Раздел: «Элементы алгебры»

Тема: «Числовые функции»

План: 1. Понятие функции.

2. Способы задания функции.

3. Свойства числовых функций.

4. Прямая пропорциональность, ее свойства и график.

5. Обратная пропорциональность, ее свойства и график.

6. Линейная функция.

7. Квадратичная функция.

Числовые функции

Функция – одно из важнейших понятий математики. В школьном курсе математики основное внимание уделяется числовым функциям. Причиной этого является тесная связь математики с естественными науками, в частности с физикой, для которой числовые функции служат средством количественного описания различных зависимостей между величинами.

В начальном курсе математики понятие функции и все, что с ним связано, в явном виде не изучается, но идея функциональной зависимости пронизывает его. Это требует от учителя начальных классов определенных знаний о функции и ее свойствах, и прежде всего таких, которые помогут ему осуществлять в начальной школе пропедевтику понятия функции.

1. Понятие функции

Выполним два задания для младших школьников.

1) Увеличь каждое нечетное однозначное число в два раза.
2) Заполни таблицу.

Уменьшаемое	5	5	5	5	5	5
Вычитаемое	0	1	2	3	4	5
Разность						

Выясним с какими математическими понятиями мы имеем дело, выполняя эти задания. Прежде всего, в каждом задании есть два числовых множества, между которыми устанавливается соответствие. В первом – это множества {1,3,5,7,9}и {2,6,10,14,18}, а во втором – это множество значений вычитаемого {0,1,2,3,4,5} и множество значений разности {5,4,3,2,1,0}. И в первом и во втором задании каждому числу из первого множества сопоставляется единственное число из второго. В математике такие соответствия называют функциями.

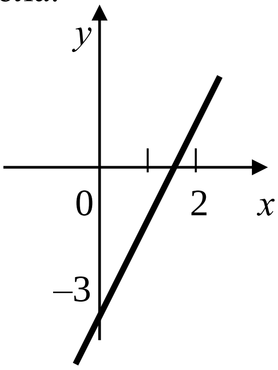
Определение. ***Числовой функцией*** называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R.

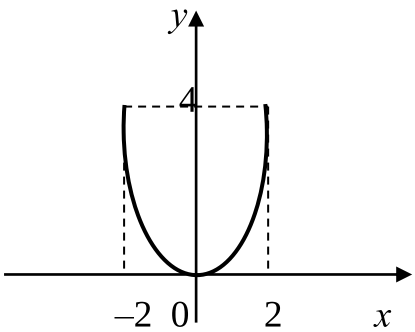
Множество X называют **областью определения функции**.

Функции принято обозначать буквами *f, g, h* и др. Если *f* – функция, заданная на множестве X, то действительное число *y,* соответствующее числу *x* из множества X, часто обозначают *f(x)* и пишут $y = f(x)$. Переменную *x* при этом называют **аргументом** (или независимой переменной) функции *f*. Множество чисел вида *f(x)* для всех *x* из множества X называют **областью значений функции** *f*.

Числовые функции можно представить наглядно на координатной плоскости. Пусть $y = f(x)$– функция с областью определения X. Тогда ее ***графиком*** является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу *x* и ординату *f(x)* для всех *x* из множества X.

Так, графиком функции $y = 2x - 3$, заданной на множестве R, является прямая, а графиком функции $y = x^2$, заданной на том же множестве является парабола.





2. Способы задания функции

Из определения функции следует, что для задания функции необходимо указать:

1) числовое множество X, т.е. область определения функции;
2) правило, по которому каждому числу из множества X соответствует единственное действительное число.

Способы задания функции:

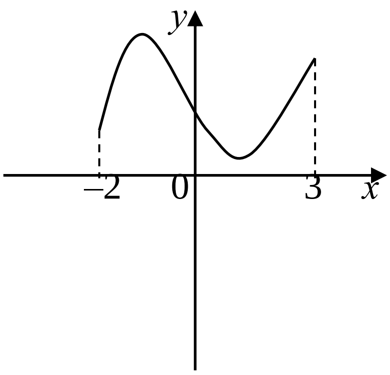
1. С помощью формул.

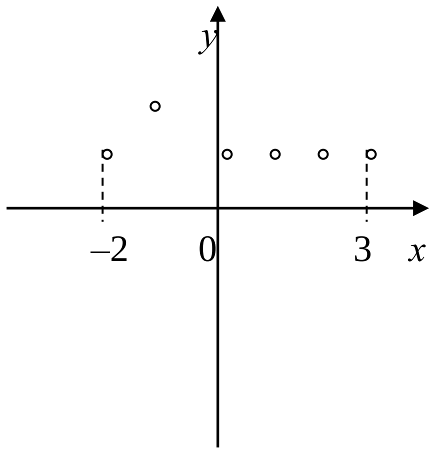
Формула указывает, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции Например, формулы $y = 2x - 3$, у = 3х, где х – действительное число, задают функции, так как каждому действительному значению *x* можно, производя указанные в формуле действия, поставить в соответствие единственное значение *y*.

С помощью одной и той же формулы можно задать сколь угодно много функций, которые будут отличаться друг от друга областью определения. Например, функция $y = 2x – 3$, где $x \in \mathbf{R}$, отлична от функции $y = 2x – 3$, где $x \in \mathbf{N}$. Действительно, при $x = –5$ значение первой функции равно –13, а значение второй при $x = –5$ не определено.

Часто при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается. В таких случаях считают, что область определения функции является область определения выражения *f(x)*. Например, если функция задана формулой $y = 2x–3$, то ее область определения считают множество действительных чисел. Если функция задана формулой $y = \frac{6}{x-2}$, то ее область определения есть множество действительных чисел за исключением числа 2.

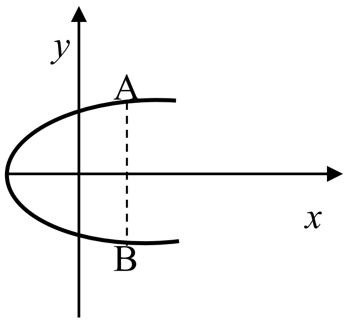
2. С помощью графика .





Графики, приведенные на рисунке, задают функции, одна из которых имеет область определения промежуток [–2, 3], а вторая– конечное множество {–2,–1, 0, 1, 2, 3}.

Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции. Например, кривая на рисунке не является графиком функции , так как прямая АВ, параллельная оси ординат, пересекает ее в двух точках.



3. С помощью таблицы.

$y = 2x - 3$

x	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3

$y = x^2$

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

3. Свойства числовых функций

Числовые функции обладают многими свойствами. Рассмотрим одно из них – свойство монотонности.

Определение. ***Функция f называется монотонной на некотором промежутке А, если она на этом промежутке возрастает или убывает.***

Определение. ***Функция f называется возрастающей на некотором промежутке А, если для любых чисел x_1, x_2 из множества А выполняется условие:***

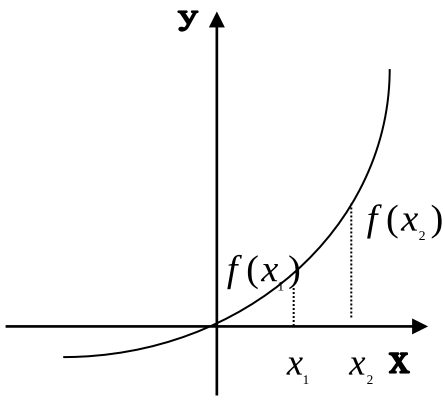
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

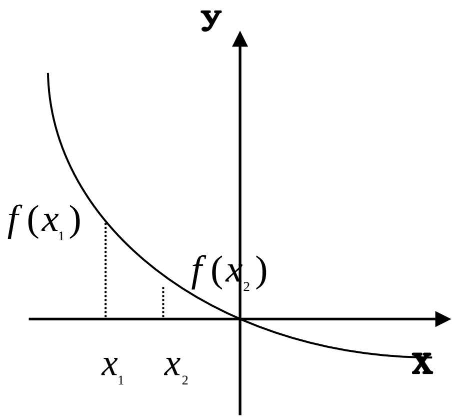
График возрастающей на промежутке А функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку А ординаты точек графика увеличиваются.

Определение. ***Функция f называется убывающей на некотором промежутке А, если для любых чисел x_1, x_2 из множества А выполняется условие:***

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

График убывающей на промежутке А функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку А ординаты точек графика уменьшаются.





4. Прямая пропорциональность

Определение. ***Прямой пропорциональностью*** называется функция, которая может быть задана при помощи формулы *y=kx*, где *k*– не равное нулю действительное число.

Пример, *S=4t*.

Название функции *y=kx* связано с тем, что в формуле есть переменные х и у, которые могут быть значениями величин. А если отношение двух величин равно некоторому числу, отличному от нуля, их называют *прямо пропорцио-*

нальными. В нашем случае $k=\frac{y}{x}$ $(k\neq 0)$. Это число называется *коэффициентом пропорциональности.*

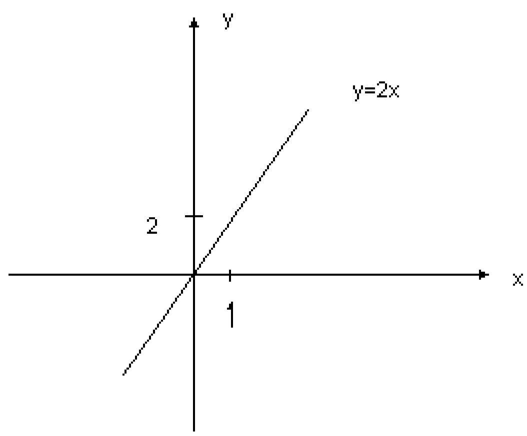
Функция $y=kx$ является математической моделью многих реальных ситуаций, рассматриваемых в начальном курсе математики. Одна из них записана в виде примера.

Другой пример: если в одном пакете муки 2 кг, а куплено x таких пакетов, то всю массу купленной муки (y) можно представить в виде формулы $y=2x$, т. е. зависимость между количеством пакетов и всей массой купленной муки является прямой пропорциональностью с коэффициентом $k=2$.

Некоторые свойства прямой пропорциональности:

1) Область определения функции $y=kx$ и область её значений – множество действительных чисел.

2) Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат, поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно найти лишь одну точку, принадлежащую ему и несовпадающую с началом координат, а затем через эту точку и начало координат провести прямую. Например: чтобы построить график функции $y=2x$, достаточно иметь точку с координатами (1,2) ,а затем через неё и начало координат провести прямую.



3) При $k > 0$ функция $y=kx$ возрастает на всей области определения, при $k < 0$ – убывает на всей области определения.

4) Если функция f – прямая пропорциональность и (x_1,y_1),(x_2,y_2) – пары, соответствующих значений переменных x и y, причём $x_2 \neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

Действительно, если функция f – прямая пропорциональность, то она может быть задана формулой $y=kx$, и тогда $y_1= kx_1$, $y_2= kx_2$. Так как при $x_2 \neq 0$ и $k\neq 0$, то $y_2 \neq 0$, поэтому $\frac{y_1}{y_2}=\frac{kx_1}{kx_2}=\frac{x_1}{x_2}$.

Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то доказанное свойство прямой пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколь-*

ко раз соответствующее значение переменной у увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Это свойство характерно только для прямой пропорциональности и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются прямо пропорциональные величины.

Задача. За 8 ч токарь изготовил 16 деталей. Сколько часов потребуется токарю на изготовление 48 деталей, если он будет работать с той же производительностью?

Решение. В задаче рассматриваются величины: время работы токаря, количество сделанных им деталей и производительность (количество деталей, изготовленных за 1 час), причем последняя величина постоянная. Кроме того, количество сделанных деталей и время работы – величины прямо пропорциональные. Математической моделью задачи является прямая пропорциональность. Ее решить можно двумя способами:

1 способ:

1) 16:8=2 (дет.)

2) 48: 2=24 (ч)

Сначала нашли коэффициент пропорциональности *k=2,* а затем, зная, что *у=2х*, находим значение *х* при условии, что *у*=48.

2 способ:

1) 48:16=3 (раза)

2) 8· 3=24 (ч)

Воспользовались свойством прямой пропорциональности: во сколько раз увеличивается количество деталей, во столько же раз увеличивается и количество времени на их изготовление.

4. Обратная пропорциональность

Задача: если *t* – время движения пешехода (в часах), *v* – его скорость (в км/ч) и он прошел 12 км, то зависимость между этими величинами можно выразить формулой $v \cdot t = 20$ или $v = \frac{20}{t}$. Так как каждому значению $t (t \neq 0)$ соответствует единственное значение скорости *v*, то можно говорить о том, что с помощью формулы $v = \frac{20}{t}$ задана функция. Ее называют обратной пропорциональностью и определяют следующим образом.

Определение. ***Обратной пропорциональностью*** называется функция, которая может быть задана при помощи формулы $y = \frac{k}{x}$, где *k* – не равное нулю действительное число.

х, у – переменные, k – коэффициент пропорциональности.

Функция $y = \frac{k}{x}$ является математической моделью многих задач, решаемых в начальном курсе математики.

Свойства обратной пропорциональности:

1. Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ и область ее значений *x* является множество действительных чисел, отличных от нуля.
2. Графиком обратной пропорциональности является гипербола.
3. При k>0 ветви гиперболы расположены в 1-й и 3-й четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является убывающей на всей области определения *x* (рис.1). При k<0 ветви гиперболы расположены в 2-й и 4-й четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является возрастающей на всей области определения *x* (рис. 2).

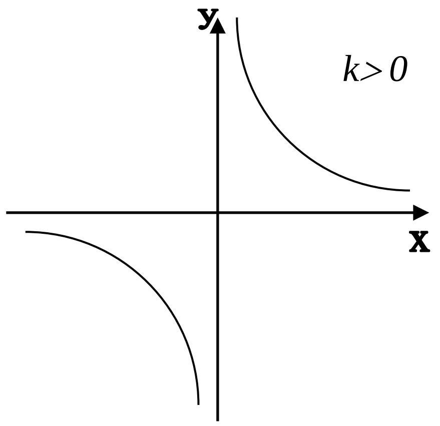


Рис. 1

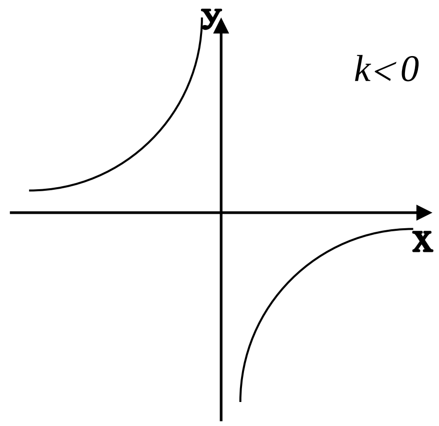


Рис. 2

4. Если функция *f* - обратная пропорциональность и (x_1, y_1), (x_2, y_2) - пары соответственных значений переменных *x* и *y*, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

Действительно, если f – обратная пропорциональность, то она может быть задана формулой $y = \frac{k}{x}$**,** и тогда $y_1 = \frac{k}{x_1}$; $y_2 = \frac{k}{x_2}$. Так как $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ и $k \neq 0$, то $\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1} = \frac{x_1}{x_2}$.

Если значениями переменных *x* и *y* служат положительные действительные числа, то это свойство обратной пропорциональности можно сформулировать так: *с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз, соответствующее значение y уменьшается (увеличивается) во столько же раз.*

Это свойство присуще только обратной пропорциональности и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются обратно пропорциональные величины.

ЗАДАЧА № 1. Велосипедист, двигаясь со скоростью 10 км/час, проехал расстояние от А до В за 6 ч. Сколько времени потратит велосипедист на обратный путь, если будет ехать со скоростью 20 км/час.

Решение. В задаче рассматриваются величины: скорость движения велосипедиста, время движения и расстояние от А до В, причем последняя величина постоянна, а две другие принимают различные значения. Кроме того, скорость и время движения – величины обратно пропорциональные, так как их произведение равно некоторому числу, а именно пройденному расстоянию.

Если время движения велосипедиста обозначить y, скорость- x, а расстояние АВ-k, то получим, что $x\,y = k$ или $y = \frac{k}{x}$**,** то есть математической моделью ситуации, представленной в задаче, является обратная пропорциональность.

Решить задачу можно 2 способами:

1 способ :

1) $10 \cdot 6 = 60$ (км)
2) $60 : 20 = 3$ (ч)

Сначала нашли $k = 60$, а затем зная, что $y = 60 / x$, нашли значение y, при условии, что $x = 20$.

2 способ :

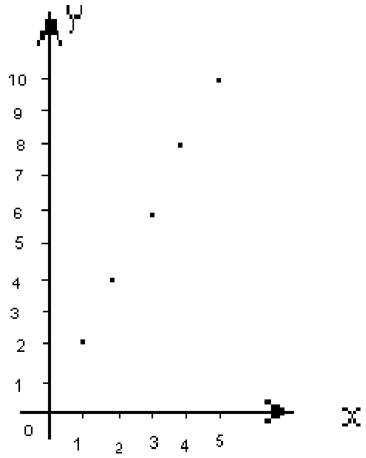
1) $20 : 10 = 2$ (раза)
2) $6 : 2 = 3$ (ч)

Воспользовались свойством обратной пропорциональности: во сколько раз увеличивается скорость движения, во столько же раз уменьшается время на прохождение расстояния АВ.

При решении конкретных задач с обратно пропорциональными или прямо пропорциональными величинами накладываются некоторые ограничения на x и y, в частности, они могут рассматриваться не на всем множестве действительных чисел, а на его подмножествах.

Задача 2. Лена купила x карандашей, а Катя в 2 раза больше. Обозначьте число карандашей, купленных Катей, через y. Выразите y через x и постройте график установленного соответствия при условии, что $x \leq 5$. Является ли это соответствие функцией? Какова её область определения и область значений?

Решение. Катя купила $y = 2x$ карандашей. При построении графика функции $y = 2x$ необходимо учесть, что переменная x обозначает количество карандашей и $x \leq 5$, значит, она может принимать только значения 0,1,2,3,4,5. Это и будет область определения данной функции. Чтобы получить область значений данной функции, нужно каждое значение x из области определения умножить на 2, т. е. это будет множество {0,2,4,6,8,10}. Графиком функции $y = 2x$ с областью определения {0,1,2,3,4,5} будет множество точек, которые изобразим на рисунке.



5. Линейная функция

Если учащийся купил x карандашей по 4 рубля и тетрадь за 13 рублей, то стоимость его покупки может быть определена следующим образом

$y = 4x + 13$.

Зависимость между количеством купленных карандашей и стоимостью всей покупки является функцией, так как каждому значению x соответствует единственное значение y . Эта функция называется л и н е й н о й.

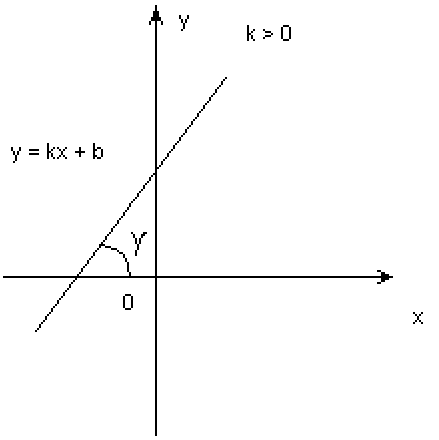
<u>Определение</u>. ***Линейной функцией*** называется функция, которую можно задать при помощи формулы $y = kx + в$, где x – независимая переменная, а k и $в$ – заданные действительные числа.

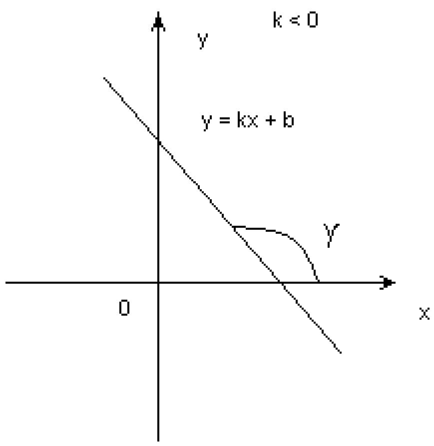
Если, в частности $k = 0$, то получается функция вида $y = в$ - её называют *постоянной функцией*.

Областью определения линейной функции является множество действительных чисел. Графиком линейной функции является прямая. Положение этой прямой на плоскости определяют коэффициенты k и $в$.

Рассмотрим графики функций заданных формулами: $y = \frac{1}{3}x$, $y = x + 2$, $y = 3x + 2$, $y = -3x + 2$. В данных уравнениях коэффициент k принимает различные значения, а коэффициент $в$ постоянен. Если обозначить через γ –угол между осью Ox и графиком линейной функции, и измерять его против часовой стрелки, то можно заметить, что величина угла зависит от коэффициента k.

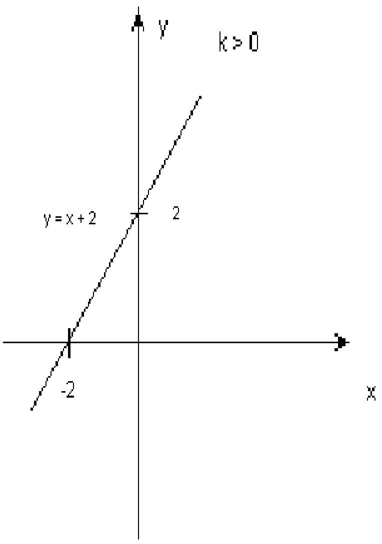
Если $k > 0$, то угол γ острый, если $k < 0$, то угол γ тупой.





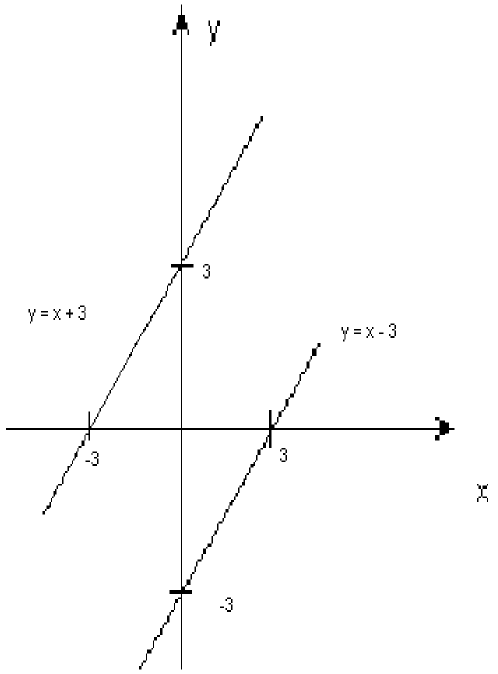
Кроме того, чем больше модуль числа k, тем ближе прямая $y = kx + в$ к оси Oy. Так как коэффициент k связан с углом γ, то k называют *у г л о в ы м к о э ф ф и ц и е н т о м.*

Построим график функции $y = x + 2$.



Задание! Построить графики остальных функций, записанных выше.

Рассмотрим теперь функции, заданные формулами $y = x + 3$ и $y = x – 3$. В них коэффициент k один и тот же, а $в$ принимает разные значения. Сравнивая эти прямые, видно, что при изменении $в$, график перемещается параллельно самому себе. Если $x = 0$, то $y = в$, т. е. точка с координатами $(0,в)$ принадлежит графику функции $y = kx + в$. Следовательно, коэффициент $в$ есть значение длины отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. В нашем случае этот отрезок составляет 3 единицы.



При $k > 0$ функция $y = kx + в$ – возрастает, а при $k < 0$ – убывает на всей области определения. Действительно пусть $x_1 < x_2$, тогда $y_1 = kx_1 + в$, а $y_2 = kx_2 + в$. Сравним y_1 и y_2:

$y_2 - y_1 = (kx_2 + в) - (kx_1 + в) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$.

По условию $(x_2 - x_1) > 0$, значит, знак разности $y_2 - y_1$ зависит от знака коэффициента k. Если $k > 0$, то $y_2 - y_1 > 0$, и следовательно, из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $y_1 < y_2$, т. е. функция $y = kx + в$ возрастает на множестве действительных чисел. Если $k < 0$, то $y_2 - y_1 < 0$, откуда $y_1 > y_2$ и , следовательно, из того, что $x_1 < x_2$, следует, что $y_1 > y_2$, т. е. функция $y = kx + в$ убывает на множестве действительных чисел.

Тема: «Выражения»

План: 1. Алфавит математического языка.

2. Числовые выражения.

3. Выражения с переменными.

4. Тождественные преобразования выражений.

5. Числовые равенства и неравенства.

Выражения

Изучение данного понятия связано с использованием математического языка; он относится к искусственным языкам, которые создаются и развиваются с той или иной наукой. Как и любой другой, математический язык имеет свой алфавит. В него входят:

1) цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9; с их помощью по специальным правилам записываются числа,

2) знаки операций: +, –, *, : ;
3) знаки отношений: <, >, =, ⋮, ≠;
4) строчные буквы латинского алфавита, их применяют для обозначения чисел;
5) скобки (круглые, фигурные и др.), их называют техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слов, называя их выражениями, а из слов получаются предложения – числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

1. Числовые выражения.

В математике встречаются два вида математических выражений – числовые выражения и выражения с переменными. Примерами числовых выражений являются выражения 3+7; 2,5 + 3,7–1,4; 2(3 – 6) + 36 : 9. Они образуются из чисел, знаков действий и скобок. Считают, что каждое число также является числовым выражением. Если выполнить все действия, указанные в выражении, получим число, которое называется значением числового выражения.

Определение. Число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении, называется *значением числового выражения.*

Так, значение числового выражения $3 \cdot 2–4$ равно 2.

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они е имеют смысла. Например, выражение 8:(4–4) смысла не имеет, т.к. его значения найти нельзя, 4–4=0, а деление на нуль невозможно. Выражение $\sqrt{-9}$ также не имеет числового значения во множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого был бы равен –9. Не имеет значения в множестве натуральных чисел и выражение 7–9.

В начальных классах учащиеся первоначально знакомятся с записями вида 2+3, 7–4, называя их соответственно суммой и разностью. Затем появляются числовые выражения и более сложной структуры, но термины «математическое выражение» и «значение выражения» появляются, когда учащиеся производят вычисления в пределах сотни. После знакомства с умножением и делением рассматриваются числовые выражения, содержащие знаки умножения и деления. Учащиеся находят значения числовых выражений, когда записывают решение текстовой задачи в виде числового выражения, составляют по данным выражениям задачи. При выполнении таких заданий учащиеся сталкиваются с выражениям, значения которых в множестве целых неотрицательных чисел найти нельзя. Например, про выражение 6–7 они говорят, что его значение нельзя найти, т.к. нельзя из меньшего числа вычесть большее.

2. Выражения с переменными

Выражения вида $2x+1$, $3x^2+x$, $2^x + 0,5x$ называют выражениями с переменной x. Они образованы из чисел, знаков действий и букв. Выражение может содержать и несколько переменных, например,

$$2x^2y + xyz^3, \qquad 5a^2b\,(x-y)^2, \qquad 3t^2 + v^3 + 1.$$

Если в выражение с переменными подставить вместо переменных конкретные числа, то получим числовое выражение. После выполнения всех действий с числами получится число, которое называют значением выражения с переменными при выбранных значениях переменных.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, т. е. выполнимы все указанные действия, называются *допустимыми значениями* переменных или областью определения выражения. Например, область определения выражения $5:(x-7)$ состоит из всех действительных чисел, кроме числа 7, так как при $x=7$ выражение смысла не имеет.

Значения двух выражений с переменными при одних и тех же значениях переменных называют *соответственными значениями* выражений.

Например, соответственными значениями выражений $2x^2+1$ и $3x^3 + 5x+1$ при $x=1$ являются числа 3 и 9.

Переменную в математике обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например □. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: $2\cdot□+3$.

Таким образом, переменная – это знак (символ), который разрешается заменять числами.

Итак, выяснили, как образуются из алфавита математического языка числовые выражения и выражения с переменными. Если провести аналогию с русским языком, то выражения – это слова математического языка.

Но используя алфавит математического языка, можно образовывать и такие, например, записи: (3+2))–:12 или 3х–у:+)8, которые нельзя назвать ни числовым выражением, ни выражением с переменной. Это говорит том, что необходимо дать строгое определение числового выражения (выражение с переменными определяется аналогично).

Определение. Если f и g– числовые выражения, то $(f)+(g)$, $(f)-(g)$, $(f)\cdot(g)$, $(f):(g)$– числовые выражения. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступни (сложение и вычитание).

В начальной школе работа с буквенными выражениями сводится к подстановке вместо букв их значений и вычислению значения получившегося числового выражения.

3. Тождественные преобразования выражений

Задача. Найти значение выражения $3x(x-2)+4(x-2)$ при $x=6$.

Решение. 1 способ.

Подставим число 6 вместо переменной в данное выражение:

$$6(6–2)+4(6–2)=88.$$

2 способ.

Сначала упростим выражение: $3x(x–2)+4(x–2)=(x–2)(3x+4)$. Затем, подставив в полученное выражение вместо х число 6, выполним действия: (6–2)(18+4)=88.

При первом способе решения и при втором мы одно выражении заменяли другим, причем эти замены привели к одному и тому же результату. В математике, говорят, что выполнили тождественные преобразования выражений.

Определение. Два выражения называют *тождественно равными,* если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.

Например, $5(x+2)$ и $5x+10$ – тождественно равные выражения.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называется *тождеством* на этом множестве.

Например, $5(x+2) = 5x+10$ – тождество на множестве действительных чисел. Тождествами считают и верные числовые равенства.

Определение. Замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называют *тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве.*

Например, заменив выражение $5(x+2)$ на тождественно равное ему выражение $5x+10$, мы выполнили тождественное преобразование первого выражения.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др. Например, чтобы найти произведение $35\cdot4$, надо выполнить преобразования:

$35\cdot4=(30+5)\cdot4=30\cdot4+5\cdot4=120+20=140$.

В основе выполненных преобразований лежат: свойство дистрибутивности умножения относительно сложения, принцип записи чисел в десятичной системе счисления, правила умножения и сложения натуральных чисел.

1. Числовые равенства и неравенства

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $f = g$, которое называют *числовым равенством*.

Возьмем, например, числовые выражения 3+2 и 6–1 и соединим их знаком равенства 3+2=6 –1. Оно истинное. Если же соединить знаком равенства 3+2 и 7–3, то получим ложное числовое равенство. Таким образом, с логической точки зрения числовое равенство это высказывание, истинное или ложное.

Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.

Свойства истинных числовых равенств:

1. Если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.
2. Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком «<» (или «>»). Получим предложение $f< g$ (или $f > g$), которое называют *числовым неравенством*.

Например, если соединить выражение 6+2 и 13–7 знаком «>», то получим истинное числовое неравенство 6+2> 13–7. Если соединить те же выражения знаком «<», получим ложное числовое неравенство. Таким образом, с логической точки зрения числовое неравенство – это высказывание, истинное или ложное.

Свойства числовых неравенств:

1. Если к обеим частям истинного числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство.
2. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство.
3. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и отрицательное значение, а также поменяем знак неравенства на противоположный, то получим также истинное числовое неравенство.

Тема: «Уравнения и неравенства»

План: 1.Уравнения с одной переменной.

2.Теоремы и следствия о равносильности уравнений.

3. Неравенства с одной переменной. Теоремы о равносильности неравенств.

4. Системы и совокупности уравнений.

5. Системы и совокупности неравенств.

1. Уравнения с одной переменной

Возьмем два выражения с переменной: 4х и 5х + 2. Соединив их знаком равенства, получим предложение 4х = 5х + 2. Оно содержит переменную и при подстановке значений переменной обращается в высказывание. Например, при *x* = –2 предложение 4*x* = 5*x* + 2 обращается в истинное числовое равенство 4 ·(-2) = 5·(-2) + 2, а при *x* = 1 – в ложное 4 ·1 = 5 ·1+2. Поэтому предложение 4*x* = 5*x* + 2 есть высказывательная форма. Ее называют ***уравнением с одной переменной***.

В общем виде уравнение с одной переменной можно определить так:

Определение. ***Пусть f(x) и g(x) - два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда высказывательная форма вида f(x) = g(x) называется уравнением с одной переменной.***

Значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется *корнем уравнения* (или его решением). *Решить уравнение* - это значит найти множество его корней.

Так, корнем уравнения 4x = 5x + 2, если рассматривать его на множестве R действительных чисел, является число -2. Других корней это уравнение не имеет. Значит, множество его корней есть {-2}.

Пусть на множестве действительных чисел задано уравнение (x - 1)(x + 2) = 0. Оно имеет два корня - числа 1 и -2. Следовательно, множество корней данного уравнения таково: {-2, -1}.

Уравнение (3x + 1)·2 = 6x + 2, заданное на множестве действительных чисел, обращается в истинное числовое равенство при всех действительных значениях переменной x: если раскрыть скобки в левой части, то получим 6x + 2 = 6x + 2. В этом случае говорят, что его корнем является любое действительное число, а множеством корней множество всех действительных чисел.

Уравнение (3x + 1)· 2 = 6x + 1, заданное на множестве действительных чисел, не обращается в истинное числовое равенство ни при одном действительном значении x: после раскрытия скобок в левой части получаем, что 6x + 2 = 6x + 1, что невозможно ни при одном x. В этом случае говорят, что данное уравнение не имеет корней и что множество его корней пусто.

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала преобразовывают, заменяя другим, более простым; полученное уравнение опять преобразовывают, заменяя более простым, и т.д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают. Такие уравнения называют равносильными.

Определение. ***Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются равносильными, если множества их корней совпадают.***

Например, уравнения x^2 - 9 = 0 и (2x + 6)(x - 3) = 0 равносильны, так как оба имеют своими корнями числа 3 и -3. Равносильны и уравнения (3x + 1)·2 = 6x + 1 и x^2 + 1 = 0, так как оба не имеют корней, т.е. множества их корней совпадают.

Определение. ***Замена уравнения равносильным ему уравнением называется равносильным преобразованием.***

Выясним теперь, какие преобразования позволяют получать равносильные уравнения.

<u>Теорема 1.</u> Пусть уравнение f(x) = g(x) задано на множестве и h(x) - выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнения f(x) = g(x) (1) и f(x) +h(x) = g(x) + h(x) (2) равносильны.

Доказательство. Обозначим через T_1 - множество решений уравнения (1), а через T_2 - множество решений уравнения (2). Тогда уравнения (1) и (2) будут равносильны, если $T_1 = T_2$. Чтобы убедиться в этом, необходимо показать, что любой корень из T_1, является корнем уравнения (2) и, наоборот, любой корень из T_2, является корнем уравнения (1).

Пусть число *a* - корень уравнения (1). Тогда $a \in T_1$, и при подстановке в уравнение (1) обращает его в истинное числовое равенство f(a) = g(a), а выражение h(x) обращает в числовое выражение h(a), имеющее смысл на множестве X. Прибавим к обеим частям истинного равенства f(a) =g(a) числовое выражение h(a). Получим, согласно свойствам истинных числовых равенств, истинное числовое равенство f(a) + h(a) = g(a) + h(a), которое свидетельствует о том, что число a является корнем уравнения (2).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (1) является корнем и уравнения (2), т.е. $T_1 \subset T_2$.

Пусть теперь *a* - корень уравнения (2). Тогда $a \in T_2$ и при подстановке в уравнение (2) обращает его в истинное числовое равенство f(a) + h (a) = g(a) + h (a). Прибавим к обеим частям этого равенства числовое выражение - h(a). Получим истинное числовое равенство f(a) =g(a), которое свидетельствует о том, что число *a* - корень уравнения (1).

Итак, доказано, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1),т.е. $T_2 \subset T_1$.

Так как $T_1 \subset T_2$ и , $T_2 \subset T_1$ то по определению равных множеств $T_1 = T_2$, а значит, уравнения (1) и (2) равносильны.

Данную теорему можно сформулировать иначе: ***если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному.***

Из этой теоремы вытекают следствия, которые используются при решении уравнений:

1. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному*

2. *Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному*.

<u>Теорема 2.</u> Пусть уравнение *f(x) = g(x)* задано на множестве X и *h(x)* - выражение, которое определено на том же множестве и не обращается в нуль ни при каких значениях *x* из множества X. Тогда уравнения *f(x) =g(x)* и $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ равносильны.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорему 2 можно сформулировать иначе: ***если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение, которое***

определено на том же множестве и не обращается на нем в нуль, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекает следствие: *если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.*

Решим уравнение $1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$, $x \in$ **R**, и обоснуем все преобразования, которые будем выполнять в процессе решения.

Преобразования	**Обоснование преобразований**
1. Приведем выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, к общему знаменателю: $\frac{6-2x}{6} = \frac{x}{6}$	Выполнили тождественное преобразование выражения в левой части уравнения.
2. Отбросим общий знаменатель: 6- 2x = x.	Умножили на 6 обе части уравнения (теорема 2), получили уравнение, равносильное данному.
3. Выражение -2x переносим в правую часть уравнения с противоположным знаком: 6 = x + 2x.	Воспользовались следствием из теоремы 1, получили уравнение, равносильное предыдущему и, значит, данному.
4, Приводим подобные члены в правой части уравнения: 6 = 3x.	Выполнили тождественное преобразование выражения.
5. Разделим обе части уравнения на 3: x = 2.	Воспользовались следствием из теоремы 2, получили уравнение, равносильное предыдущему, а значит, и данному

Так как все преобразования, которые мы выполняли, решая данное уравнение, были равносильными, то можно утверждать, что 2 - корень этого уравнения.

Если же в процессе решения уравнения не выполняются условия теорем 1 и 2, то может произойти потеря корней или могут появиться посторонние корни. Поэтому важно, осуществляя преобразования уравнения с целью получения более простого, следить за тем, чтобы они приводили к уравнению, равносильному данному.

Рассмотрим, например, уравнение x(x - 1) = 2x, x $\in$ R. Разделим обе части на x, получим уравнение x - 1 = 2, откуда x = 3, т. е. данное уравнение имеет единственный корень - число 3. Но верно ли это? Нетрудно видеть, что если в данное уравнение вместо переменной x подставить 0, оно обратится в истинное числовое равенство 0·(0 - 1) = 2 ·0. А это означает, что 0 - корень данного уравнения, которьй мы потеряли, выполняя преобразования. Проанализируем их. Первое, что мы сделали, - это разделили обе части уравнения на x, т.е. умножили на выражение $\frac{1}{x}$, но при x = 0 оно не имеет смысла. Следовательно, мы не выполнили условие теоремы 2, что и привело к потере корня.

Чтобы убедиться в том, что множество корней данного уравнения состоит из двух чисел 0 и 3, приведем другое его решение. Перенесем выражение 2x из правой части в левую: $x(x - 1) - 2x = 0$. Вынесем в левой части уравнения за скобки x и приведем подобные члены: x(x - 3) = 0. Произведение двух множителей равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы один из них равен нулю, поэтому x = 0 или x - 3 = 0. Отсюда получаем, что корни данного уравнения - 0 и 3.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий. Например, решение уравнения $(x \cdot 9):24 = 3$ обосновывается следующим образом. Так как неизвестное находится в делимом, то, чтобы найти делимое, надо делитель умножить на частное: $x \cdot 9 = 24 \cdot 3$, или $x \cdot 9 = 72$.

Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель: $x = 72:9$, или $x = 8$, следовательно, корнем данного уравнения является число 8.

2. Неравенства с одной переменной

Предложения $2x + 7 > 10-x$, $x^2+7x < 2$, $(x + 2)(2x-3) > 0$ называют неравенствами с одной переменной.

В общем виде это понятие определяют так:

Определение. Пусть *f(x)* и *g(x)* - два выражения с переменной *x* и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называется ***неравенством с одной переменной.*** Множество X называется *областью его определения.*

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его *решением*. **Решить неравенство - это значит найти множество его решений.**

Так, решением неравенства $2x + 7>10-x$, $x \in \mathbf{R}$ является число $x = 5$, так как $2 \cdot 5 + 7 > 10 - 5$ - истинное числовое неравенство. А множество его решений - это промежуток $(1, \infty)$, который находят, выполняя преобразование неравенства: $2x + 7 > 10-x \Rightarrow 3x>3 \Rightarrow x>1$.

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Определение. Два неравенства называются ***равносильными,*** если их множества решений равны.

Например, неравенства $2x + 7> 10$ и $2x>3$ равносильны, так как их множества решений равны и представляют собой промежуток $(\frac{2}{3},\infty)$.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны соответствующим теоремам о равносильности уравнений. При их доказательстве используются свойства истинных числовых неравенств.

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и *h(x)* - выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используются при решении неравенств:

1) Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число *d*,

то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному.
2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d, то получим неравенство $f(x) \cdot d > g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Теорема 5. Пусть неравенство $f(x) > g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, определенное на том же множестве, и для всех x их множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x) \cdot d < g(x) \cdot d$, равносильное данному.

Решим неравенство $5x - 5 < 2x + 16$, $x \in \mathbf{R}$, и обоснуем все преобразования, которые мы будем выполнять в процессе решения.

Преобразования	**Обоснование преобразований**
1. Перенесем выражение 2х в левую часть, а число -5 в правую, поменяв их знаки на противоположные: $5x - 2x < 16 + 5$	Воспользовались следствием 2 из теоремы 3, получили неравенство, равносильное исходному.
2. Приведем подобные члены в левой и правой частях неравенства: $3x < 21$.	Выполнили тождественные пре-образования выражений в левой и правой частях неравенства - они не нарушили равносильности неравенств: данного и исходного.
3. Разделим обе части неравенства на 3: $x<7$.	Воспользовались следствием из теоремы 4, получили неравенство, равносильное исходному.

Решением неравенства $x <7$ является промежуток $(-\infty, 7)$ и, следовательно, множеством решений неравенства $5x - 5 < 2x + 16$ является промежуток $(-\infty, 7)$.