<u>Элементы комбинаторики и теории вероятностей</u>

Комбинаторные задачи

1. Понятие комбинаторной задачи

В обыденной жизни нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число. Задачи, требующие такого решения, называются *комбинаторными.*

С теоретико–множественной точки зрения решение комбинаторных задач связано с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, и упорядочением множеств. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой.*

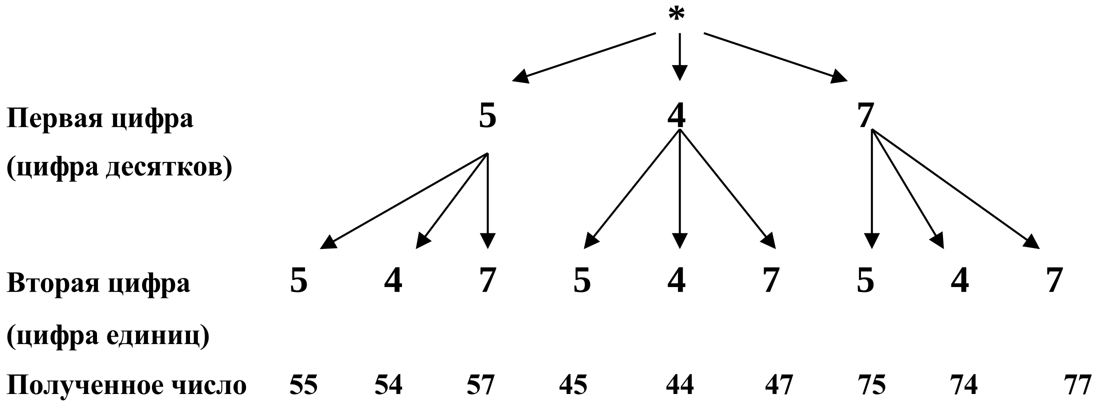
Комбинаторика возникла в XVI веке и первоначально в ней рассматривались комбинаторные задачи, связанные в основном с азартными играми. В процессе изучения таких задач были выработаны некоторые общие подходы к их решению, получены формулы для подсчета числа различных комбинаций.

В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математической науки. Ее методы широко используются для решения практических и теоретических задач. Установлены связи комбинаторики с другими разделами математики.

В начальном обучении математике роль комбинаторных задач постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для подготовки учащихся к решению проблем, возникающих в повседневной жизни.

Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса нередко используются таблицы и графы. В связи с этим учителю начальных классов необходимы определенные умения и навыки решения комбинаторных задач.
Часто при решении задач требуется не только ответить на вопрос о том, сколько существует возможных вариантов ее решения, но и осуществить перебор этих вариантов. Например, задача «Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 5, 4 и 7? »

Существует единый подход к осуществлению такого перебора – строится схема, называемая *деревом возможных вариантов*. Так, для задачи она будет иметь вид :



Эта схема действительно похожа на дерево, правда, растет оно вниз и у него нет ствола. То, что дерево растет как бы «вверх ногами», удобно при построении схем такого вида. Знак ***** изображает корень дерева, ветвями которого являются различные варианты решения задачи. Чтобы получить двузначное число, надо сначала выбрать цифру десятков – для этого есть три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому из ***** проведены три отрезка и на их концах поставлены цифры 5, 4 и 7. Затем надо выбрать цифру единиц, а для этого также есть три варианта: 5, 4 или 7. Поэтому от цифр 5, 4 и 7 проведено по три отрезка, на концах которых опять стоят цифры 5, 4 или 7. Чтобы прочитать полученные варианты, надо пройти по всем ветвям построенного дерева сверху вниз.

2. Правило суммы и произведения

В комбинаторике, которая возникла раньше теории множеств, правило нахождения числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств называют *правилом суммы* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b - k способами (не такими, как a), то выбор «либо a, либо b» можно осуществить m+k способами.

<u>*Задача 1*</u>. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин - четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе «либо яблоко, либо апельсин», то его, согласно правилу суммы, можно осуществить $5 + 4 = 9$ способами.

Правило нахождения числа элементов декартова произведения двух множеств называют в комбинаторике *правилом произведения* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать m · k способами.

Правило суммы и произведения, сформулированные для двух объектов, можно обобщить и на случай *t* объектов.

<u>*Задача 2*</u>. На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать пару плодов, состоящую из яблока и апельсина?

Решение. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, апельсин – четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе пары (яблоко, апельсин), то ее, согласно правилу произведения, можно выбрать $5\cdot 4 = 20$ способами.

3. Размещения с повторениями и без повторений

Используя цифры 7, 4 и 5, можно образовать различные двузначные числа: 77, 74, 75, 47, 44, 45, 57, 54, 55. В записи этих чисел цифры повторяются.

С теоретико-множественной точки зрения запись любого двузначного числа – это кортеж длины 2. Записывая различные двузначные числа с помощью цифр 7, 4 и 5, мы по сути дела образовывали из данных трех цифр различные кортежи длины 2 с повторяющимися элементами. В комбинаторике такие кортежи называют *размещениями с* повторениями из трех элементов по два элемента.

Определение. ***Размещение с повторениями из k элементов по m элементов - это кортеж, составленный из m элементов k-элементного множества.***

Из определения следует, что два размещения из k элементов по m элементов отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Например, два двузначных числа из перечисленных выше (а это размещения из трех элементов по два) отличаются друг от друга либо составом элементов (74 и 75), либо порядком их расположения (74 и 47).

Число всевозможных размещений с повторениями из k элементов по m элементов обозначают $\tilde{A}_k^m$ и подсчитывают по формуле $\tilde{A}_k^m = k^m$.

Выведем эту формулу.

Пусть в множестве X содержится k элементов. Будем образовывать из них различные кортежи по m элементов. Такие кортежи образуют множество $X\times X\times \ldots \times X$, содержащее m множителей. По правилу произведения

$$n\,(X\times X\times \ldots \times X) = \underbrace{n(X)\cdot n(X)\cdot \ldots \cdot n(X)}_{m \text{ множителей}} = \underbrace{k\cdot k\cdot \ldots \cdot k}_{m \text{ множителей}} = k^m .$$

Следовательно, $\tilde{A}_k^m = k^m$.

Пользуясь этой формулой, легко подсчитать, сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5. Так как речь идет о размещениях с повторениями из трех элементов по два, то $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Нередко встречаются задачи, в которых требуется подсчитать число кортежей длины m, образованных из k элементов некоторого множества, но при условии, что элементы в кортеже не повторяются. Такие кортежи называются размещениями без повторений из k элементов по m элементов.

Определение. ***Размещение без повторений из k элементов по m элементов - это кортеж, составленный из m неповторяющихся элементов множества, в котором k элементов.***

Число всевозможных размещений без повторений из k элементов по m элементов обозначают A_k^m и подсчитывают по формуле

$$A_k^m = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1).$$

Задание! Вывести эту формулу самостоятельно.

Например, число двузначных чисел, записанных с помощью цифр 7, 4 и 5 так, что цифры в записи числа не повторяются, есть число размещений без повторений из трех элементов по два: $A_3^2 = 3\cdot(3-1) = 3\cdot 2 = 6$.

4. Перестановки без повторений и с повторениями

Задача. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5, так, чтобы цифры в записи числа не повторялись.

Решение. В задаче рассматриваются размещения без повторений из трех элементов по три, и их число можно подсчитать по формуле:

$$A_3^3 = 3\cdot(3-1)\cdot(3-2) = 3\cdot 2\cdot 1 = 6.$$

Эти числа таковы: 745, 754, 475, 457, 547, 574.

Заметим, что в данном случае разные числа получаются в результате перестановки цифр. Поэтому размещения из k элементов по k элементов называют *перестановками* из k элементов без повторений.

Число перестановок без повторений из k элементов обозначают P_k и подсчитывают по формуле $P_k = k!$, где $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$ и читают «k факториал». Считают, что 1! = 1, 0!= 1. Например, 5! = 120; 7! = 5040.

Таким образом, перестановки без повторений – это частный случай размещения без повторений.

Определение. ***Кортежи длины m, в которые входит элемент*** a_1 – m_1 ***раз, элемент*** a_2 – m_2 ***раз, …, элемент*** a_k – m_k ***раз*** $(m_1+m_2+\ldots+m_k=m)$, ***называют перестановками с повторениями состава*** $(m_1,m_2,\ldots,m_k)$.

Их число выражается формулой: $P(m_1,m_2,\ldots,m_k)=\dfrac{(m_1+m_2+\ldots+m_k)!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots m_k!}$.

<u>*Задача.*</u> Сколькими способами можно расставить на первой линии шахматной доски 6 белых пешек и 2 черных?

Решение. $P(6,2)=\dfrac{(6+2)!}{6!\cdot 2!}=28$.

5. Сочетания без повторений

Из элементов множества $X = \{7, 4, 5\}$ можно образовывать не только кортежи различной длины, но и различные подмножества, например двухэлементные. В комбинаторике их называют сочетаниями без повторений из трех элементов по два элемента.

Определение. ***Сочетание без повторения из k элементов по m элементов – это m-элементное подмножество множества, содержащего k элементов.***

Два сочетания из k элементов по m элементов отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов обозначают C_k^m. Как находить это число?

Обратимся сначала к примеру. Образуем различные двухэлементные подмножества из элементов множества X ={7, 4, 5}. Их будет три: {7, 4}, {7, 5}, {4, 5}. Из элементов каждого такого подмножества можно образовать 2! кортежей длины 2:

(7,4) (7,5) (4,5)

(4,7) (5,7) (5,4)

Все полученные кортежи являются размещениями без повторений из трех элементов по два и их число равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Но, с другой стороны, это число равно произведению $2! \cdot C_3^2$. Значит, $A_3^2 = 2! \cdot C_3^2$, откуда $C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!}$.

В общем виде : $C_k^m = \frac{A_k^m}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$.

Применение формул облегчает подсчет числа возможных вариантов решений той или иной комбинаторной задачи. Однако, чтобы воспользоваться формулой, необходимо определить вид комбинаций, о которых идет речь в задаче, что бывает сделать не очень просто.

Элементы теории вероятностей

1. События и вероятность

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°C, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S.

Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб» - случайное.

Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет,– она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т. е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Определение. ***Теория вероятностей– математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий).***

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях. Каждое такое осуществление данной совокупности условий называют *испытанием*. Например, испытание – это бросание кубика, на гранях которого проставлены цифры от 1 до 6, выпадение пятерки – событие. События обозначают заглавными буквами: A, B, C, …

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники. В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

2. Классическое определение вероятности

Вероятность - одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия.

Дадим ряд вспомогательных определений.

Определение 1. ***События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.***

Например, при бросании монеты появление «герба» исключает появление «надписи».

Определение 2. ***Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.***

В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Определение 3. ***События называются равновозможными, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.***

Например, появление «герба» и «надписи» при бросании монеты – равновозможные события.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т. е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара).

Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Отношение *числа* благоприятствующих событию *A* элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события *A* и обозначают через *P(A).* В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию *A.* Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P\,(A) = \frac{5}{6}$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти.

Определение. ***Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу***.

Итак, вероятность события *A* определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где *m* - число элементарных исходов, благоприятствующих *A;*
n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, т.е.* $0 < P(A) < 1$.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$, следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

8. Сумма и произведение событий. Противоположные события

Определение. ***Суммой А+В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий (т.е. или А, или В, или оба вместе).***

Например, если из орудия произведены два выстрела и А – попадание при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, то А+В – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Если два события А и В – несовместные, то А+В – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Определение. ***Произведением двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.***

Например, если А – деталь годная, В – деталь окрашенная, то АВ – деталь годная и окрашена.

Определение. ***Противоположным событию А называется событие*** $\overline{A}$***, которое происходит только тогда, когда не происходит событие А.***

Например, при выстреле по цели попадание и промах – противоположные события. Часто вероятности противоположных событий обозначают p и q.

События А и $\overline{A}$ образуют полную группу.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Задача. Вероятность того, что день будет дождливым равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные, поэтому искомая вероятность $q=1-p=1-0{,}7=0{,}3$.

9. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Пример. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие А) Р(А)=$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Вероятность появления синего шара (событие В) Р(В)=$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. События А и В несовместны, поэтому по теореме сложения Р(А+В)= $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Определение. ***Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.***

Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому данные события независимы.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равно 0,8, а вторым (событие В) – 0,7.

Решение. Р(АВ) = Р(А)·Р(В)=0,7·0,8=0,56.

Определение. ***События называют совместными, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.***

Например, А– появление четырех очков при бросании игральной кости и В – появление четного числа очков. События А и В – совместные.

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)- P(AB).$$

Пример. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий, если вероятности попадания в цель первого и второго орудий соответственно равны: p_1=0,7; p_2=0,8.

Решение. Вероятность события АВ (оба орудия дали попадание) Р(АВ)=0,7·0,8=0,56. Искомая вероятность Р(А+В)=0,7+0,8–0,56=0,94.

Определение. ***Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события В, найденная при условии, что событие А уже наступило.***

Условная вероятность находится по формуле: $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие В), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие А).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая вероятность $P_A(B)=\frac{3}{5}$. Этот же результат можно получить по формуле $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$. Вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Найдем вероятность P(AB) того, что при первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов – совместного появления двух шаров равна числу размещений $A_6^2=6\cdot5=30$. Событию АВ благоприятствуют $3\cdot3=9$ исходов. Следовательно, $P(AB)=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$.

Тогда искомая условная вероятность $P_A(B)=\frac{3}{10}:\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$.

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$$

Пример. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие А) $P(A)=\frac{3}{10}$. Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие В), вычисленная в предположении, что первый валик конусный, т.е. условная вероятность $P_A(B)=\frac{7}{9}$. По теореме умножения, искомая вероятность $P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

10. Полная вероятность. Формула Бейеса

Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A)= P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

Эту формулу называют формулой полной вероятности.

Пример. В первой коробке содержится 20 кубиков, из них 18 красных; во второй коробке – 10 кубиков, из них 9 красных. Из второй коробки наудачу взят кубик и переложен в первую. Найти вероятность того, что кубик, наудачу извлеченный из первой коробки, будет красным.

Решение. Обозначим через А событие «из первой коробки извлечен красный кубик». Из второй коробки может быть извлечен либо красный кубик (событие B_1), либо не красный (событие B_2). Вероятность того, что из второй коробки извлечен красный кубик $P(B_1)=\frac{9}{10}$. Вероятность того, что из второй коробки извлечен не красный кубик $P(B_2)=\frac{1}{10}$. Условная вероятность того, что из первой коробки извлечен красный кубик, при условии, что из второй коробки в первую был переложен красный кубик, равна $P_{B1}(A)=\frac{19}{21}$. Условная вероятность того, что из первой коробки извлечен красный кубик, при условии, что из второй коробки в первую был переложен не красный кубик, равна $P_{B2}(A)=\frac{18}{21}$. Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечен красный кубик, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=0{,}9.$$

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами*.

Если в результате опыта осуществилось событие А, то прежние, доопытные вероятности гипотез $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$ должны быть заменены на новые, послеопытные вероятности $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, …, $P_A(B_n)$, которые вычисляются по формуле Бейеса:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(A)}, \text{ где } P(A) \text{ – полная вероятность.}$$

Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Пример. Предположим, что 5 % мужчин и 0,25 % всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Считая, что мужчин и женщин одинаковое количество, найти вероятность того, что этот человек мужчина.

Решение. Пусть событие А – «выбранный человек оказался дальтоником». Тогда в качестве гипотезы примем событие B_1 – «выбранный человек – мужчина». $P(B_1)=0{,}5$ (так как мужчин и женщин одинаковое количество). По формуле полной вероятности найдем P(A): так как по условию $P_{B1}(A)=0{,}05$ и $P_{B2}(A)=0{,}0025$, то $P(A)=0{,}5\cdot0{,}05+0{,}5\cdot0{,}0025=0{,}02625$. Следовательно,

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}02625}=\frac{20}{21}.$$

11.Схема испытаний Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может произойти либо не произойти. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна p. Следовательно, вероятность ненаступления события А в каждом испытании также постоянна и равна $q=1-p$. Такого рода схема испытаний называется *схемой Бернулли.*

Тогда вероятность того, что событие А наступит ровно m раз, находится по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где C_n^m – число сочетаний из n элементов по m элементов.

Пример. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Найти вероятность того, что шестерка выпадет два раза.

Решение. Производится 10 независимых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: шестерка выпадет, шестерка не выпадет. Вероятность выпадения шестерки в каждом испытании постоянна и равна $\frac{1}{6}$. Для нахождения искомой вероятности применим формулу Бернулли. Здесь $n=10$, $m=2$, $p=\frac{1}{6}$, $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Тогда $P_{10}(2) = C_{10}^2 \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^{10-2} = 45 \cdot \frac{1}{36} \cdot (\frac{5}{6})^8 \approx 0{,}291$.