Раздел «Логические основы математики» (Теория множеств)

3. Свойства пересечения и объединения множеств

Из школьного курса математики известно, что операцию, при помощи которой находят сумму чисел, называют сложением. Выполняют и другие операции над числами: вычитание, умножение, деление. При этом результаты этих операций называют соответственно разностью, произведением, частным. Для рассмотренных операций над множествами, ситуация другая: операции, при помощи которых находят пересечение и объединение, называют соответственно пересечением и объединением.

Известно так же, что операции над числами обладают рядом свойств. Например, переместительное и сочетательное свойства сложения: *а+в=в+а* и *(а+в)+с=а+(в+с)*. Аналогичными свойствами обладает умножение.

Выясним, обладают ли похожими свойствами пересечение и объединение множеств.

Если обратиться к пересечению и объединению множеств, то можно увидеть, что в них не фиксируется порядок оперирования множествами (при объединении к элементам одного множества можно присоединить элементы другого, а можно поступить наоборот) – это означает, что пересечение и объединение обладают переместительным (или коммутативным) и сочетательным (или ассоциативным) свойством.

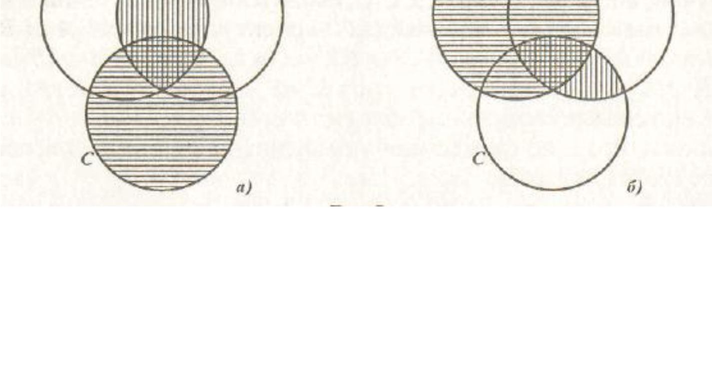
Свойства пересечения:

1. Коммутативность: $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap U = A$
6. $A \cap A = A$

Свойства объединения:

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup U = U$
6. $A \cup A = A$

Проиллюстрируем с помощью кругов Эйлера ассоциативное свойство пересечения множеств. Изобразим множества А, В и С в виде трех попарно пересекающихся кругов.



Видим, что области, представляющие множества $(A\cap B)\cap C$ и $A\cap(B\cap C)$, одинаковы, что и подтверждает справедливость свойства ассоциативности для пересечения множеств.

Аналогично можно показать свойство ассоциативности и для объединения множеств.

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в распределительных или дистрибутивных свойствах этих операций. Таких свойств два:

1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множества, т.е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т.е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство:
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Замечание. Если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение. Поэтому в записи дистрибутивного свойства пересечения относительно объединения можно опустить скобки в правой части равенства.

Если провести аналогию с действиями над числами, то можно увидеть, что дистрибутивное свойство пересечения относительно объединения сопоставимо с распределительным свойством умножения относительно сложения, при условии, что в качестве операций, аналогичной пересечению, рассматривают умножение, а для объединения – сложение. Но для дистрибутивного свойства объединения множеств относительно пересечения аналогичного свойства над числами нет.

Понятие пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1$ и $x \in A_2$ и…и $x \in A_n\}$,

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1$ или $x \in A_2$ или … $x \in A_n\}$.

Аналогично можно поступить и по отношению к рассмотренным свойствам данных операций.

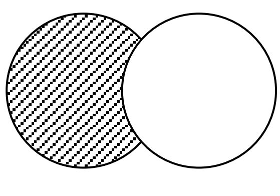
4. Вычитание множеств. Дополнение множества

Если заданы два множества, то можно не только найти их пересечение и объединение, но и вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называется разностью и определяют следующим образом.

Определение. ***Разностью множества A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.***

Обозначают разность $A \setminus B$. Тогда по определению: $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$.

С помощью кругов Эйлера разность изобразится следующим образом:



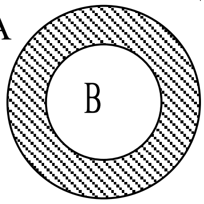
A B

Видно, что A \ B = A \ (A ∩ B).

В школьном курсе математики чаще всего приходиться выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность A \ B называется дополнением множества B до множества A и обозначают B'_A = A \ B.

С помощью кругов Эйлера дополнение изображают:

A

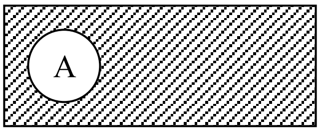


Определение. ***Пусть B⊂A. Дополнением множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B.***

Отсюда следует: $B'_A = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Определение. Разность между универсальным множеством U и множеством A называется дополнением множества A и обозначают $\overline{A}$.

$\overline{A}$ =U \ A.



Справедливо следующее выражение: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Выясним, как находить дополнение подмножества на конкретных примерах. Если элементы множеств A и B перечислены и B ⊂ A, то чтобы найти дополнение достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B. Например, если A={1,2,3,4,5}, B={2,4}, то B'_A={1,3,5}.

В случае когда указаны характеристические свойства элементов множества A и B и известно, что B⊂ A, то множество B'_A задают так же с помощью характеристического свойства, общий вид которого "$x \in$A и x$\notin$B". Так, если A – множество четных чисел, а B– множество чисел, кратных 4, то B'_A – множество, содержащее такие четные числа, которые не делятся на 4.

Условились считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Что касается объединения множеств и вычитания, то их считают равноправными.

Вычитание множеств обладает рядом *свойств,* т.е. для любых множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

1. (A \ B)\ C = (A \ C) \ B,
2. (A ∪ B) \ C = (A \ C) ∪ (B \ C),
3. (A \ B) ∩ C = (A ∩ C) \ (B ∩ C),
4. A \ (B ∪ C) = (A \ B) ∩ (A \ C),
5. A \ (B ∩ C) = (A \ B) ∪ (A \ C).

5. Разбиение множества на классы

В жизни приходится сталкиваться с задачами классификации. Предположим, что при сборе яблок в саду нужно определить какие яблоки необходимо сохранить до зимы, какие следует съесть сразу, а какие предназначены на переработку. С точки зрения математики, множества всех собранных яблок разбивается на три непересекающихся множества: A_1, A_2, A_3.

В науке проблема классификации является одной из самых важных задач. Особенно хорошо это видно на примере ботаники, где существует очень сложная «многоступенчатая» классификация растений.

В математике буквально с первых лет обучения дети узнают, что бывают числа, записываемые с помощью одного знака и двух знаков. Более старшие ученики узнают, что есть еще трехзначные, четырехзначные и т. д. записи чисел.

В этом примере множество всех натуральных чисел оказалось разбитым на бесконечное число классов по количеству цифр в десятичной записи чисел.

Классификацию выполняют достаточно часто. Например, натуральные числа представляем как два класса – четные и нечетные. Углы на плоскости разбиваем на три класса: прямые, острые и тупые.

Определение. ***Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы $X_1,X_2\dots X_n,\dots$, если:***

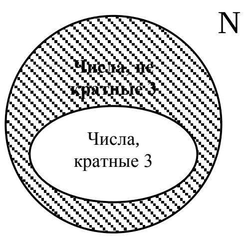
1. ***подмножества $X_1,X_2\dots X_n$, … не пересекаются,***
2. ***объединение подмножеств $X_1,X_2\dots X_n$, … совпадает с множеством X.***

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной. Например, если из множества треугольников выделить подмножества равнобедренных, равносторонних, разносторонних треугольников, то разбиения мы не получим, так как подмножества равнобедренных и равносторонних треугольников пересекаются (не выполнено первое условие классификации).

6. Разбиение множества на классы с помощью свойств

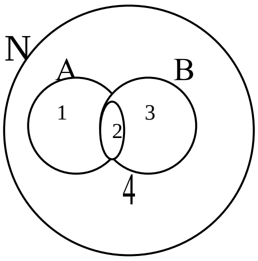
Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают разными свойствами. Предположим, что нас интересуют числа, обладающие свойством “быть кратным 3”. Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные числа можно сказать, что они не кратны 3, т.е. получаем еще одно подмножество множества натуральных чисел. Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то получаем разбиение этого множества на два класса.



Вообще, *если на множестве X задано одно свойство, то это множество разбивается на два класса. Первый – класс, обладающий этим свойством, а второй – класс объектов, не обладающих этим свойством.*
Такая классификация называется <u>*дихотомической.*</u>

Рассмотрим ситуацию, когда для элементов множества N заданы два свойства: “быть кратным 3” и “быть кратным 5”. При помощи этих свойств из множества натуральных чисел можно выделить два подмножества: A – подмножество чисел кратных 3, B – подмножество чисел кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.

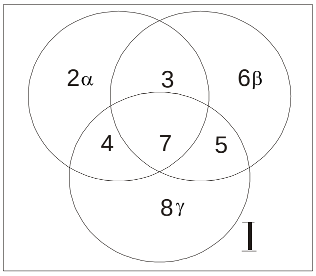


Разбиения множества натуральных чисел на подмножества A и B не произошло, но круг, изображающий множество N, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей. Каждая область изображает некоторое подмножество множества N:
1– множество чисел кратных 3, но не кратных 5,
2– множество чисел кратных 3 и кратных 5,
3– множество чисел кратных 5, но не кратных 3,
4– множество чисел не кратных 3 и не кратных 5.
Объединение этих четырех подмножеств есть множество N.

Таким образом, выделение <u>*двух свойств*</u> привело к разбиению множества N натуральных чисел на <u>*четыре класса*</u>.

Не всегда задание двух свойств элементов множества приводит к разбиению этого множества на 4 класса. Например, при помощи двух свойств «быть кратным 3» и «быть кратным 6» множество натуральных чисел разбивается на три класса: I– класс чисел, кратных 6, II– класс чисел, кратных 3, но не кратных 6, III– класс чисел, не кратных 3.

Рассмотрим случай, когда есть 3 свойства: α, β, γ. В общем случае разбиение множества на классы изображено следующим образом:



Нетрудно подсчитать, что получилось в этом случае восемь классов. Они помечены цифрами от 1 – 8. Класс, обозначенный цифрой 5, состоит из всех элементов множества, обладающих свойствами β и γ и не обладающих свойством α. Класс 7 состоит из всех элементов, обладающих свойствами α, β, γ.

Таким образом, можно подметить закономерность: *при разбиении множества на классы с помощью n свойств получается* $\boldsymbol{2^n}$ *классов разбиения*. Если это верно, то в случае 4-х свойств, классов должно быть 16.

Задание ! Приведите пример и опишите задание из начальной школы, в котором применяется классификация объектов (с помощью одного и двух свойств).

Лекция № 3

План:

1. Декартово произведение множеств и его свойства.
2. Графическое изображение декартова произведения двух множеств.
3. Понятие кортежа. Декартово произведение n множеств.
4. Число элементов в объединении и разности конечных множеств.
5. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств.

1. Декартово произведение множеств и его свойства

С понятием декартова произведения можно было встретиться при изучении математики в средней школе, а именно при изучении «декартовой» прямоугольной системы координат.

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33, 55. Несмотря на то, что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, числа различны. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов.

Упорядоченную пару, образованную из элементов а и в, принято записывать, используя круглые скобки: ($a; в$). Элемент a называется *первой координатой (компонентой) пары*, а элемент *в – второй координатой (компонентой) пары*.

В работе с детьми часто возникает необходимость образовывать пары: строит детей парами, сроить слоги из пар букв и т. п.

Пары ($a; в$) и ($c; d$) равны в том случае, когда $a=c$ *и* $в=d$.

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, А={1,2,3}, В={3,5}. Образуем упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству А, а вторая – множеству В. Перечислив все такие пары, получим множество: {(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)}. Это множество называют декартовым произведением множеств А и В.

Определение. ***Декартовым произведением множеств А и В называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая компонента принадлежит множеству В.***

Обозначают декартово произведение А×В. Тогда по определению можно записать: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ и } y\in B\}$.

Выясним, какими свойствами обладает операция нахождения декартова произведения множеств. Так как декартовы произведения А×В и В×А состоят из различных элементов, то операция нахождения декартова произведения множеств свойствами коммутативности и ассоциативности не обладает. Но она дистрибутивна относительно объединения и вычитания множеств, т.е. для любых множеств А, В и С выполняются равенства:

1. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$,
2. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

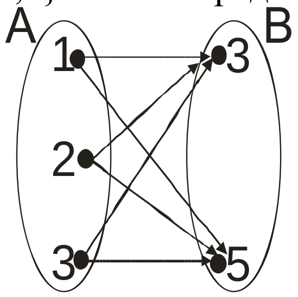
Проверим справедливость свойства дистрибутивности декартова произведения относительно объединения, если A={3, 4, 5}, B={5, 7}, C={7, 8}.
A∪B={3,4,5,7}, (A∪B)×C=<u>{(3,7), (3,8), (4,7), (4,8), (5,7),(5,8), (7,7), (7,8)}.</u>
A×C={(3,7), (3,8), (4,7), (4,8), (5,7),(5,8)}, B×C={(5,7),(5,8), (7,7), (7,8)},
(A×C)∪(B×C)= <u>{(3,7), (3,8), (4,7), (4,8), (5,7),(5,8), (7,7), (7,8)}.</u>
Видим, что множества (A∪B)×C и (A×C)∪(B×C) состоят из одних и тех же элементов, следовательно данное равенство справедливо.

Задание! Показать самостоятельно справедливость невыполнения свойств коммутативности и ассоциативности.

2. Графическое изображение декартова произведения двух множеств

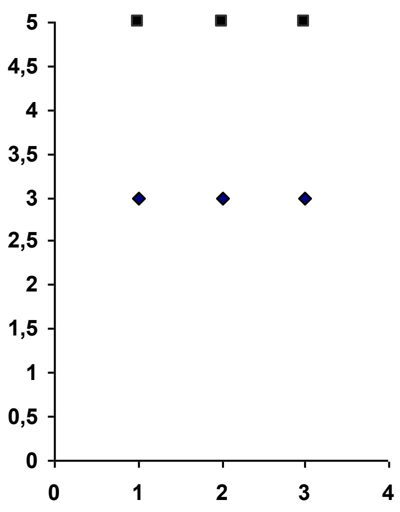
Выясним, как можно наглядно представить декартово произведение.

Если множества A и B конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств при помощи графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств A={1,2,3} и B={3,5} можно представить так:



B / A	**3**	**5**
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости. Например, декартово произведение A×B множеств A={1,2,3} и B={3,5} на координатной плоскости будет выглядеть так:



Заметим, что элементы множества А мы изобразили на оси $0x$, а элементы множества В– на оси $0y$. Такой способ наглядного представления декартово произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

Задача. Изобразите на координатной плоскости декартово произведение А×В, если:

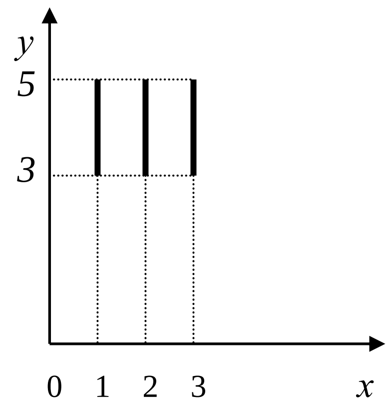
а) А={1,2,3}, В=[3,5],

б) А=[1,3], В=[3,5],

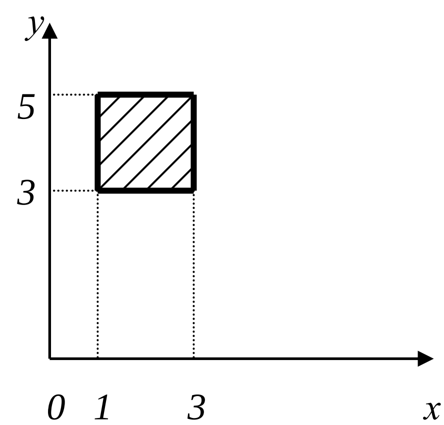
в)А=R, В=[3,5],

г) А=R, В=R.

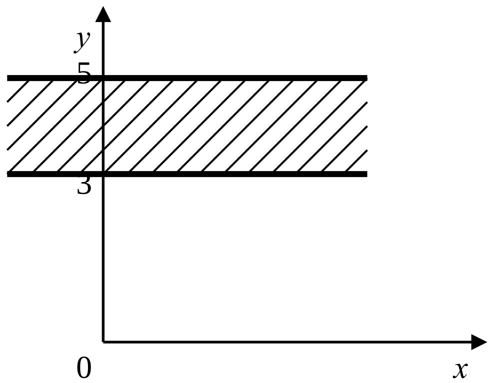
Решение**:** а) Так как множество А состоит из 3-х элементов, а множество В содержит все действительные числа от 3 до 5, включая эти числа, то декартово произведение А×В состоит из бесконечного множества пар, первая компонента которых либо 1, либо 2, либо 3, а вторая – любое действительное число из промежутка [3;5]. Такое множество пар действительных чисел на координатной плоскости изобразится 3-мя отрезками.



б) В этом случае бесконечны оба множества А и В. Поэтому первой координатой пары, принадлежащей множеству А×В, может быть любое число из промежутка [1; 3], и, следовательно, точки, изображающие элементы декартова произведения данных множеств, образуют квадрат.



в) Этот случай отличается от предыдущего тем, что множество А состоит из всех действительных чисел, т.е. абсцисса точек, изображающих элементы множества A×B, принимает все действительные значения, в то время как ордината выбирается из промежутка [3; 5]. Множество таких точек образует полосу.



г) Декартово произведение R×R состоит из всевозможных действительных чисел. Точки, изображающие эти пары, сплошь заполняют координатную плоскость. Таким образом, декартово произведение R×R содержит столько же элементов, сколько точек находится на координатной плоскости.

3. Понятие кортежа. Декартово произведение *n* множеств

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и т.д. элементов. Например, запись числа 367 - это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» - это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют *кортежами* и различают по длине. *Длина кортежа* - это число элементов, из которых он состоит. Например, (3; 6; 7) - это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) – это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще *n* множеств.

Определение. ***Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество всех кортежей длины n, первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству $A_2, \ldots$, n-я – множеству A_n.***

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают так: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Задача. Даны множества: $A_1 = \{2, 3\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{6, 7\}$. Найти $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Решение. Элементами множества $A_1 \times A_2 \times A_3$ будут кортежи длины 3 такие, что первая их компонента принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2, третья – множеству A_3.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(2, 3, 6), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2,4, 7), (2, 5, 6), (2, 5, 7), (3, 3, 6), (3, 3, 7), (3, 4, 6), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3,5, 7)\}.$$

4. Число элементов в объединении и разности конечных множеств

Чтобы найти число элементов объединения двух конечных непересекающихся множеств, достаточно найти это объединение и пересчитать элементы. Но можно определять число элементов в объединении конечных множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов. Выясним как это делать.

Условимся предложение «Множество А содержит a элементов» записывать в таком виде: $n(A)= a$. Например, если А = {x, y, z}, то утверждение «Множество А содержит три элемента» можно записать так: $n(A) = 3$.

Можно доказать, что если в множестве А содержится a элементов, а в множестве В – b элементов и множества А и В не пересекаются, то в объединении множеств А и В содержится $a + b$ элементов, т.е.

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) = a + b. \qquad (1)$$

Это правило нахождения числа элементов в объединении двух конечных *непересекающихся* множеств, его можно обобщить на случай t попарно непересекающихся множеств, т.е. если множества $A_1, A_2,\ldots, A_t$ попарно не пересекаются, то $n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_t) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_t)$.

Пример. $A = \{x, y, z\}$, $B = \{k, l, m, p\}$, $C = \{q, s\}$. Найдем число элементов в объединении данных множеств.

Пересчитав элементы данных множеств, получаем, что $n(A) = 3$, $n(B) = 4$, и $n(C) = 2$. Видим, что $A\cap B = \varnothing$, $A\cap C =\varnothing$, $B\cap C =\varnothing$, т.е. данные множества попарно не пересекаются. Тогда, согласно правилу нахождения числа элементов в объединении конечных множеств, получаем:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) = 3 + 4 + 2 = 9.$$

Таким образом, в объединении заданных трех множеств содержится 9 элементов.

Формула (1) позволяет находить число элементов в объединении конечных непересекающихся множеств. А если множества А и В имеют общие элементы, то как найти число элементов в их объединении?

Пусть, например, $A = \{x, y, z\}$, а $B = \{x, z, p, s, k\}$. Тогда $A\cup B = \{x, y, z, p, s, k\}$, т. е. если $n(A) = 3$, $n(B) = 5$ и $A\cap B \neq \varnothing$, то $n(A\cup B) = 6$. Нетрудно видеть, что в данном случае $n(A\cap B) = 2$ и, значит, общие элементы множеств А и В в объединении этих множеств записаны только один раз.

В общем виде правило подсчета элементов в объединении двух конечных множеств может быть представлено в виде формулы:

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B). \qquad (2)$$

Еще более сложно выглядит формула для подсчета числа элементов объединения трех множеств:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $B \subset A$, то

$$n(B'_A) = n(A) - n(B),$$

т.е. число элементов дополнения подмножества В до данного конечного множества А равно разности численностей этих множеств.

Пусть, например, А = $\{x, y, z, p, t\}$, В = $\{x, p, t\}$. Найдем число элементов в дополнении подмножества В до множества А.

Пересчитав элементы множеств А и В, получаем, что $n(A) = 5$, $n(B) = 3$. Тогда $n(B'_A) = n(A) - n(B) = 5 – 3 = 2$. Таким образом, в дополнении множества В до множества А содержится два элемента.

Полученные формулы для подсчета числа элементов в объединении двух и более множеств можно использовать для решения текстовых задач следующего вида.

Задача. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21 -немецкий язык, а 15 - английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение. Пусть А - множество студентов курса, изучающих английский язык, В - множество студентов курса, изучающих немецкий язык, С - множество всех студентов курса. По условию задачи: $n(A) = 32$, $n(B) = 21$, $n(A \cap B) = 15$, $n(C) = 40$. Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1) Найдем число элементов в объединении данных множеств А и В. Для этого воспользуемся формулой (2):

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 32 + 21 – 15 = 38$.

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: 40 - 38 = 2.

5. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств

Выясним, как узнать, сколько элементов находится в декартовом произведении множеств А и В, не прибегая к нахождению самого декартова произведения и пересчету его элементов.

Можно доказать, что если в множестве А содержится a элементов, а в множестве В - b элементов, то в декартовом произведении множеств A и B содержится $a \cdot b$ элементов, т.е.

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = a \cdot b\ .$$

Правило распространяется на случай t множеств, т.е. $n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \ldots \cdot n(A_t)$.

Полученные формулы можно использовать при решении задач.

Задача 1. У Маши 3 различных юбки и 4 различных кофты. Сколько различных комплектов, состоящих из юбки и кофты, она может составить?
Решение. Пусть А - множество юбок у Маши, В - множество кофт у нее. Тогда, по условию задачи, $n(A) = 3$, $n(B) = 4$. Требуется найти число возможных пар, образованных из элементов множеств А и В, т.е. $n(A \times B)$. Но согласно правилу $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 4 = 12$. Таким образом, из 3 юбок и 4 кофт Маша может составить 12 различных комплектов.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 5, 4 и 7?

Решение. Запись любого двузначного числа состоит из двух цифр и представляет собой упорядоченную пару. В данном случае эти пары образуются из элементов множества $A = \{5, 4, 7\}$. В задаче требуется узнать число таких пар, т.е. число элементов в декартовом произведении $A \times A$. Согласно правилу $n(A \times A) = n(A) \cdot n(A) = 3 \cdot 3 = 9$. Значит, двузначных чисел, записанных с помощью цифр 5, 4 и 7, будет 9.