<u>СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ</u>

1. Понятие системы счисления

Человеку очень часто приходится иметь дело с числами, поэтому нужно уметь правильно называть и записывать любое число, производить действия над числами.

Здесь помогает способ записи чисел, который в настоящее время используется повсеместно и носит название **десятичной системой счисления.** В этой системе алфавитом служат десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Изучение этой системы начинается в начальных классах и учителю нужны определенные знания в этой области, он должен знать различные способы записи чисел, алгоритмы арифметических действий и их обоснование.

Понятие числа возникло в глубокой древности, тогда же возникла и необходимость в названии и записи чисел.

<u>Определение.</u> Система счисления - язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними.

Называть числа и вести счет люди научились еще до появления письменности. В этом им помогали пальцы рук и ног. Издревле употреблялся вид инструментального счета – деревянные палочки с зарубками, шнуры и веревки с узлами. Веревочные счеты употреблялись в России и во многих других странах Европы. Этот способ был не слишком удобным, поэтому возникли другие, более экономные записи чисел: счет стали вести группами, состоящими из одинакового числа элементов. Наряду с группами по 10 элементов встречаются группы по 5,12,20 элементов. В Древнем Вавилоне считали группами по 60 единиц. Древневавилонская система используется до сих пор при измерении времени и углов в минутах и секундах. Наибольшее распространение получила десятичная система записи чисел. Эта система, принятая почти везде, основана на группировки десятками и берет свое начало от счета на пальцах. Десятичная система счисления возникла в Индии в VI веке. Первыми заимствовали у индийцев десятичную систему счисления арабы. Европейцы познакомились с ней в XI веке.

Распространение десятичной системы в России способствовала книга первого русского педагога-математика Л. Д. Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная», вышедшая в 1703 году на славянском языке. Она являлась энциклопедией математических знаний того времени.

2. Позиционные и непозиционные системы счисления

Позиционная система – это такая система, в которой один и тот же знак может означать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Пример: 60-ричная вавилонская, десятичная, двоичная системы счисления.

Непозиционные системы – характеризуются тем, что каждый знак всегда обозначает одно и то же число, независимо от позиции, занимаемого этим знаком в записи числа.

Примером такой системы служит римская система, возникшая в средние века. В ней имеются знаки для узловых чисел: 1-I, 5-V, 10-X, 50-L, 100-C, 500-D, 1000-M. Все остальные числа получаются при помощи 2 арифметических операций: сложения и вычитания. Вычитание производится, когда знак, соответствующий меньшему узловому числу, стоит перед знаком большего узлового числа. Например, IV-4, XC-90, 193= 100 (C)+ 90 (XC)+ 3 (III) = CXCIII.

Если число содержит несколько тысяч, то для его записи в римской нумерации пользуются повторением знака М. Вообще числа 4,5,6-значные записывались с помощью буквы m , слева от которой записывались тысячи, а справа– сотни, десятки, единицы.

В России до 17 века в основном употреблялась славянская нумерация, более стройная и удобная, чем римская, но тоже непозиционная. В ней числа обозначали буквы славянского алфавита (кириллицы), над которыми для отличия ставили особый знак –титло. Естественно такие системы записи чисел, как римская и славянская были удобнее зарубок, т.к. позволяли записывать большие числа, но выполнение действий над ними в таких системах было весьма сложным делом, поэтому на смену им пришла десятичная система счисления.

3. Запись и название чисел в десятичной системе счисления

Современная десятичная система счисления берет свое начало в Индии, хотя уже в Древнем Вавилоне и Китае были созданы позиционные нумерации, не получившие завершения по ряду причин.

В десятичной системе счисления для записи чисел используется 10 цифр: 0, 1, 2, … , 9. Из них образуются конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел.

Например, последовательность 3745 является краткой записью числа $3*10^3 + 7*10^2 + 4*10 + 5$.

Определение. Десятичной записью натурального числа x называется его представление в виде: $x = a_n*10^n + a_{n-1}*10^{n-1} + \dots + a_1*10^1 + a_0$, где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, … , 8, 9 и $a_n \neq 0$.

Сумму $a_n*10^n + a_{n-1}*10^{n-1} + \dots + a_1*10^1 + a_0$ в краткой форме принято записывать так $\overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0}$.

Так как понятие числа и его записи нетождественны, то существование и единственность десятичной записи натурального числа надо доказывать.

Теорема 1.

Любое натуральное число x можно представить в виде $x = a_n*10^n + a_{n-1}*10^{n-1} + \dots + a_1*10^1 + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ принимают значения 0, 1, … , 8, 9 , и такая запись единственна.

Доказать самостоятельно!

Теорема № 2.

Пусть x и y– натуральные числа, запись которых дана в десятичной системе счисления:

$x= a_n*10^n + a_{n-1}*10^{n-1} + \dots + a_1*10^1 + a_0$

$y=в_m*10^m + в_{m-1}*10^{m-1} + \dots + в_1*10^1 + в_0$.

Тогда $x<y$, если выполнено одно из условий:

1. $n < m$;
2. $n = m$, но $a_n < в_n$;
3. $n = m$, $a_n = в_n$, … , $a_k = в_k$, но $a_{k-1} < в_{k-1}$.

Доказать самостоятельно!

Например, если x= 345, y=4678, то $x<y$, т.к. первое число - трехзначное, а второе– четырехзначное;

Если x=345, y=467,то $x< y$,т.к. в первом из них меньше сотен;

Если x=3456, y=3467, то $x<y$, т.к. несмотря на число сотен и тысяч (одинаково), десятков в числе x меньше, чем в y.

Если натуральное число x представлено в виде $x= a_n*10^{n} + a_{n-1}*10^{n-1} + \ldots + a_1*10^1 + a_0$, то числа $1, 10, 10^2, \ldots , 10^{n}$ называют разрядными единицами соответственно первого, второго, … , n+1 разряда, причем 10 единиц одного разряда составляют единицу следующего высшего разряда, т. е. отношение в соседних разрядах равно 10 –это *основание системы счисления.*

Три первых разряда в записи числа соединяют в одну группу и называют *первым классом* (десятки, сотни, тысячи) или **классом единиц.** В первый класс входят единицы, десятки, сотни.

Четвертый, пятый, шестой разряды в записи числа образуют *второй класс* – **класс тысяч**, в него входят единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Затем следует *третий класс* – **класс миллионов**, состоящий из трех разрядов, т. е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов.

Последующие разряды тоже образуют новый класс. Выделение класса единиц, тысяч, миллионов и т.д. создает удобства для записи и прочтения чисел.

В десятичной системе счисления всем числам можно дать название (имя)- это достигается следующим образом: имеются названия первых $10^{ти}$ чисел, затем в них в соответствии с определением десятичной записи и путем прибавления еще немногих слов образуются названия последующих чисел. Так, числа $2^{го}$ десятка образуются из соединения первых десяти названий и несколько измененного слова десять («дцать»).

Числа третьего десятка получаются путем прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка.

Продолжая далее счет, получим название чисел четвертого, пятого, …, десятого десятков. Названия этих чисел образуются также в пределах $3^{го}$ десятка, только в трех случаях появляются новые слова: 40, 90, 100.

Названия чисел второй сотни составляется из слова 100 и названием чисел первого и последующих десятков. Таким образом образуются наименования “сто один” , “ сто пятьдесят” и т.д. Отсчитав новую сотню, будем иметь две сотни, которые для краткости называются 200. Для получения чисел, больших 200, снова воспользуемся названиями чисел $1^{го}$ и последующих десятков, присоединяя их к слову 200. Затем получаем особые названия 300, 400 и до тех пор, пока не отсчитаем 10 сотен, которые носят название “***тысяча***”.

Счет за пределами 1000 ведется путем прибавления к 1000 по единице, затем получаем 2000, 3000 и когда же отсчитаем тысячу тысяч, получим ***миллион.*** Затем и т.д. до ***миллиарда*** (биллиона).

В вычислениях миллион принято записывать 10^6, миллиард – 10^9, ***триллион*** – 10^{12}, ***квадриллион*** – 10^{15} и т.д.

Таким образом, для того чтобы назвать все натуральные числа в пределах миллиарда, употребляются только 16 различных слов: 1, 2, … ,10, 40, 90, 100, 1000, миллион, миллиард, а остальные числа образуются из основных.

Вопросы наименований и записи чисел рассматриваются в начальном курсе математики в разделе “Нумерация”. При этом десятичной записью натурального числа считают его представление в виде суммы разрядных слагаемых. Например, 3000 + 700 + 40 + 5 = 3745.

Алгоритмы арифметических действий над целыми неотрицательными числами в десятичной системе счисления

4. Алгоритм сложения

Сложение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия, но чтобы всякий раз не обращаться к определению все слагаемые, которые получаются при сложении однозначных чисел, записываются в особую таблицу, называемую **таблица сложения однозначных чисел.**

Смысл сложения сохраняется для многозначных чисел, но практическое выполнение сложения происходит по особым правилам: сумму многозначных чисел обычно находят, выполняя сложение столбиком. Например,

$$\begin{array}{r} 341 \\ +\,7238 \\ \hline 7579. \end{array}$$

Выясним, как возникает этот алгоритм и какие теоретические положения лежат в его основе.

Представим слагаемое 341 и 7238 в виде суммы степеней десяти с коэффициентами:

$341 + 7238 = (3*10^2 + 4*10 + 1) + (7*10^3 +2*10^2 + 3*10 +8)$.

Раскроем скобки, поменяем местами и сгруппируем слагаемые так, чтобы единицы оказались с единицами, десятки с десятками и т. д. Это можно сделать на основании свойств сложения: ассоциативного и коммутативного. Поменяем местами слагаемые, т.е. $7*10^3 + 3*10^2 + 2*10^2 + 4*10 + 3*10 + 1 + 8$. Согласно свойству ассоциативности, сгруппируем $7*10^3 + (3*10^2 + 2*10^2) + (4*10 + 3*10) + (1+ 8)$. Вынесем за скобки 10^2 и 10- это возможно по свойству дистрибутивности умножения относительно сложения:

$7*10^3 + (3+2)10^2 + (4+3)10 + (1+8) = 7*10^3 + 5*10^2 + 7*10 + 9$. Полученное выражение есть десятичная запись числа 7579.

Нетрудно убедиться в том, что в случае сложения чисел с переходом через десяток теоретические основы алгоритма сложения будут теми же.

Например, 748 + 436 = ($7*10^2 + 4*10 + 8$) + ($4*10^2 + 3*10 + 6$). Воспользуемся свойствами сложения дистрибутивности умножения относительно сложения: $(7+4) *10^2 + (4+3) *10 + (8+6)$. Суммы (7+4) и (8+6) больше 10, следовательно, последнее выражение не является десятичной записью числа. Необходимо сделать, так чтобы они были меньше 10. Для этого выполним следующие преобразования: $(8+6) = 1*10 + 4$ и, следовательно, $(7+4) *10^2 + (4+3) *10 + 1*10 + 4 = (7+4) *10^2 + (4+3+1) *10 +4$. Потом $7+4 =1*10 + 1$, получаем $(1*10 + 1)*10^2 + 8*10 + 4 =1*10^3 + 1*10^2 +8*10 + 4$. Это десятичная запись числа 1184.

В случае, когда десятичные записи слагаемых имеют разное количество цифр, надо приписать к числу, имеющему меньшее количество цифр, несколько нулей впереди, уровняв количество цифр в обоих слагаемых. После этого применяем описанный выше процесс сложения.

<u>Алгоритм сложения «столбиком»</u> натуральных чисел:

1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Складывают единицы первого разряда. Если сумма меньше 10, то ее записывают в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду (десятков).
3. Если сумма единиц больше или равна 10, то представляют ее в виде $a_0 + в_0 = 1*10 + c_0$, где c_0- однозначное число; записывают c_0 в разряд единиц ответа и прибавляется 1 к десяткам первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.
4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т. д. Процесс заканчивается, когда окажутся сложенными цифры старших разрядов. При этом, если их сумма больше или равно 10, то приписываем впереди обоих слагаемых нули, увеличиваем нуль перед первым слагаемым на 1 и выполняем сложение: 1+0 = 1.

5. Алгоритм вычитания

Вычитание однозначного числа b из однозначного или двухзначного числа a, не превышающего 18, сводится к поиску такого числа c, что $b+ c =a$, и происходит с учетом таблицы сложения однозначных чисел.

Если же числа a и b многозначные и $b<a$, то смысл действия вычитания остается тем же, что и в пределах 20, но техника нахождения разности становится иной: разность многозначных чисел чаще всего находят производя вычисление столбиком по определенному алгоритму. Выясним, каким образом возник этот алгоритм и какие теоретические факты лежат в его основе.

Рассмотрим разность чисел 485 и 231. Воспользуемся правилом записи чисел в десятичной системе счисления и представим данную разность в виде $485–231= (4*10^2 + 8*10 +5)–(2* 10^2 +3*10+1)$. Чтобы вычесть из числа $4*10^2+8*10+5$ сумму $2*10^2+3*10+1$, достаточно вычесть из него каждое слагаемое этой суммы одно за другим, получим $(4*10^2+8*10+5)–2*10^2–3*10–1$. Чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть его из какого- либо одного слагаемого. Поэтому число $2*10^2$ вычтем из слагаемого $4*10^2$, число $3*10$ –из $8*10$, а число 1 из 5. Тогда получим $(4*10^2–2*10^2)+(8*10–3*10)+(5–1)$. Воспользуемся дистрибутивностью умножения относительно вычитания и вынесем за скобки 10^2 и 10. Тогда $(4–2)*10^2+(8–3)*10+(5–1)$. Видим, что вычитание свелось к вычитанию однозначных чисел, изображенными цифрами соответствующих разрядов в записи трехзначных чисел. Разности (4-2), (8-3), (5-1) находим по таблице сложения и получаем $2*10^2+5*10+4=254$.

Таким образом, выражение $(4–2)*10^2+(8–3)*10+(5–1)$ задает правило вычитания, которое обычно выполняется столбиком:

$$\begin{array}{r} _{-}485 \\ 231 \\ \hline 254 \end{array}$$

Нетрудно убедится в том, что если в каком-нибудь разряде уменьшаемого стоит однозначное число, меньше числа в том же разряде вычитаемого, то в основе вычитания лежат те же теоретические факты и таблица сложения однозначных чисел. Например, $760– 326 =(7*10^2+6*10+0)–(3*10^2+2*10+6)$.

Поскольку из 0 нельзя вычитать 6, то выполнить вычитание аналогично первому случаю невозможно. Поэтому из числа 760 возьмем один десяток и представим его в виде 10 единиц, тогда $(7*10^2+5*10+10)–(3*10^2+2*10+6)$.

Воспользуемся правилами вычитания суммы из числа и числа из суммы, а так же дистрибутивностью умножения относительно вычитания, получим выражение $(7–3)*10^2+(5–2)*10+(10–6)$ или $4*10^2+3*10+4$. Это есть число 434.

<u>Алгоритм вычитания «столбиком» натуральных чисел</u>:

1. Записываем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствовали разряды находящиеся друг под другом.
2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, вычитаем её из цифры уменьшаемого, записываем разность в разряд единиц искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.
3. Если же цифра единиц вычитаемого больше единиц уменьшаемого, т.е. $b_0>a_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшаем цифру десятков уменьшаемого на единицу, одновременно увеличив цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитаем из числа $10+a_0$ число b_0 и записываем разность в разряде единиц искомого числа. Далее переходим к следующему разряду.
4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, стоящие в разряде десятков, сотен и т.д., уменьшаемого, равны нолю, то берём первую отличную от нуля цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшаем её на единицу, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличиваем на 9, а цифру в разряде единиц на 10: вычитаем b_0 из $10+a_0$, записываем разность в разряде единиц искомого числа и переходим к следующему разряду.
5. В следующем разряде повторяем описанный процесс.
6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

6. Алгоритм умножения

Умножение однозначных чисел можно выполнить, основываясь на определении этого действия. Но чтобы всякий раз не обращаться к определению, все произведения однозначных чисел записывают в особую таблицу умножения однозначных чисел и запоминают.

Смысл умножения сохраняется и для многозначных чисел, но меняется техника вычислений. Произведение многозначных чисел находят, выполняя умножение столбиком, по определенному алгоритму. Выясним, как возникает этот алгоритм и какие теоретические факты лежат в его основе.

Рассмотрим сначала умножение многозначного числа на однозначное. Умножим, например, 428 на 3.

$$\begin{array}{r} \times 428 \\ 3 \\ \hline 1284 \end{array}$$

$428 \cdot 3 = (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8) \cdot 3$.

На основании дистрибутивности умножения относительно сложения раскроем скобки: $(4 \cdot 10^2) \cdot 3 + (2 \cdot 10) \cdot 3 + 8 \cdot 3 = 12 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 24$. Коэффициенты перед степенями 10 должны быть меньше 10. Для этого представим число 12 в виде $1 \cdot 10 + 2$, а число 24 в виде $2 \cdot 10 + 4$. Затем в выражении $(1 \cdot 10 + 2) \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + (2 \cdot 10 + 4)$ раскроем скобки: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 4$. На основании ассоциативности сложения и дистрибутивности умножения относительно сложения сгруппируем слагаемые $6 \cdot 10$ и $2 \cdot 10$ и вынесем 10 за скобки: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6+2) \cdot 10 + 4 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$. Это есть десятичная запись числа 1284.

Алгоритм умножения «столбиком» многозначного числа x=$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на однозначное число y:

1. Записываем второе число под первым.
2. Умножаем цифры разряда единиц числа x на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду (десятков).
3. Если произведение цифр единиц числа x на число y больше или равно 10, то представляем его в виде $10q_1 + c_0$, где c_0– однозначное число; записываем c_0 в разряд единиц ответа и запоминаем q_1 –перенос в следующий разряд.
4. Умножаем цифры разряда десятков на число y, прибавляем к полученному произведению число q_1 и повторяем процесс, описанный в пп. 2 и 3.
5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Умножение числа x на число вида 10^k сводится к приписыванию к десятичной записи данного числа k нулей.

Умножение на число $y \cdot 10^k$, где y – однозначное число, сводится к умножению на однозначное число y и на число 10^k.

Рассмотрим алгоритм умножения многозначного числа на многозначное.

Умножим, например, 428 на 263.

$$\begin{array}{r} \times\ 428 \\ 263 \\ \hline 1284 \\ +\ 2568 \\ 856 \\ \hline 11\,2564 \end{array}$$

Алгоритм умножения «столбиком» числа $x=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ ***на число*** $y=\overline{в_m в_{m-1}\ldots в_1 в_0}$.

1. Записываем множитель x и под ним второй множитель y.
2. Умножаем число x на младший разряд $в_0$ числа y и записываем произведение $x\cdot в_0$ под числом y.
3. Умножаем число x на следующий разряд $в_1$ числа y и записываем произведение $x\cdot в_1$, но со сдвигом на один разряд влево, что соответствует умножению $x\cdot в_1$ на 10.
4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x\cdot в_k$.
5. Полученные $k+1$ произведения складываем.

7. Алгоритм деления

Процесс деления рассматривают как действие деления с остатком. Если на однозначное число делят однозначное или двузначное, то используется таблица умножения однозначных чисел. Например, частным чисел 54 и 9 будет число 6, так как 9·6=54. Если же надо разделить 51 на 9, то находят ближайшее к нему меньшее число, которое делится на 9 – это число 45, и, следовательно, неполным частным при делении 51 на 9 будет число 5. Чтобы найти остаток, надо 51– 45=6. Таким образом, 51=9·5+6.

Разделим трехзначное число на однозначное, например, 378 на 4.

Задание! (Самостоятельно рассмотреть какие теоретические факты лежат в основе деления уголком.)

$$\begin{array}{r|l} -378 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{36} & 94 \\ -18 & \\ \underline{16} & \\ 2 & \end{array}$$

Аналогично выполняется деление многозначного числа на многозначное.

Алгоритм деления «уголком» числа а на число в.

1. Если $a=в$, то частное q=1, остаток $r=0$.
2. Если $a>в$ и число разрядов в числах a и $в$ одинаково, то частное q находим перебором, последовательно умножая $в$ на 1,2,3,4,5,6,7,8,9, так как

$a < 10в$. Этот перебор можно ускорить, выполнив деление с остатком цифр старших разрядов чисел a и $в$.

3. Если $a > в$ и число разрядов в числе a больше, чем в числе $в$, то записываем делимое a и справа от него делитель $в$, который отделяем от a уголком и ведем поиск частного и остатка в такой последовательности:

а) Выделяем в числе a столько старших разрядов, сколько разрядов в числе $в$ или, если необходимо, на один разряд больше, но так, чтобы они образовывали число d_1, больше или равное $в$. Перебором находим частное q_1 чисел d_1 и $в$, последовательно умножая $в$ на 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Записываем q_1 под уголком (ниже $в$).

б) Умножаем $в$ на q_1 и записываем произведение под числом a так, чтобы младший разряд числа $в\,q_1$ был написан под младшим разрядом выделенного числа d_1.

в) Проводим черту под $в\,q_1$ и находим разность $r_1 = d_1 - в\,q_1$.

г) Записываем разность r_1 под числом $в\,q_1$, приписываем справа к r_1 старший разряд из неиспользованных разрядов делимого a и сравниваем полученное число d_2 с числом $в$.

д) Если полученное число d_2 больше или равно $в$, то относительно него поступаем согласно п.1 или п. 2. Частное q_2 записываем после q_1.

е) Если полученное число d_2 меньше $в$, то приписываем ещё столько следующих разрядов, сколько необходимо, чтобы получить первое число d_3 , большее или равное $в$. В этом случае записываем после q_1 такое же число нулей. Затем относительно d_3 поступаем согласно пп. 1,2. Частное q_2 записываем после нулей. Если при использовании младшего разряда числа a окажется, что $d_3 < в$, то тогда частное чисел d_3 и $в$ равно нулю, и этот нуль записывается последним разрядом к частному, а остаток $r = d_3$.

<u>Делимость натуральных чисел</u>

1. Понятие отношения делимости на множестве натуральных чисел

Вычитание и деление на множестве натуральных чисел выполнимо не всегда. Вопрос о существовании разности натуральных чисел a и $в$ решается просто– достаточно установить , что $в < a$. Для деления такого общего и простого признака нет. Поэтому в математической науке с давних пор пытались найти такие правила, которые позволили бы по записи числа a узнавать делится оно на число $в$ или нет, не выполняя непосредственного деление a на $в$. В результате этих поисков были открыты важные свойства чисел.

Делить одно натуральное число на другое натуральное число можно тремя способами, рассматривая «деление на равные части», «деление по содержанию» и «деление как действие, обратное к умножению». Все эти три подхода равносильны. Будем рассматривать только третий подход – деление как операция, обратная умножению.

В начальном курсе математики делимость натуральных чисел не изучается, но многие факты из этого раздела математики неявно используются. Например, изучают признаки делимости чисел на 2,3,5 и.т.д.

<u>Определение.</u> Пусть даны натуральные числа *а* и *в*. Говорят, что число *а* делится на число *в*, если существует такое натуральное число q, что $а=вq$.

В этом случае *в* называют *делителем числа а* **,** число *а* – *кратным* числа *в*. Например: 24 делится на 8, так как существует такое q =3, что 24=3*8. Можно сказать иначе: 8– это делитель числа 24, а 24 есть кратное числа 8.

Когда *а* делится на *в*, обозначают $а \vdots в$. Читают «*а* кратно *в*».

Понятие «делитель данного числа» следует отличать от понятия «делитель», обозначающего то число, на которое делят. Например, если 18 делят на 5, то 5–делитель, но 5 не является делителем 18. Если 18 делят на 6, то понятие «делитель» и «делитель данного числа» совпадают.

Число 1 является делителем любого натурального числа.

Выясним, сколько вообще делителей может быть у натурального числа *а*.

<u>ТЕОРЕМА.</u> Делитель *в* данного числа *а* не превышает этого числа, т.е. если $а \vdots в$, то $в \le а$.

Доказательство. Так как $а \vdots в$, то существует такое $q \in N$, что $а=вq$ и, значит, $а–в=вq–в=в(q–1)$. Поскольку $q \in N$, то $q \ge 1$. Тогда $в(q–1) \ge 0$ и, следовательно, $в \le а$.

Из данной теоремы следует , что *множество делителей данного числа не пусто и конечно*. Назовем, например, все делители числа 36. Они образуют конечное множество {1,2,3,4,6,9,12,18,36}.

<u>ТЕОРЕМА.</u> На 0 делить нельзя.

2. Свойства отношения делимости

Отношение делимости на множестве натуральных чисел обладает рядом свойств, в частности оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

<u>Теорема 1</u>.Отношение делимости рефлексивно, т.е. любое натуральное число делится само на себя.

Доказательство. Для любого натурального *а* справедливо равенство $а=а\cdot 1$. Т.к $1 \in N$,то по определению отношения делимости, $а \vdots а$.

<u>Теорема 2</u>. Отношение делимости антисимметрично, т.е если $а \vdots в$, и $а \ne в$, то *в* не делится на *а*.

Доказательство. Предположим противное, то есть что $в \vdots а$. Но тогда $а \le в$ по теореме, рассмотренной выше. По условию $а \vdots в$ и $а \ne в$. Тогда, по той же теореме, $в \le а$. Неравенства $а \le в$ и $в \le а$ справедливы лишь тогда, когда $а=в$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение не верно и теорема доказана.

<u>Теорема 3</u>. Отношение делимости транзитивно, т.е. если $а \vdots в$ и $в \vdots с$, то $а \vdots с$.

Доказательство. Так как $а \vdots в$, то существует такое натуральное число q, что $а=вq$, а так как $в \vdots c$, то существует такое натуральное число p ,что $в= ср$. Но тогда имеем: $а= вq=(ср)q =с(pq)$. Число pq– натуральное. Значит, по определению отношения делимости $a \vdots c$.

Для дальнейшего изучения вопроса делимости и решения задач необходимо уточнить следующее: если число делится на 4, то оно имеет вид $4q$, где q – целое неотрицательное число, а если число не делится на 4, то каков его вид?

Известно, что если число не делится на 4 нацело, то его делят на 4 с остатком, причем остаток должен быть меньше 4, т.е. это число 1, 2 или 3. Тогда числа, которые при делении на 4 дают остаток 1, есть числа вида $4q+1$, числа, которые при делении на 4 дают остаток 2, есть числа вида $4q+2$, а числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, есть числа вида $4q+3$.

Числа вида $4q$, $4q+1$, $4q+2$, $4q+3$ образуют множества, которые попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством целых неотрицательных чисел.

3. Признаки делимости, независящие от системы счисления (делимость суммы, разности и произведения)

<u>Теорема 1</u> *(признак делимости суммы)*

Если каждое из натуральных чисел $a_1, a_2,..., a_n$ делится на натуральное число b,то и их сумма $a_1+ a_2+...+ a_n$ делится на это число.

Доказательство. Так как $a_1 \vdots b$, то существует такое натуральное число q_1, что $a_1=bq_1$. Так как $a_2 \vdots b$, то существует такое натуральное число q_2, что $a_2=bq_2$. Продолжая рассуждения, получим, что если $a_n \vdots b$, то существует такое натуральное число q_n, что $a_n=bq_n$. Эти равенства позволяют преобразовать сумму $a_1+a_2+...+a_n=bq_1+bq_2+...+bq_n=b(q_1+q_2+...+q_n)=bq$. То есть сумма $a_1+a_2+...+a_n$ оказалась представленной в виде произведения числа b и некоторого натурального числа q. Это значит, что сумма $a_1+a_2+...+ a_n$ делится на b.

Например, сумма 175+ 360+ 915 делится на 5, так как на 5 делится каждое слагаемое этой суммы.

<u>Теорема 2</u> *(признак делимости разности).*

Если числа a_1 *и* a_2 делятся на b и $a_1\geq a_2$, то их разность $a_1 – a_2$ делится на b.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству признака делимости суммы.

<u>Теорема 3</u> *(признак делимости произведения).*

Если число a делится на b, то произведение ax, где $x \in \mathbf{N}$ делится на b.

Доказательство. Так как $a \vdots b$, то существует такое натуральное число q, что $a=bq$. Умножим обе части этого равенства на натуральное число x. Тогда $ax=(bq)x$, откуда на основании свойства ассоциативности умножения $ax=b(qx)$, где qx – натуральное число. Согласно определения отношения делимости, $ax \vdots b$, что и требовалось доказать.

Из данной теоремы следует, что *если один из множителей произведения делится на натуральное число* b, *то и все произведение делится на* b.

Например, произведение $24\cdot 976 \cdot 305$ делится на 12, так как на 12 делится множитель 24.

Теорема 4 *(неделимость суммы).*

Если в сумме одно слагаемое не делится на число b, а все остальные слагаемые делятся на число b, то вся сумма на число b не делится.

Доказательство. Пусть $S=a_1+a_2+\ldots+a_n+c$ и известно, что $a_1 \vdots b$, $a_2 \vdots b, \ldots, a_n \vdots b$, но c не делится на b. Докажем что тогда сумма S на b не делится. Предположим противное, то есть пусть $S \vdots b$. Преобразуем сумму S к виду $c=S-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. Так как $S \vdots b$ по предположению, $(a_1+a_2+\ldots+a_n) \vdots b$ по признаку делимости суммы, то по признаку делимости разности получаем, что $c \vdots b$. Пришли к противоречию с условием, следовательно, S не делится на b.

Например, сумма $34 + 125 + 376 + 1024$ на 2 не делится, так как одно слагаемое 125 не делится на 2.

Теорема 5 Если в произведении ab множитель a делится на натуральное число m, а множитель b делится на натуральное число n, то ab делится на mn.

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы о делимости произведения.

Теорема 6 Если произведение ac делится на произведение bc, причём $c \in N$, то и a делится на b.

Доказательство. Так как $ac \vdots bc$, то существует такое натуральное число q, что $ac=(bc)q$, откуда $ac=(bq)c$ и, следовательно, $a=bq$, то есть $a \vdots b$.

Данные теоремы являются основой решения задач, связанных с делимостью чисел.

Задача. Доказать, что произведение любых двух последовательных натуральных чисел делится на 2.

Решение. Если одно натуральное число обозначить буквой n, то число, следующее за ним $n+1$. Значит, надо доказать, что $n(n+1) \vdots 2$ для любого натурального n. Множество целых неотрицательных чисел можно разбить на 2 класса: четные числа (т.е. числа вида $2q$) и нечетные (т.е. числа вида $2q+1$). Если $n=2q$, то $n(n+1)= 2q(2q+1)$. В этом произведении есть множитель, который делится на 2, значит, по признаку о делимости произведения все произведение делится на 2. Если $n=2q+1$, то $n(n+1)= (2q+1)(2q+2)$. В этом произведении есть множитель $2q+2$, который делится на 2 (каждое слагаемое суммы делится на 2). Следовательно, все произведение делится на 2.

4. Признаки делимости, зависящие от системы счисления

Признаки делимости позволяет установить по записи числа, делится ли оно на другое, не выполняя деления.

Теорема 1 *(признак делимости на 2).*

Для того чтобы число x делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр : 0, 2, 4, 6, 8.

Доказательство. Запишем число x в десятичной системе счисления, т.е.

$x= a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1 + a_0$, где коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots , a_1$ принимают значения 0, 1, 2, … , 8, 9 , $a_n \neq 0$ и a_0 принимает значения 0, 2, 4, 6, 8.

Докажем, что тогда $x \vdots 2$. Так как $10 \vdots 2$, то $10^2 \vdots 2$, $10^3 \vdots 2$, …, $10^n \vdots 2$ и, значит, $(a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1) \vdots 2$. По условию a_0 тоже делится на 2, и поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 2. Следовательно, согласно признаку делимости суммы, число x делится на 2.

Докажем обратное: если число x делится на 2, то его десятичная запись оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8. Запишем равенство $x= a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1 + a_0$ в виде $a_0 = x - (a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1)$. Но тогда, по теореме о делимости разности, $a_0 \vdots 2$, так как $x \vdots 2$ и $(a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1) \vdots 2$. Чтобы однозначное число a_0 делилось на 2, оно должно принимать значения 0, 2, 4, 6, 8.

Теорема 2 *(признак делимости на 5).*

Для того чтобы число x делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0 или 5.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2.

Теорема 3 *(признак делимости на 10).*

Для того чтобы число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась цифрой 0.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 2 и на 5.

Теорема 4 *(признак делимости на 4).*

Для того чтобы число x делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.

Доказательство. Запишем число x в десятичной системе счисления, т.е. $x= a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1 + a_0$ и две последние цифры в этой записи образуют число, которое делится на 4. Докажем, что тогда $x \vdots 4$. Так как $100 \vdots 4$, то $(a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2\cdot 10^2) \vdots 4$. По условию, $a_1\cdot 10^1 + a_0$ (это и есть запись двузначного числа) также делится на 4. Поэтому число x можно рассматривать как сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. Следовательно, по признаку делимости суммы, и само число x делится на 4.

Докажем обратное, т.е. если число x делится на 4, то двузначное число, образованное последними цифрами его десятичной записи, тоже делится на 4. Запишем равенство $x= a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10^1 + a_0$ в виде:

$a_1\cdot 10^1 + a_0 = x - (a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2\cdot 10^2)$.

Так как $x \vdots 4$ и $(a_n\cdot 10^{n} + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2\cdot 10^2) \vdots 4$, то по теореме о делимости разности $(a_1\cdot 10^1 + a_0) \vdots 4$. Но выражение $a_1\cdot 10^1 + a_0$ есть запись двузначного числа, образованного последними цифрами записи числа x.

Например, число 157872 делится на 4, так как последние две цифры в его записи образуют число 72, которое делится на 4.

Теорема 5 *(признак делимости на 25).*

Для того чтобы число x делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы на 25 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.

Теорема 6 *(признак делимости на 100).*

Для того чтобы число x делилось на 100, необходимо и достаточно, чтобы на 100 делилось двузначное число, образованное последними двумя цифрами десятичной записи числа x.

Доказательство теорем 5 и 6 аналогично доказательству теоремы 4.

Теорема 7 *(признак делимости на 9).*

Для того чтобы число x делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

Доказательство. Докажем сначала, что числа вида 10^n-1 делятся на 9. Действительно, $10^n-1=(9\cdot 10^{n-1}+10^{n-1})-1=(9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+10^{n-2})-1=(9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\ldots+10)-1=9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\ldots+9$. Каждое слагаемое полученной суммы делится на 9, значит, и число 10^n-1 делятся на 9.

Пусть число $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10^1+a_0$ и $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)⋮9$. Докажем, что тогда $x⋮9$. Преобразуем сумму $a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10^1+a_0$, прибавив и вычтя из нее выражение $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ и записав результат в виде: $x=(a_n\cdot 10^n-a_n)+(a_{n-1}\cdot 10^{n-1}-a_{n-1})+\ldots+(a_1\cdot 10^1-a_1)+(a_0-a_0)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)+(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)$. В последней сумме каждое слагаемое делится на 9, следовательно, $x⋮9$.

Докажем обратное: если $x⋮9$, то сумма цифр его десятичной записи делится на 9. Равенство $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10^1+a_0$ запишем в виде: $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0=x-(a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1))$. Так как в правой части этого равенства и уменьшаемое, и вычитаемое кратны 9, то по теореме о делимости разности $(a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0)⋮9$, т.е. сумма цифр десятичной записи числа x делится на 9, что и требовалось доказать.

Например, число 34578 делится на 9, так как сумма его цифр, равная 27, делится на 9.

Теорема 8 *(признак делимости на 3).*

Для того чтобы число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака делимости на 9.

Существует общий признак делимости для чисел, записанных в любой позиционной системе счисления, открытый в 17 веке французским математиком Паскалем.

Теорема 9 *(признак делимости Паскаля).*

Число $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10^1+a_0$ делится на число b тогда и только тогда, когда на b делится сумма $a_n\cdot r_n+a_{n-1}\cdot r_{n-1}+\ldots+a_1\cdot r_1+a_0$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – остатки от деления на b разрядных единиц $10, 10^2, \ldots, 10^n$.

Используя этот признак можно вывести известный признак делимости на 3. Найдем остатки от деления разрядных единиц на 3:

$10=3\cdot 3+1$ $(r_1=1)$,

$10^2=3\cdot33+1$ ($r_2=1$),

$10^3=3\cdot333+1$ ($r_3=1$).

На основании рассмотренных случаев можно предположить, что ($\forall n\in\mathbf{N}$) $10^n=3q+1$. Подставив полученные остатки в сумму $a_n\cdot1+a_{n-1}\cdot1+...+a_1\cdot1+a_0=a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0$. Согласно этому признаку, если данная сумма делится на 3, то и число x делится на 3. Но $a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0$ – это сумма цифр в записи числа x. Получили известный признак делимости на 3.

Используя признак делимости Паскаля , можно доказать признак делимости чисел на 11: *для того чтобы число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой его цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делилась на 11.*

Например, число 540309 делится на 11, так как (4+3+9)–(5+0+0)=11, а 11делится на 11.

6. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

В зависимости от числа делителей среди натуральных чисел различают простые и составные числа.

Определение. Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя – единицу и само это число.

Например, 13, 31 – простые числа.

Определение. Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух делителей.

Например, число 4.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом, так как оно имеет только один делитель.

Простые числа играют большую роль в математике – по существу они являются «кирпичами», из которых строятся составные числа. Это утверждается в теореме, называемой основной теоремой арифметики натуральных чисел, которая приводится без доказательства.

Теорема *(основная теорема арифметики).*

Любое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей.

Например, запись 110 = 2·5·11 есть представление числа 110 в виде произведения простых множителей или *разложение его на простые множители.*

Два разложения числа на простые множители считают одинаковыми, если они отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

Раскладывая числа на простые множители, используют признаки делимости на 2, 3, 5 и др. Разложим, например, на множители число 90.

90 = 2· 3 ·3 · 5
45
15
5
1

При разложении числа на простые множители произведение одинаковых множителей представляют в виде степени: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Такое разложение числа на простые множители называют *каноническим.*

<u>Теорема</u> *(о наименьшем простом делителе составного числа).*

Наименьший простой делитель составного числа a не превосходит $\sqrt{a}$.

Например, возьмем любые составные числа: 15, 25, 49, и рассмотрим их наименьшие простые делители: для числа 15 – это 3, для числа 25 – это 5, для числа 49 – это 7. Тогда $3^2 \leq 15$, $5^2 \leq 25$, $7^2 \leq 49$.

Данной теоремой удобно пользоваться при проверке, является число простым или составным.

Пример. Докажем, что число 137 простое. Для этого извлечем из него квадратный корень: $11 < \sqrt{137} < 12$. Поэтому если 137 не делится на простые числа, меньшие 12, то оно является простым. Но множество простых чисел, меньших 12, состоит из чисел 2, 3, 5, 7 и 11. Ни на одно из них 137 не делится. Значит, 137 – простое число.

7. Решето Эратосфена

В связи с возможностью представлять любое составное число в виде произведения простых множителей возникает необходимость определять, является данное число простым или составным. Эту задачу умели решать еще древнегреческие математики, которым были известны многие свойства простых чисел. Так, Эратосфеном (III в. до н.э.) был придуман способ получения простых чисел, не превышающих натурального числа *a.* Воспользуемся им для поиска всех простых чисел до 50.

Выпишем все натуральные числа от 1 до 50 и зачеркнем число 1 – оно не является простым. Число 2 – простое, обведем его кружком. После этого зачеркиваем каждое второе число, стоящее после 2, т.е. числа 4, 6, 8,...

Первое не зачеркнутое число 3 является простым, обведем его кружком. И вычеркнем каждое третье число, стоящее после 3, т.е. числа 9, 15,... (числа 6, 12 и др. зачеркнуты раньше).

Первое не зачеркнутое число 5 является простым, его также обведем кружком. Зачеркнем каждое пятое число после 5 и т.д.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Те числа, которые останутся после четырех вычеркиваний (исключая числа 2, 3, 5 и 7), не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7. Доказано, что если натуральное число *a,* большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадрат которых не превосходит *a,* то *a* число простое. Поскольку $7^2 = 49$, а $49 < 50$, то все оставшиеся числа – простые.

Итак, простыми числами, не превосходящими 50, являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,-31, 37, 41, 43, 47.

Описанный способ получения простых чисел называется решетом Эратосфена, так как позволяет отсеивать одно за другим составные числа.

8. Бесконечность множества простых чисел

С помощью метода, предложенного Эратосфеном, можно отыскивать все простые числа, не превосходящие заданного числа *a.* Но он не дает ответа на вопрос, конечно или нет множество простых чисел, – ведь могло бы оказаться, что все числа, начиная с некоторого, составные и множество простых чисел конечно. Решением этой проблемы занимался другой греческий математик – Евклид. Он доказал, что *множество простых чисел бесконечно*.

Действительно, предположим, что множество простых чисел конечное и исчерпывается числами 2, 3, 5, 7, ..., *p,* где *p*– самое большое простое число. Перемножим все простые числа и их произведение обозначим через *a.* Прибавим к этому числу 1 и выясним, каким будет полученное число $a+ 1$ – простым или составным.

Простым число $a + 1$ быть не может, потому что оно больше самого большого простого числа, а по предположению таких простых чисел не существует. Но составным оно тоже быть не может: если $a + 1$ составное, то оно должно иметь хотя бы один простой делитель *q.* Так как число $a= 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}...{\cdot}\ p$ также делится на это простое число *q,* то и разность $(a + 1)–a$, т.е. число 1, делится на *q,* что невозможно.

Итак, число, *a* не является ни простым, ни составным, но этого тоже не может быть – всякое число, отличное от 1, либо простое, либо составное. Следовательно, наше предложение о том, что множество простых чисел конечное и есть самое большое простое число, неверно, и значит, множество простых чисел бесконечное.

9. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Определение. Общим кратным натуральных чисел *a* и *b* называется число, которое кратно каждому из данных чисел.

Наименьшее число из всех общих кратных чисел *a* и *b* называется *наименьшим общим кратным* этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел *a* и *b* условимся обозначать *К (a, b)* или *НОК(a, b).*

Например, общими кратными чисел 12 и 18 являются: 36, 72, 108, 144, 180 и т.д. Число 36 – наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Можно записать: *К(*12, 18)= 36.

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие утверждения:

1. Наименьшее общее кратное чисел *a* и *b* всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел *a* и *b* не меньше большего из данных чисел, т.е. если $a > b$, то $К (a, b) \geq a.$

3. Любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Определение. Общим делителем натуральных чисел a и b называется число, которое является делителем каждого из данных чисел.

Наибольшее число из всех общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* данных чисел.

Наибольший общий делитель чисел a и b условимся обозначать $D(a,b)$или $НОД(a,b)$.

Например, для чисел 12 и 18 общими делителями являются числа: 1, 2, 3, 6. Число 6 – наибольший общий делитель чисел 12 и 18, т.е. D (12,18) = 6.

Число 1 является общим делителем любых двух натуральных чисел a *и* b. Если у этих чисел нет иных общих делителей, то $D(a,\ b)=1$, а числа a и b называются *взаимно простыми.*

Например, числа 14 и 15 – взаимно простые, так как $D(14, 15) = 1$.

Для наибольшего общего делителя справедливы следующие утверждения:

1.Наибольший общий делитель чисел a и b всегда существует и является единственным.

2.Наибольший общий делитель чисел a и b не превосходит меньшего из-данных чисел, т.е. если $a < b$, то $D(a,\ b)\leq a$.

3.Наибольший общий делитель чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

10. Связь НОД и НОК чисел

Наименьшее общее кратное чисел a и b и их наибольший общий делитель взаимосвязаны: произведение наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел a и b равно произведению этих чисел, т.е.

$$K(a,b)\cdot D(a,b) = a \cdot b.$$

Из этого утверждения вытекают следующие следствия:

а) *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел*, т. е.

$$D\ (a,\ b) = 1 \quad => \quad K(a,\ b) = a \cdot b.$$

Например, чтобы найти наименьшее общее кратное чисел 14 и 15, достаточно их перемножить, так как $D(14, 15)= 1$.

б) *Для того чтобы натуральное число а делилось на произведение взаимно простых чисел m и n, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на m, и на n.*

Это утверждение представляет собой признак делимости на числа, которые можно представить в виде произведения двух взаимно простых чисел.

Например, так как $6 = 2\cdot 3$ и $D(2, 3) = 1$, то получаем *признак делимости на 6*: для того чтобы натуральное число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Данный признак можно применять многократно. Например, признак делимости на 60: для того чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 4, и на 15. В свою очередь, число будет делиться на 15 тогда и только тогда, когда оно делится и на 3, и на 5. Обобщая, получаем следующий признак делимости на 60: для того чтобы число делилось на 60, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, на 3 и на 5.

в) *Частные, получаемые при делении двух данных чисел на их наибольший общий делитель, является взаимно простыми числами*.

Этим свойством можно пользоваться при проверке правильности найденного наибольшего общего делителя данных чисел. Например, проверим, является ли число 12 наибольшим общим делителем чисел 24 и 36. Для этого, согласно последнему утверждению, разделим 24 и 36 на 12. Получим соответственно числа 2 и 3, которые являются взаимно простыми. Следовательно, $D(24, 36) = 12$.

11. Способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел

1. ***Способ разложения чисел на простые множители***.

Пусть даны два числа 3600 и 288. Представим их в каноническом виде: $3600=2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $288=2^5 \cdot 3^2$. Найдем наибольший общий делитель данных чисел. В его разложение должны войти все *общие простые множители*, которые содержатся в разложении чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с *наименьшим показателем,* с каким он входит в оба разложения. Следовательно, НОД $(3600, 288) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

Вообще чтобы найти наибольший общий делитель данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;
2) образуют произведение общих для всех данных чисел простых множителей, каждый с наименьшим показателем, каким он входит во все разложения данных чисел;
3) находят значение этого произведения – оно и будет НОД данных чисел.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 3600 и 288. В его разложение должны войти все простые множители, которые содержатся *хотя в одном из разложений* чисел 3600 и 288, причем каждый из них нужно взять с *наибольшим показателем*, с каким он входит в оба разложения. Следовательно,
$HOK(3600, 288) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$.

Вообще чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел:

1) представляют каждое данное число в каноническом виде;
2) образуют произведение всех простых множителей, находящихся в разложениях данных чисел, каждый с наибольшим показателем, с каким он входит во все разложения данных чисел;
3) находят значение этого произведения, оно и будет НОК данных чисел.

2. Алгоритм Евклида.

Отыскание НОД двух натуральных чисел по их каноническому виду требует предварительного разложения чисел на простые множители. Это несложно сделать, если числа не велики. Но для многозначных чисел найти их каноническое разложение бывает трудно. Существует способ отыскания НОД, требующий лишь деления с остатком. Этот способ был предложен Евклидом, и его назвали Алгоритмом Евклида. Он основан на следующих трех утверждениях:

1) Если *а* делится на *в*, то НОД (*а, в*) = *в*.

2) Если $a=вq+r$ и $r<в$, то множество общих делителей чисел *а* и *в* совпадает с множеством общих делителей чисел *в* и *r*.

3) Если $a=вq+r$ и $r<в$, то НОД (*а, в*) = НОД (*в, r*).

Сформулируем теперь алгоритм Евклида для нахождения НОД натуральных чисел *а* и *в*.

Пусть $a > в$. Если *а* делится на *в,* то НОД (*а, в*) = *в*.

Если при делении *а* на *в* получается остаток *r*, то $a=вq+r$ и НОД (*а, в*) = НОД (*в, r*) и задача свелась к отысканию НОД (*в, r*).

Если *в* делится на *r*, то НОД (*в, r*) = *r* и тогда НОД (*а, в*) = *r*.

Если при делении *в* на *r* получается остаток r_1, то $в=rq_1+r_1$ и поэтому НОД(r, r_1) = НОД (*в, r*) = НОД (*а, в*).

Продолжая описанный процесс, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов получим остаток, на который будет делиться предыдущий остаток. Этот *наименьший*, *отличный от нуля, остаток* и будет наибольшим общим делителем чисел *а* и *в* .

Найдем при помощи алгоритма Евклида НОД (2585, 7975).

$$\begin{array}{r|l} 7975 & \underline{2585} \\ \underline{7755} & 3 \\ 220 & \end{array} \qquad 7955=2585\cdot 3+220$$

$$\begin{array}{r|l} -2585 & \underline{220} \\ \underline{220} & 11 \\ 385 & \\ \underline{220} & \\ 165 & \end{array} \qquad 2585=220\cdot 11+165$$

$$220=165\cdot 1+55$$

$$\begin{array}{r|l} 220 & \underline{165} \\ \underline{165} & 1 \\ 55 & \end{array} \qquad 165=55\cdot 3+0$$

$$\begin{array}{r|l} 165 & \underline{55} \\ \underline{165} & 3 \\ 0 & \end{array}$$

В последнем случае остаток равен нулю. Значит, НОД (7975, 2585)=55.