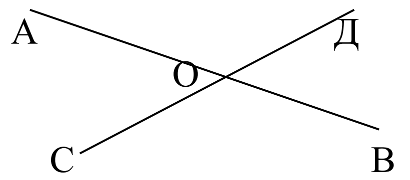
Плоский угол – это часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки. Существуют два плоских угла, образованных двумя лучами с общим началом. Они называются дополнительными.



Два угла называются ***смежными,*** если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

Сумма смежных углов равна 180 градусов. Справедливость этого свойства вытекает из определения смежных углов.

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.



Углы АОД и СОВ, а так же углы АОС и ДОВ– вертикальные. Углы АОД и ДОВ– смежные.
Свойство вертикальных углов***:*** *Вертикальные углы равны*.
Справедливость этого свойства вытекает из определения вертикальных углов и свойства смежных углов.

Параллельные и перпендикулярные прямые

<u>Определение.</u> Две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются.
Обозначают: а||в.

Признаки параллельности прямых:
1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.
2. Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Справедливо утверждение обратное второму признаку параллельности прямых: если две параллельные прямые пересечены третьей, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма односторонних углов равна 180°.
Важное свойство параллельных прямых раскрывается в *<u>теореме Фалеса</u>:* если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

<u>Определение.</u> Две прямые называются ***перпендикулярными,*** если они пересекаются под прямым углом.
Обозначают а⊥в.

Основные ***свойства перпендикулярных прямых***:
1. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую и при том только одну.
2. Из любой точки, не лежащей на данной на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.

Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярный данной, имеющей концом их точку пересечения. Конец этого отрезка называется основанием перпендикуляра.

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется расстоянием от этой точки до прямой (кратчайшим).

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой.

Тема «Геометрические фигуры, изучаемые в начальном курсе математики»

План:

1. ***Треугольники.***
2. ***Четырехугольники.***
3. ***Многоугольники.***
4. ***Окружность и круг.***

Треугольники

Треугольник- это одна из простейших геометрических фигур, но его изучение породило целую науку – тригонометрию; которая возникла из потребностей при изучении земельных участков, составлении карт местности, конструировании механизмов.

Первые упоминания о треугольнике и его свойствах содержится в египетских папирусах. Например, в них предлагается находить площадь равнобедренного треугольника как произведение половины основания на боковую сторону, хотя для любого равнобедренного треугольника с малым углом при вершине, противоположной к основанию такой способ дает приближенное значение площади.

Определение. ***Треугольником*** называется геометрическая фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков.

Любой треугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из треугольника и его внутренней области, также называют треугольником (или плоским треугольником).

В любом треугольнике выделяют следующие элементы : стороны, углы, высоты, биссектрисы, медианы, средние линии.

Углом треугольника АВС при вершине А называется угол, образованный полупрямыми АВ и АС.

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противоположную сторону.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Треугольники называются ***равными***, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны, при этом соответствующие углы должны лежать против соответствующих сторон.

Признаки равенства треугольников:

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми, а третья сторона– основанием треугольника.

Свойство равнобедренного треугольника: медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Отметим еще несколько важных свойств треугольника:

1. Сумма углов треугольника равна 180°. Из этого свойства следует, что в любом треугольнике хотя бы два угла острые.
2. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.
3. В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Для прямоугольного треугольника верна *теорема Пифагора*: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Для прямоугольного треугольника с углом 30° справедливо следующее свойство: катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Четырехугольники

Определение. ***Четырехугольником*** называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков, причем никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки– его сторонами.

Любой четырехугольник разделяет плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из четырехугольника и внутренней его области, также называют четырехугольником (плоским четырехугольником).

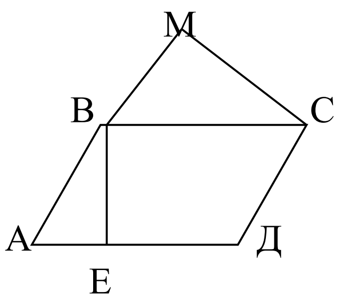
Вершины четырехугольника называют *соседними,* если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются ***диагоналями***.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются соседними. Стороны, не имеющие общего конца, называются противолежащими.

Четырехугольники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*. Среди выпуклых четырехугольников выделяют параллелограммы и трапеции.

Определение. ***Параллелограммом*** называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Пусть ABCD- параллелограмм. Из вершины B на прямую AD опустим перпендикуляр BE. Тогда отрезок BE называется высотой параллелограмма, соответствующей сторонам BC и AD. Отрезок CM– высота параллелограмма ABCD, соответствующая сторонам CD и AB.



Чтобы упростить распознавание параллелограмма, рассматривают следующий признак: если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник является параллелограммом.

Свойства параллелограмма :

1. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делят пополам.
2. У параллелограмма противолежащие стороны и противолежащие углы равны.

Определение. ***Трапецией*** называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны.

Эти две противоположные стороны называются *основаниями трапеции*.

Две другие стороны называются *боковыми.*

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции.*

Средняя линия обладает следующим свойством: она параллельна основаниям и равна их полусумме.

Из множества параллелограмма выделяют прямоугольники и ромбы.

Определение. ***Прямоугольником*** называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Исходя из этого определения можно доказать, что диагонали прямоугольника равны.

<u>Определение.</u> ***Ромбом*** называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Пользуясь этим определением можно доказать, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами его углов.

Из множества прямоугольников выделяют квадраты.

<u>Определение.</u> ***Квадратом*** называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

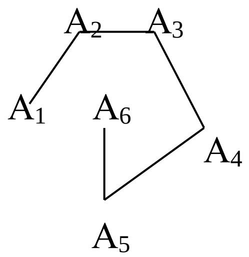
Так как стороны квадрата равны, то он является также ромбом. Следовательно, квадрат обладает свойствами прямоугольника и ромба.

Многоугольники

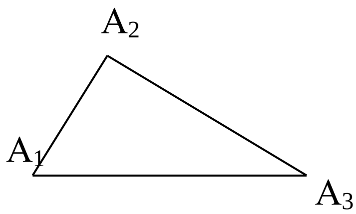
Обобщением понятия треугольников и четырехугольников является понятие многоугольников. Определяется оно через понятие ломанной.

Ломанной $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$.Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются вершиной ломанной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ –ее звеньями.

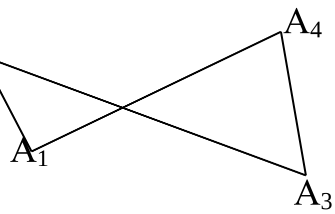
Если ломанная не имеет самопересечения, то она называется ***простой***. Если ее концы совпадают, то она называется ***замкнутой***.



Простая ломаная



простая замкнутая



замкнутая ломаная

Длиной ломанной называется сумма длин ее звеньев. Известно, что длина ломанной не меньше длинны отрезка, соединяющего ее концы.

<u>Определение.</u> ***Многоугольником*** называется простая замкнутая ломанная, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой.

Вершины ломанной называются вершинами многоугольника, а ее звенья– его сторонами. Отрезки, соединяющие несоседние вершины, называются диагоналями.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью многоугольника (или плоским многоугольником).

Различают *выпуклые* и *невыпуклые* многоугольники.

Выпуклый многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны и все углы равны.

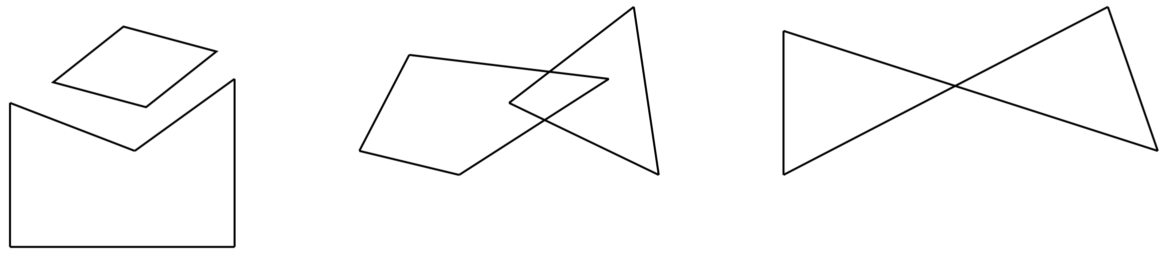
Правильным треугольником является равносторонний треугольник, правильный четырехугольник – квадрат и т. д.

Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образуемый его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Известно, что ***сумма углов выпуклого n-угольника равна 180°(n-2).***

В геометрии, кроме выпуклых и невыпуклых многоугольников, рассматривают многоугольные фигуры.

Определение. ***Многоугольной фигурой*** называется объединение конечного множества многоугольников.



Многоугольники, из которых состоит многоугольная фигура, могут не иметь общих внутренних точек и могут иметь общие внутренние точки.

Окружность и круг

Определение. ***Окружностью*** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называется ***радиусом*** окружности. Радиусом называется также расстояние от любой точки окружности до ее центра.

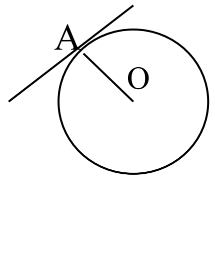
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется ***хордой.*** Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром***.

Определение. ***Кругом*** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии не больше данного от данной точки. Эта точка называется центром круга, а данное расстояние– радиусом круга.

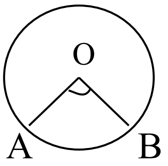
Границей круга является окружность с тем же радиусом и центром.

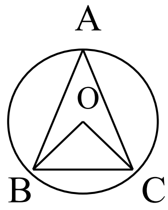
Говорят, что прямая и окружность касаются, если они не имеют единственную общую точку. Такую прямую называют ***касательной,*** а общую точку прямой и окружности – *точкой касания*.

Доказано, что если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Справедливо и обратное утверждение.



Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоскостного угла, называется ***дугой*** окружности, соответствующей этому центральному углу.

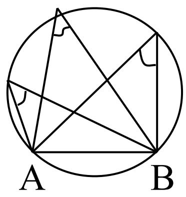




Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется ***вписанным в эту окружность***. Угол ВАС вписан в окружность. Говорят, также, что угол А опирается на хорду ВС. Прямая ВС разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той дуге, которая не содержит точку А, называется *центральным*, соответствующий данному вписанному углу.

Угол, вписанный в окружность, обладает следующим *свойством:* он равен половине соответствующего центрального угла.

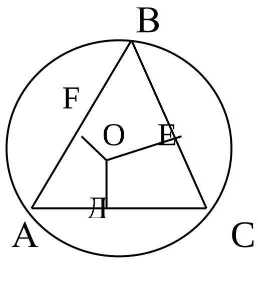
Из этого утверждения следует, что вписанные углы, стороны которых проходят через точки А и В, принадлежащие окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой АВ, равны. В частности, углы, опирающиеся на диаметр – прямые.

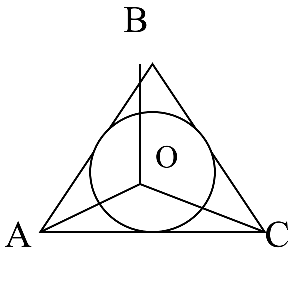


Окружность называется ***описанной*** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Чтобы описать окружность около треугольника надо найти ее центр. Правило его нахождения обосновывается следующей теоремой.

<u>ТЕОРЕМА.</u> Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к его сторонам, проведенных через середины этих сторон.





Окружность называется ***вписанной*** в треугольник, если она касается всех его сторон. Правило нахождения центра такой окружности обосновывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Из этих двух теорем следует, что биссектрисы треугольника пересекаются в центре вписанной окружности, а серединные перпендикуляры – в центре описанной.

Можно доказать, что медианы треугольника также, как и его высоты, пересекаются в одной точке. Точку пересечения медиан называют *центром тяжести* окружности, а точку пересечения высот – *ортоцентром.*

Таким образом, во всяком треугольнике существуют четыре точки, их называют *замечательными*: центр тяжести, центр описанной и вписанной окружности и ортоцентр, в котором пересекаются соответствующие элементы этого треугольника – медианы, биссектрисы, серединные перпендикуляры, высоты.

В связи с тем, что во всякий треугольник можно вписать окружность и возле всякого треугольника можно описать окружность, возникает вопрос: обладают ли аналогичным свойством четырехугольники? Оказывается, для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать или около него описать окружность, необходимо, чтобы он был правильным.

Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность, причем центры вписанной и описанной окружности совпадают.

Тема «Задачи на построение»

План:

1. ***Построение геометрических фигур.***
2. ***Элементарные задачи на построение.***
3. ***Этапы решения задачи на построение.***

Построение геометрических фигур

Одной из важных задач геометрии является построение фигур с заданными свойствами при помощи чертежных инструментов. Рассмотрим такие построения, которые можно выполнить только при помощи циркуля и линейки.

Задачи на построение –это самые древние математические задачи. Они помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений.

Учителю начальных классов эти знания и умения необходимы, так как при изучении геометрического материала можно приобщать детей к построению фигур с помощью циркуля и линейки, но делать это надо грамотно, с учетом правил решения задач на построение геометрии.

Существуют условия, которые надо соблюдать при построении фигур с помощью циркуля и линейки.

Циркуль – это инструмент, позволяющий построить:

- окружность, если построены ее центр и отрезок, равный радиусу (или его концы),
- любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены ее центр и концы этих дуг.

Линейка используется, как инструмент, позволяющий построить:

- отрезок, соединяющий две построенные точки,
- прямую, проходящую через две построенные точки,
- луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

С помощью циркуля и линейки можно также изобразить:

- любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют,
- точку, заведомо не принадлежащую какой- либо построенной фигуре,
- точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре.

Элементарные задачи на построение

С помощью основных построений решаются некоторые задачи, достаточно простые и часто встречающиеся при решении других более сложных. Такие задачи считаются *элементарными* и описание их решения, если они встречаются при решении более сложных, не дается. Выбор элементарных задач является условным.

Задача на построение считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

Рассмотрим некоторые элементарные задачи на построение.

ЗАДАЧА 1. Построить на данной прямой отрезок CD, равный данному отрезку AB.

Возможность такого построения вытекает из аксиомы откладывания отрезка. С помощью циркуля и линейки оно осуществляется следующим образом. Пусть даны прямая *a* и отрезок AB. Отмечаем на прямой точку C и строим с центром в точке C окружность радиусом AB. Точку пересечения окружности с прямой *a* обозначаем D. Получаем отрезок CD, равный AB.

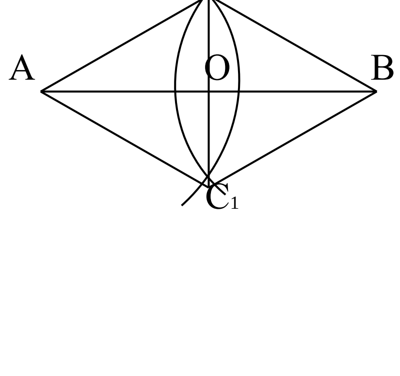
ЗАДАЧА 2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

Пусть даны угол A и полупрямая с начальной точкой O. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Точки пересечения окружности со сторонами угла обозначим B и C. Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O. Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B’. Опишем окружность с центром B’ и радиусом BC. Точка C’ пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла.

Построенный угол B’OC’ равен углу BAC, так как это соответствующие углы равных треугольников ABC и B’OC’.

ЗАДАЧА 3. Найти середину отрезка.

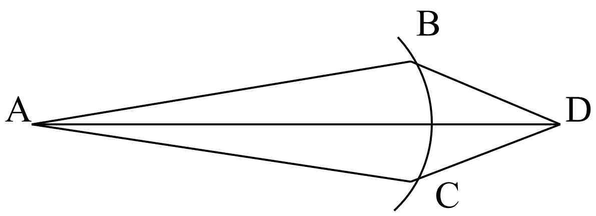
Пусть AB – данный отрезок. Построим две окружности одного радиуса с центрами A и B. Они пересекаются в точках C и C', лежащих в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Проведем прямую CC'. Она пересечет прямую AB в точке O. Эта точка и есть середина отрезка AB.



Действительно, треугольники CAC' и CBC' равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов ACO и OCB. Значит, отрезок CO является биссектрисой равнобедренного треугольника ACB и, следовательно его медианой, то есть точка O – середина отрезка AB.

ЗАДАЧА 4. Построить биссектрису данного угла.

Из вершины A данного угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса. Пусть B и C- точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C описываем окружности одного радиуса. Пусть Д– точка их пересечения, отличная от A. Тогда полупрямая AD и есть биссектриса угла A. Докажем это. Для этого рассмотрим треугольники ABD и ACD. Они равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство соответствующих углов DAB и DAC, то есть луч AD делит угол BAC пополам и, следовательно, является биссектрисой.



ЗАДАЧА 5. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

Пусть даны точка O и прямая *a*. Возможно 2 случая:

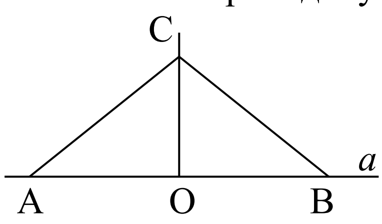
1)точка O лежит на прямой *a*,

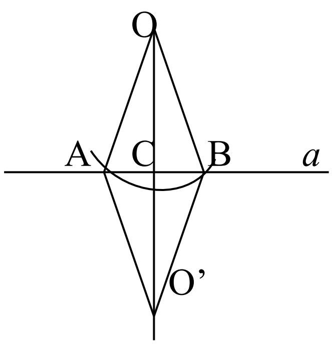
2)точка O не лежит на прямой *a*.

В первом случае построение выполняется также, как и в задаче 4, потому что перпендикуляр из точки O, лежащей на прямой, – это биссектриса развернутого угла.

Во втором случае из точки O как из центра проводим окружность, пересекающую прямую *a*, а затем из точек A и B тем же радиусом проводим еще две окружности. Пусть O' – точка их пересечения, лежащая в полуплоскости отличной от той, в которой лежит точка O. Прямая OO' и есть перпендикуляр к данной прямой *a*. Докажем это.

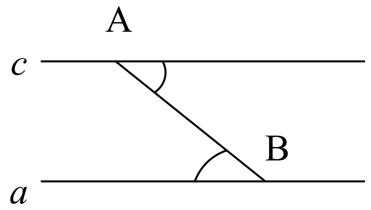
Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO' . Треугольники AOB и AO'B равны по трем сторонам. Поэтому угол AOC равен углу O'AC и, значит, треугольники AOC и O'AC равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда их углы ACO и ACO' равны. А так как углы смежные, то они прямые, то есть OC– перпендикуляр к прямой *a*.





ЗАДАЧА 6. Через данную точку провести прямую, параллельную данной.

Пусть даны прямая *a* и точка А вне этой прямой. Возьмем на прямой *a* какую-нибудь точку В и соединим ее с точкой А. Через точку А проведем прямую *c* , образующую с АВ такой же угол, какой АВ образуют с данной прямой *a*, но на противоположной стороне от АВ. Построенная прямая будет параллельна прямой *a,* что следует из равенства накрест лежащих углов, образованных при пересечении прямых *a* и *c* секущей АВ.



Этапы решения задачи на построение

Решение задачи на построение обычно включает четыре этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1. Анализ.

На этом этапе осуществляется поиск решения задачи. Его конечная цель– установление последовательности, алгоритма, состоящего из основных или элементарных построений, приводящих к построению искомой фигуры. Как и решение геометрической задачи на вычисление и доказательство, поиск такого алгоритма сопровождается чертежом, иллюстрацией, помогающими установить связи и зависимости между данными и искомыми фигурами.

2. Построение.

Этот этап решения представляет собой непосредственную реализацию на чертеже найденного алгоритма с помощью выбранных инструментов построения.

3. Доказательство.

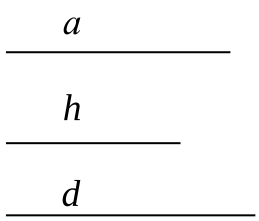
Его цель – доказательство того, что построенная на предыдущем этапе фигура действительно искомая, т.е. удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

4. Исследование.

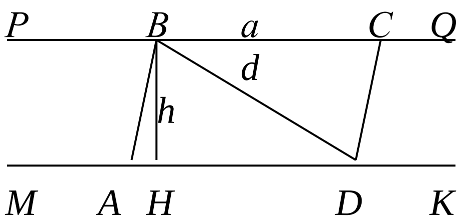
Этот этап решения состоит в выяснении того, всегда ли задача имеет решение. Если не всегда, то при каких конкретных данных и сколько именно решений она имеет. При этом разными считаются решения, дающие не равные фигуры (или если и равные , то различно расположенные относительно фигуры, с которой связывалось построение).

Проиллюстрируем эти этапы на конкретном примере.

<u>Задача.</u> Построить параллелограмм по основанию *a* , высоте *h* и одной из диагоналей *d*.



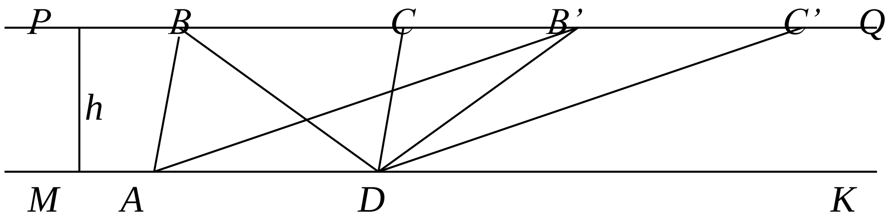
1. *Анализ*. Выполним чертеж-иллюстрацию, считая, что искомый параллелограмм АВСД уже построен. Отмечаем на чертеже данные элементы ВС = *a*, ВН=*h*, ВД= *d*. Устанавливаем связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отмечаем, что противоположные стороны АД и ВС лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте *h* . Поэтому можно построить треугольник АВД и затем достроить его до параллелограмма АВСД.



Получим следующий алгоритм построения искомой фигуры:

2. Построение. Все этапы построения выполняем циркулем и линейкой непосредственно на чертеже с использованием заданных элементов.

1. Строим параллельные прямые МК и PQ на расстоянии *h* друг от друга.
2. На прямой МК откладываем отрезок AD= *a*.
3. Из точки D, как из центра, радиусом *d* проводим окружность и находим точку В ее пересечения с прямой PQ.
4. На луче BQ откладываем отрезок ВС= *a*.
5. Строим отрезки АВ и СД.



3. Доказательство. Рассмотрим четырехугольник АВСД. Его противоположные стороны АД и ВС параллельны, т.к. лежат на параллельных прямых МК и PQ. Эти же стороны равны по построению АД=ВС= *a*. Значит, АВСД – параллелограмм, у которого АД= *a*, ВД= *d*, а высота равна *h,* т.к . расстояние между параллельными прямыми МК и PQ равно *h* (по построению). Следовательно, АВСД – искомый параллелограмм.

4. Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма АВСД непосредственно по шагам алгоритма построения.

1. Параллельные прямые МК и PQ на расстоянии h всегда можно построить, и притом единственным образом.
2. Построить отрезок AD = a на прямой МК также всегда можно, и притом единственным образом.
3. Окружность, проведенная из центра D радиусом d, будет иметь общие точки с прямой PQ только тогда, когда $d \geq h$; если $d = h$, то получится одна общая точка В, если же $d > h$, то две общие точки В и В'.

4,5. Эти построения всегда однозначно выполнимы.

Таким образом, решение возможно, если $d \geq h$. Если $d = h$, то задача имеет единственное решение, если же $d > h$, то два решения.

Тема «Преобразование геометрических фигур»

План:

1. ***Понятие преобразования.***
2. ***Симметрия относительно точки.***
3. ***Симметрия относительно прямой.***
4. ***Гомотетия.***
5. ***Движение и равенство фигур.***

Понятие преобразования

Главной задачей геометрии является обоснование правил построения фигур с заданными свойствами, но при построении используется понятие равенство фигур, определить которое можно через понятие преобразования.

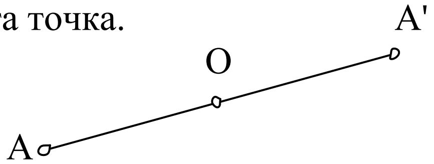
Пусть задана некоторая фигура F и каждой точке фигуры F поставлено в соответствие единственная точка плоскости. Множество точек, сопоставленных точками фигуры F, является некоторой фигурой F', отличной от F. Говорят, что фигура F' получена преобразованием фигуры F. Можно сказать также, что фигура F' является *образом* фигуры F для данного преобразования, а фигура F – прообразом фигуры F'.

Если A'– точка фигуры F', соответствующая точке A фигуры F, то говорят, что A'– образ точки A, а точка A– прообраз точки A'.

Преобразования, изучаемые в геометрии, как правило, являются взаимнооднозначными, т.е. такими, при которых разным точкам фигуры соответствуют разные образы. Простейший случай взаимно однозначного преобразования – это преобразование, при котором каждой точке A фигуры F ставится в соответствии эта же точка, т. е. образом фигуры F является сама эта фигура. Такое преобразование называется тождественным преобразованием.
Рассмотрим примеры преобразование фигур.

Симметрия относительно точки (центральная симметрия)

Пусть O– фиксированная точка и A –произвольная точка плоскости. Точка A' называется симметричной точке A относительно точки O, если точки A, O, A' лежат на одной прямой и AO = OA'. Точка, симметричная точке O, есть сама эта точка.

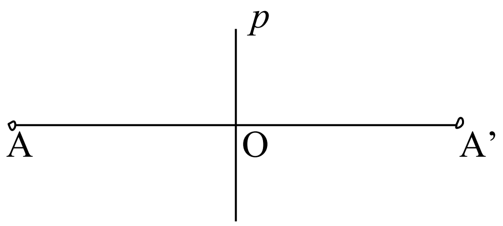


Пусть F –данная фигура и O –фиксированная точка плоскости . Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка A фигуры F переходит в точку A' фигуры F', симметричную A относительно точки O, называется преобразованием симметрии относительно точки O.
(Задание! Самостоятельно выполнить преобразование треугольника ABC в симметричный ему треугольник относительно точки O.)

Если преобразование симметрии относительно точки О переводит фигуру в себя, то фигура называется центрально симметричной , а точка О – ее центром симметрии. Например, центрально симметричными являются параллелограмм (центр симметрии – точка пересечения диагоналей), окружность с центром в точке О.

Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)

Пусть *p*– фиксированная прямая. Тогда A' – называется симметричной точке A относительно прямой *p*, если прямая AA' перпендикулярна прямой *p* и OA'=OA, где O – точка пересечения прямых AA' и *p*.



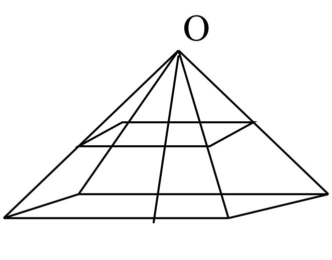
Если точка A лежит на прямой *p*, то симметричная ей точка есть сама точка A. Точка, симметричная точке A', есть точка A.

Пусть F –данная фигура и *p* –фиксированная прямая. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка A фигуры F переходит в точку A' фигуры F', симметричную A относительно прямой *p*, называется преобразованием симметрии относительно прямой *p*. При этом фигуры F и F' называются симметричными относительно прямой *p.*
(Задание! Самостоятельно выполнить преобразование треугольника ABC в симметричный ему треугольник относительно прямой *p*).

Если преобразование симметрии относительно прямой р переводит фигуру в себя, то фигура называется симметричной относительно прямой, а прямая р – ось симметрии фигуры. Например, осями симметрии прямоугольника являются прямые, проходящие через точку пересечения его диагоналей параллельно сторонам.

Гомотетия

Пусть F– данная фигура и O – фиксированная точка. Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k\cdot$OX, где *k*– положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в такую точку X', что OX'= $k\cdot$OX, называется гомотетией относительно центра O. Число *k* называется коэффициентом гомотетии. Фигуры F и F' называются гомотетичными.



A B C
X D
A’ B’ C’
X’ D’

При k=1 гомотетия является тождественным преобразованием, при k= –1 – центральной симметрией. Гомотетия сохраняет величину угла.

Движение и равенство фигур

Из различных преобразований фигур самыми важными являются такие, при которых сохраняются все их свойства: расстояние между точками, углы, параллельность отрезков, площади и т.д. Оказывается, что для этого достаточно сохранения расстояния между точками данной фигуры.

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F’, которое сохраняет расстояние между точками, называется ***движением*** фигуры F.

Движение сопоставляет любым точкам A и B фигуры F такие точки A’ и B’ фигуры F’ , что AB=A’B’. В геометрии доказано, что такие преобразования, как центральная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос, поворот вокруг точки на данный угол, являются движениями.

Свойства движения:
1. При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
2. Отрезок движением переводится в отрезок, луч переходит в луч, прямая – в прямую.
3. Треугольник движением переводится в треугольник.
4. Движение сохраняет величины углов.
5. Преобразование, обратное движению, также является движением.

Определение. ***Фигура F равна фигуре F’***, если фигуру F’ можно получить некоторым движением фигуры F.

Через понятие взаимно однозначного соответствия это определение формулируется так: фигуры F и F’ называются ***равными,*** если между их точками существует такое взаимно однозначное соответствие, что отрезки, соединяющие соответственные точки, равны.

Устанавливая равенство отрезков, углов, треугольников и других фигур необязательно преобразовывать одну фигуру в другую, достаточно сравнить те размеры фигур, которые их однозначно определяют. Например, у треугольников сравнить длины сторон.

Когда же рассматривают произвольные фигуры, необходимо определение их равенства через движение.

Равенство фигур рефлексивно, симметрично, транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. Поэтому это отношение порождает на множестве геометрических фигур классы эквивалентности, содержащие равные между собой фигуры. Такие фигуры неразличимы и их можно принять за одну и ту же фигуру. Поэтому задача построения прямоугольника по двум сторонам *а* и *в* имеет единственное решение.

Движение, которое каждую точку фигуры F переводит в точку этой же фигуры, называют ***преобразованием симметрии данной фигуры.***

В геометрии рассматривают ***осевую, поворотную и переносную*** симметрию.

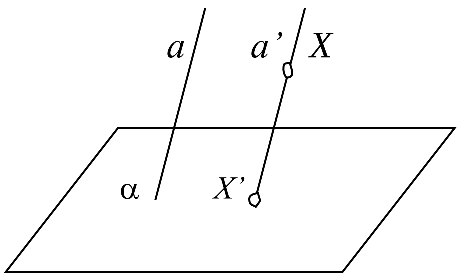
Тема «Изображение пространственных фигур на плоскости»
План:

1. ***Параллельное проектирование и его свойства.***
2. ***Многогранники и их изображение***
3. ***Шар, цилиндр, конус и их изображение***

При изучении геометрии в начальной школе учащиеся часто знакомятся с пространственными фигурами: кубом, прямоугольным параллелепипедом, пирамидой, шаром, цилиндром, конусом. Эти фигуры являются важнейшими объектами геометрии в пространстве, называемой стереометрией. Чтобы облегчить изучение их свойств, пространственные тела изображают на плоскости, используя при этом правила параллельного проектирования. Т.к. ознакомление младших школьников с пространственными фигурами так же связано с их изображением на плоскости, то учителям начальных классов надо знать эти правила и уметь правильно изображать на листе бумаги (доске) куб, шар, пирамиду и другие геометрические тела.

Параллельное проектирование и его свойства

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая *a*. Возьмем в пространстве произвольную точку Х, не принадлежащую прямой *a*, и проведем через Х прямую *a'* , параллельную *a*. Прямая *a'* пересекает плоскость в некоторой точке Х', которая называется ***параллельной проекцией точки Х на плоскость*** α.



Если точка Х лежит на прямой *a*, то ее параллельной проекцией Х' является точка, в которой прямая *а* пересекает плоскость α.

Если точка Х принадлежит плоскости α, то точка Х' совпадает с точкой Х.

Таким образом, если задана плоскость α и пересекающая ее прямая *a*, то каждой точке Х пространства можно поставить в соответствие единственную точку Х'– параллельную проекцию точки Х на плоскости α. Плоскость α называется *плоскостью проекций*. О прямой *а* говорят, что она задает *направление проектирования*– при замене прямой *а* любой другой параллельной ей прямой результат проектирования не изменится. Все прямые, параллельные прямой *a,* задают одно и тоже направление проектирования и называются вместе с прямой *a* проектирующими прямыми.

Проекцией фигуры F называется множеством фигур F' проекцией всех ее точек. Отображение, сопоставляющее которой точке Х фигуры F ее параллельную проекцию– точку X’ фигуры F’, называется *параллельным проектированием фигуры F*.

Параллельной проекцией реального предмета является его тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, т.к. солнечные лучи можно считать параллельными.

Свойства параллельного проектирования:

Теорема. При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, и для лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:

1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.
2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.

Следствие: при параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.

При изображении геометрических тел на плоскости необходимо следить за тем, чтобы указанные свойства выполнялись. В остальном оно может быть произвольным. Например, углы и отношения длин непараллельных отрезков могут изменяться произвольно, т.е. треугольник при параллельном проектировании изображается произвольным треугольником. Но если треугольник равносторонний, то на проекции его медиана должна соединять вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Многогранники и их изображение

Многогранник – это ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от каждого из ограничивающих его многоугольников. Многоугольник на поверхности многогранника называется его *гранью*. Стороны граней называются *ребрами* многогранника, а вершины граней – *вершинами многогранника*.

Простейшие многогранники – это призма и пирамида.

Призмой называется многогранник, у которого две грани, называемые основаниями призмы, равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.

Призма называется *прямой,* если ее боковые ребра перпендикулярны основанию.

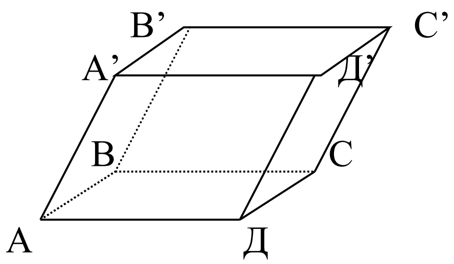
Прямая призма называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник.

Призма, у которой основание – параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Параллелепипед называется *прямоугольным,* если все его грани – прямоугольники.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, т.е. все грани которого – квадраты.

Изобразим наклонную призму, основанием которой является квадрат.



Построение:

1. Строим нижнее основание призмы (можно верхнее). Оно изобразится произвольным параллелограммом АВСД.
2. Так как ребра призмы параллельны, строим параллельные прямые, проходящие через вершины параллелограмма и откладываем на них равные отрезки АА’, ВВ’, СС’, ДД’, длина которых произвольна.
3. Соединяем последовательно точки А’,В’, С’, Д’.

(Задание! Самостоятельно выполнить построение прямой призмы, основанием которой являются квадраты.)

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (основание) – какой-нибудь многоугольник, а остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной.

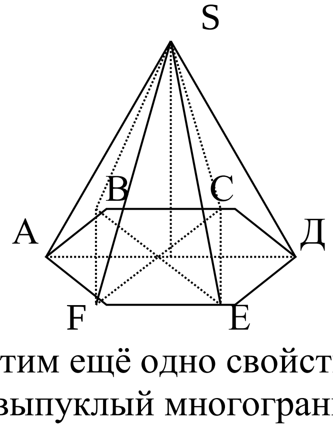
Общую вершину боковых граней называют *вершиной* пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также длина этого перпендикуляра называется *высотой* пирамиды.

Простейшая пирамида – треугольная (или тетраэдр). У нее 4 грани. Любая ее грань может считаться основанием.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник и высота проходит через центр этого многоугольника.

Чтобы изобразит правильную пирамиду, сначала чертят правильный многоугольник, лежащий в основании, и его центр – точку О. Затем проводят вертикальный отрезок OS, изображающий высоту пирамиды. И точку S соединяют со всеми вершинами основания.

(Задание! Самостоятельно построить изображение правильной пирамиды, основание которой является правильный шестиугольник).



Отметим ещё одно свойство многогранников, установленное Л.Эйлером. Пусть дан выпуклый многогранник и *в*– число его вершин, *р* – число ребер, *r* – число граней. Тогда ***в–р+r =2*** для любого выпуклого многогранника.

На основании теоремы Эйлера можно заключить, что существуют только пять видов правильных многогранников, т.е. таких выпуклых многогранников, у которых все грани – равные друг другу правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Это тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр. (см. на стенде в каб. № 9)

Шар, цилиндр, конус и их изображение

Поверхность шара называется *сферой*.

Сферой называется множество точек пространства, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется *центром* сферы, а данное расстояние – ее *радиусом.*

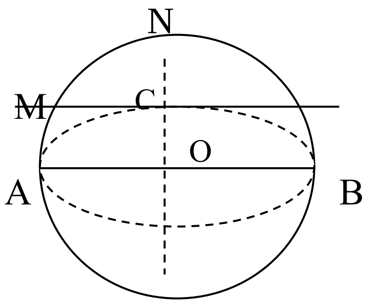
Шаром называется множество точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем некоторого данного положительного расстояния. Данная точка– это *центр* шара, а данное расстояние – *радиус* шара.

Радиусом шара и сферы называют также любой отрезок, соединяющий их центр с точкой на сфере.

Диаметр шара и сферы– это любой отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, а также длина этого отрезка.

Если шар пересечь плоскостью, проходящей через его центр, то пересечением будет круг, радиус которого совпадает с радиусом шара. Этот круг называют *большим кругом*, а его окружность – *большой окружностью* или *экватором.*

При параллельном проектировании шар изображается в виде круга того же радиуса. Чтобы сделать изображение шара более наглядным, рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности, плоскость которой не перпендикулярна плоскости проекции. Эта проекция будет эллипсом. Центр шара изобразится центром этого эллипса.

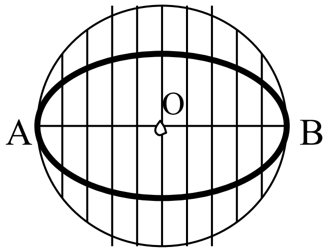


Теперь можно найти соответствующие полюсы N и S при условии, что отрезок, их соединяющий, перпендикулярен плоскости экватора. Для этого через точку O проводим прямую, перпендикулярную AB, и отмечаем точку C – пересечения этой прямой с эллипсом, затем через точку C проводим касательную к эллипсу, изображающему экватор. Доказано, что расстояние CM равно расстоянию от центра шара до каждого из полюсов. Поэтому, отложив отрезки ON и OS, равные CM, получим полюсы N и S.

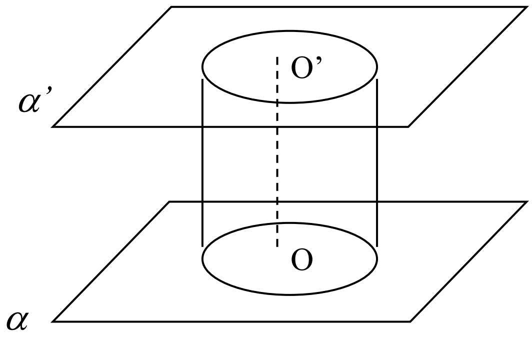
Один из *приемов построения эллипса*:

1) строят окружность с диаметром и проводят хорды, перпендикулярные диаметру,
2) половину каждой из хорд делят пополам,

3) полученные точки соединяют плавной линией.



Прямой круговой цилиндр – это геометрическое тело, образованное заключенными между двумя параллельным плоскостями отрезками всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей, и перпендикулярных плоскостям оснований.



Радиусом цилиндра называется радиус окружности его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Его *осью* называется прямая, проходящая через центры окружностей оснований.

Конусом называется тело, образованное всеми отрезками, соединяющими данную точку – его вершину – с точками некоторого круга – основания конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются его *образующими*.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая его вершину с центром окружности основания, перпендикулярна основанию.

Высотой конуса называется расстояние от его вершины до основания.

Прямой круговой конус изображают так:

1. Стоят эллипс – основание конуса,
2. Находят центр основания – точку O и перпендикулярно проводят отрезок OS– высота конуса,
3. Из точки S проводят к эллипсу касательные и выделяют отрезки SC и SD этих прямых от точки S до точек касания C и D.