<u>Раздел Соответствия и отношения</u>

Тема: «Соответствия»

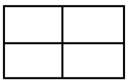
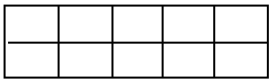
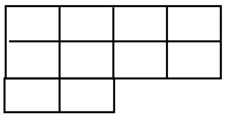
1. Понятие соответствия между двумя множествами

Изучая окружающий нас мир, математика рассматривает не только его объекты, но и главным образом связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями. Например, при вычислении длин предметов устанавливаются соответствия между предметами и числами, которые являются значениями их длин.

Конкретные зависимости, соответствия, отношения между объектами в математике изучались с момента ее возникновения. Но вопрос о том, что общее имеют самые разные соответствия, какова сущность любого соответствия, был поставлен в конце XIX – начале XX века. Ответ на него был найден в рамках теории множеств.

В начальном курсе математики изучаются различные взаимосвязи между элементами одного, двух и более множеств. Поэтому учителю надо понимать их суть, что поможет ему обеспечить единство в методике изучения этих взаимосвязей.

Рассмотрим три примера соответствий, изучаемых в начальном курсе математики.

I. Найти значение выражения	**II. Найти площадь фигуры**	**III. Решить уравнение:**
b_1) (17–1):4, b_2) (12+18):(6–6), b_3) $2\cdot 7+6$.	F_1  F_2  F_3 	y_1) $2+x = 6$, y_2) $x–7 = 4$, y_3) $2x = 8$.

В первом случае мы устанавливаем соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями. Во втором – выясняем, какое число соответствует каждой из данных фигур, характеризуя ее площадь. В третьем ищем число, которое является решением уравнения.

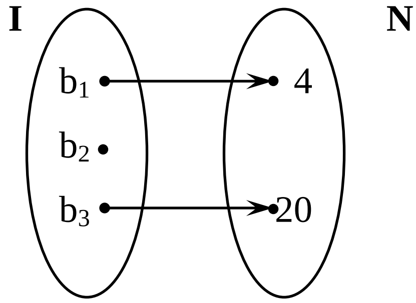
Во всех случаях имеем два множества:

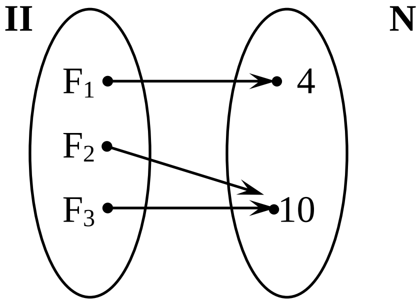
I. Множество из трех числовых выражений и множество **N** натуральных чисел.

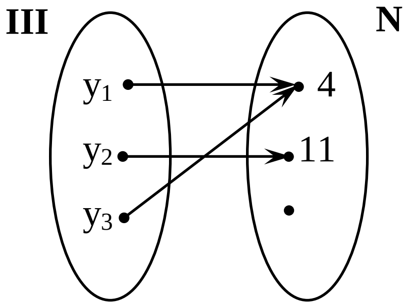
II. Множество из трех геометрических фигур и множество **N**.

III. Множество из трех уравнений и множество **N.**

Выполняя эти задания, мы устанавливаем связь (соответствие) между этими множествами. Ее можно представить наглядно, при помощи графов.







Можно задать эти соответствия, перечислив все пары элементов, находившихся в заданном соответствии:

I. $\{(в_1,4), (в_3,20)\}$,

II. $\{(F_1,4), (F_2,10), (F_3,10)\}$,

III. $\{(y_1,4), (y_2,11), (y_3,4)\}$.

Полученные множества показывают, что любое соответствие между двумя множествами Х и У можно рассматривать как *множество упорядоченных пар*, образованных из их элементов. А так как упорядоченные пары – это элементы декартового произведения, то приходим к определению понятия соответствия.

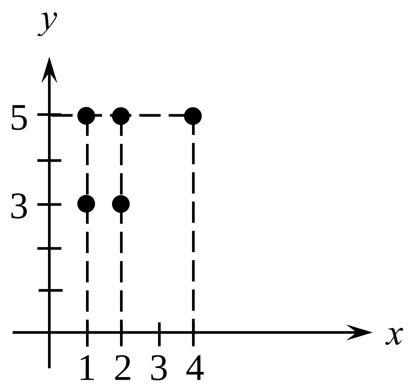
Определение. ***Соответствием между множествами Х и У называется всякое подмножество декартового произведения этих множеств.***

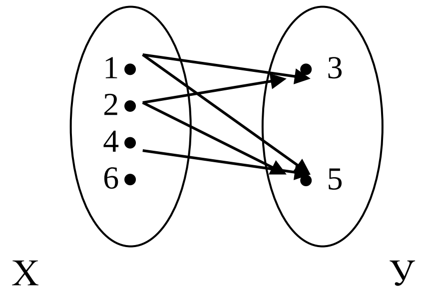
Соответствие обозначают буквами: P, S, T, R и др. Если S – соответствие между элементами множеств Х и У, то по определению $S \subset X \times У$.

2. Способы задания соответствий

Поскольку соответствие – это подмножество, то его можно задавать как любое множество, т. е. либо *перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии*, либо *указав характеристическое свойство элементов этого подмножества*. Например, соответствие между множествами
Х = {1,2,4,6} и У = {3,5} можно задать:

1) при помощи предложения с двумя переменными: $а < в$ при условии, что $а \in X$; $в \in У$;
2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартового произведения Х×У: {(1,3); (1,5); (2,3); (2,5); (4,5)}. К этому способу задания относят соответствие при помощи графа и графика:





3) Если множества конечны, то соответствия между ними можно задать с помощью таблицы. Например:

Ф. И. О.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Иванов						
Петров						
Сидоров						
Никитин						
Козлов						
Панова						

3. Виды соответствий

Пусть, например, S – это соответствие «больше на 2» между множествами X = {4,5,8,10} и У={2,3,6}. Тогда S = {(4,2),(5,3),(8,6)}.

Соответствие, обратное данному – это соответствие «меньше на 2». Оно рассматривается между множествами У и X, и чтобы его представить наглядно, достаточно на графе соответствия S направление стрелок поменять на противоположное. Обозначают соответствие, обратное данному S^{-1}. Тогда S^{-1} = {(2,4),(3,5),(6,8)}.

Задание! Построить графы соответствий S и S^{-1}, указанных в примере.

Условимся, предложение «элемент *x* находится в соответствии S с элементом *y*» записывать кратко: *x S y*.

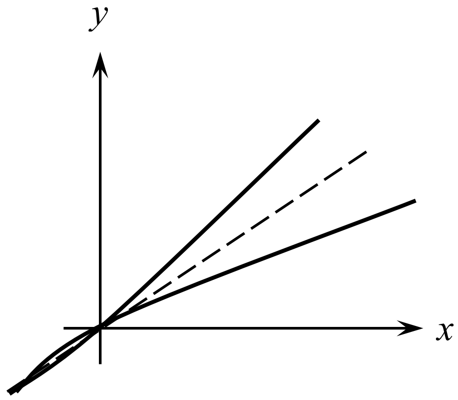
Определение. ***Пусть S – соответствие между множествами X и У. Соответствие S^{-1} между множествами У и X называется обратным данному, если y S^{-1}x, тогда и только тогда, когда xSy.***

Соответствия S и S^{-1} называют *взаимно обратными*.

Графики взаимно обратных соответствий S и S^{-1} симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Задание! Убедиться в этом с помощью построения соответствий, указанных в вышеизложенном примере.

Чтобы построить график соответствия S^{-1}, достаточно изобразить на координатной плоскости точки, симметричные точкам графика S, относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.



Определение. ***Соответствие S', график которого является дополнением к графику соответствия S до декартова произведения X×Y, называется соответствием, противоположным данному соответствию S.***

Например, для множеств X = {4,5,8,10} и Y={2,3,6} и заданного на них соответствия S – «больше на 2», т.е. S = {(4,2),(5,3),(8,6)} можно получить соответствие S', противоположное данному следующим образом:
X×Y={(4,2), (4,3), (4,6), (5,2), (5,3), (5,6), (8,2), (8,3), (8,6), (10,2), (10,3), (10,6)}
S'={(4,3), (4,6), (5,2), (5,6), (8,2), (8,3), (10,2), (10,3), (10,6)}.
Задание! Построить график полученного соответствия S'.

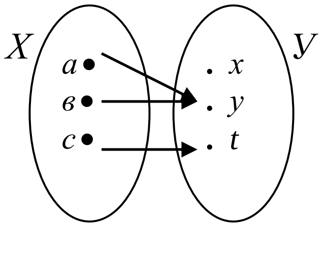
4. Отображения. Взаимно однозначные соответствия

В математике выделяют различные виды соответствий. Это неслучайно, поскольку взаимосвязи, существующие в окружающем нас мире, многообразны.

Рассмотрим важный частный случай понятия соответствия – отображения множеств. При соответствии между множествами Х и У образ элемента $a \in X$ может оказаться пустым, а может содержать и несколько элементов.

Определение. ***Отображением множества Х в множество У называется такое соответствие между этими множествами, что образ любого элемента a∈X состоит из одного и только одного элемента множества У.***

Таким образом, график отображения множества Х в множество У не может содержать двух различных пар (a, y_1) и (a, y_2) с одной и той же первой компонентой. При этом для любого $a \in X$ в нем найдется пара вида ($a,в$), где $в \in У$. На графе отображения Х в У из каждой точки множества Х будет выходит одна и только одна стрелка.

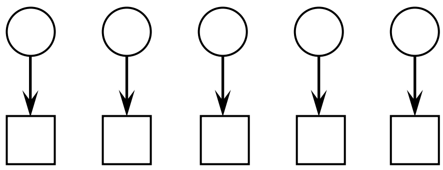


Обозначают отображения $f : X \rightarrow Y$, $X \xrightarrow{f} Y$. Здесь f – символ самого отображения. Если при отображении f элементу x соответствует элемент y, то пишут: $f : x \rightarrow y$ или $x \xrightarrow{f} y$ или $y= f(x)$.

Пример: Х– множество студентов в аудитории, У – множество столов в той же аудитории, причем каждый студент сидит за одним из столов. Соответствие «Студент *x* сидит за столом *y*» задает отображение Х в У. Образом студента *x* при этом отображении является стол, за которым он сидит.

Определение. ***Взаимно однозначным соответствием между множествами Х и У называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества Х сопоставляется единственный элемент множества У и каждый элемент множества У соответствует только одному элементу множества Х.***

Пример 1: Х– множество кружков, У– множество квадратов и соответствие между ними задано при помощи стрелок.



Это соответствие взаимно однозначное, так как каждому кружку из множества Х сопоставляется единственный квадрат из множества У и каждый квадрат из У соответствует только одному кружку из множества Х.

Пример 2: Х – множество действительных чисел, У – множество точек координатной прямой. Соответствие между ними: действительному числу сопоставляется точка координатной прямой.

Вопрос! Будет ли данное соответствие взаимно однозначным? Ответ обоснуйте.

В математике взаимно однозначное соответствие часто называют *взаимно однозначным отображением множества Х на множество У.*

5. Равномощные и счетные множества

Определение. ***Множества Х и У называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.***

Обозначают Х~У.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномощные конечные множества называют еще *равночисленными.* В начальном курсе обучения математике равночисленность выражается словами «столько же».

Понятие равночисленности множеств лежит в основе определения отношений «больше на …», «меньше на …».

<u>Пример.</u> Множество N натуральных чисел и множество У– четных натуральных чисел равномощны, т. к. между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{ccccc} N: & 1 & 2 & 3 & \ldots\ n \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ У: & 2 & 4 & 6 & \ldots\ 2n \end{array}$$

Определение. ***Если бесконечное множество равномощно множеству N натуральных чисел, то его называют счетным.***

Любое бесконечное подмножество множества N счетно: чтобы пронумеровать его элементы, надо расположить элементы подмножества в порядке возрастания и нумеровать один за другим. Так, счетно множество всех нечетных натуральных чисел, множество натуральных чисел, кратных 5 и т. д. Счетным является также множество всех целых чисел, всех рациональных чисел.

Доказано, что бесконечным множеством, не равномощным множеству натуральных чисел, является множество R всех действительных чисел.

6. Понятие отношения на множестве

В математике изучают не только связи между элементами двух множеств, т.е. соответствия, но и связи между элементами одного множества. Называют их отношениями.

Отношения многообразны. Между понятиями – это отношения рода и вида, части и целого, между предложениями – отношения следования и равносильности, между числами – «больше», «меньше», «равно» и т.д.

Если рассматриваются отношения между двумя элементами, то их называют *бинарными,* отношения между тремя элементами – *тернарными,* отношения между n элементами – n-арными. Примером тернарного отношения может служить отношение между точками прямой – «точка x лежит между точками y и z».

Примеры бинарных отношений встречаются не только в математике, но и всюду в жизни, вокруг нас: родственные и другие отношения между людьми (быть отцом, сестрой и т.д.), отношения между событиями во времени (раньше, позже, одновременно), между предметами по их расположению в пространстве (выше, ниже, левее и др.)

Пусть на множестве X ={2, 4, 6, 8} задано отношение «меньше». Это означает, что для любых двух чисел из множества X можно сказать, какое из них меньше: 2 < 4, 2< 6, 2< 8, 4< 6, 4< 8, 6< 8. Полученные неравенства можно записать в виде упорядоченных пар: (2; 4), (2;6), (2;8), (4;6), (4;8), (6;8). Но все эти пары есть элементы декартова произведения X×X.

Определение. ***Бинарным отношением на множестве X называют всякое подмножество декартова произведения X × X.***

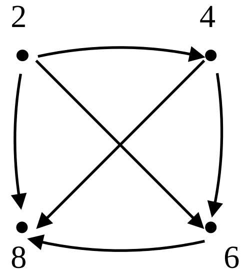
Обозначаются отношения так же как и соответствия буквами : S, P, T, R и др. Если R – отношение на множестве X, то по определению, $R \subset X \times X$.

Элементы x и y находятся в отношении R кратко записывают $(x,y) \in R$ или xRy (читается: «элемент x находится в отношении R с элементом y»).

7. Способы задания отношений

Отношения задаются также как и соответствия. Отличия касаются задания отношений при помощи графа.

Построим, например, граф отношения «меньше», заданного на множестве X = {2,4,6,8}. Для этого элементы множества X изобразим точками (вершины графа), а отношение «меньше» – стрелками (ребра графа).



Отношение можно задать при помощи предложения с двумя переменными. Например, «число x меньше числа y» или в символической записи (если это возможно) «$x < y$». Отношение «x больше y на 3» можно записать в виде равенства $x=y+3$ (или $x–y=3$).

Для отношения R, заданного на множестве X, всегда можно задать отношение R^{-1}, ему обратное. Оно определяется также, как соответствие, обратное данному.

Понятием отношения, обратного данному, часто пользуются при начальном обучении математике. Например, чтобы предупредить ошибку в выборе действия, с помощью которого решается задача: «У Пети 7 карандашей, что на 2 меньше, чем у Бори. Сколько карандашей у Бори?»– ее переформулируют: «У Пети 7 карандашей, а у Бори на 2 больше. Сколько карандашей у Бори?» Видим, что переформулировка свелась к замене отношения «меньше на 2» обратным ему отношением «больше на 2».

8. Свойства отношений

Отношения обладают свойствами. Свойств достаточно много, но рассмотрим только некоторые.

Определение 1. ***Отношение R на множестве X называется рефлексивным, если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.***

Если отношение R рефлексивно на множестве X, то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля. Справедливо и обратное утверждение. Примеры рефлексивных отношений:

1) отношение «равенства» на множестве натуральных чисел,
2) отношение «кратно» на множестве натуральных чисел,
3) отношение «подобия» треугольников.

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности не обладают.

Например, отношение перпендикулярности на множестве отрезков, отношение «длиннее» на множестве отрезков.

Определение 2. ***Отношение R на множестве X называется симметричным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x.***

Примеры симметричных отношений:

1) отношение перпендикулярности на множестве отрезков,
2) отношение равенства на множестве отрезков,
3) отношение параллельности на множестве прямых,
4) отношение «подобия» треугольников.

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, граф содержит и стрелку, идущую от y к x. Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Например, отношение «длиннее» на множестве отрезков.

Определение 3. ***Отношение R на множестве X называется антисимметричным, если для различных элементов x и y из множества X выполнено условие: из того, что x находится в отношении R с элементом y, следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.***

Примеры антисимметричных отношений:

1) отношение «длиннее» на множестве отрезков,
2) отношение «больше» для чисел,
3) отношение «больше на 2» для чисел.

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка одна. Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, не обладающие ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности. Например, отношение «быть сестрой» на множестве детей одной семьи. Пусть в семье трое детей: Катя, Маша и Толя.

Задание! Постройте граф данного отношения и проанализируйте его с точки зрения выполнимости свойств симметричности и антисимметричности.

Определение 4. ***Отношение R на множестве X называется транзитивным, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z.***

Примеры транзитивных отношений:

1) отношение «длиннее» на множестве отрезков,
2) отношение равенства на множестве отрезков или на множестве чисел.

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z, содержит стрелку, идущую от x к z. Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, не обладающие свойством транзитивности. Например, отношение перпендикулярности на множестве прямых.

Определение 5. ***Отношение R на множестве X называется связанным, если для любых элементов x и y из множества X, выполняется условие: из того, что x и y различны, следует, что либо x находится в отношении R с элементом y, либо элемент y находится в отношении R с элементом x.***

Например, свойством связанности обладает отношение «больше» на множестве натуральных чисел.

На графе связанного отношения любые две вершины соединены стрелкой.

Существуют отношения, которые свойством связанности не обладают. Например, отношение делимости на множестве натуральных чисел.

9. Отношение эквивалентности. Взаимосвязь отношения эквивалентности с разбиением множества на классы

Если рассмотреть на множестве натуральных чисел отношение равенства, то можно заметить, что оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Про такое отношение говорят, что оно является отношением эквивалентности.

Определение. ***Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности***.

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношения равенства на множестве дробей, равенства геометрических фигур, отношение параллельности прямых и т. д.

Рассмотрим отношение равенства дробей, заданное на множестве $X=\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}\}$. Видим, что множество разбилось на три подмножества: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\}$, $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\}$, $\{\frac{1}{4}\}$. Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X, т.е. имеем разбиение множества X на классы, каждый из которых состоит из равных между собой дробей.

Вообще, *если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).*

Верно и обратное утверждение: *если какое-либо отношение, заданное на множестве X, порождает разбиение этого множества на классы, то оно является отношением эквивалентности.*

Если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам.

Принцип разбиения множества на классы при помощи некоторого отношения эквивалентности является важным принципом математики. Отношения эквивалентности являются базой для формирования новых понятий (например, геометрических фигур) и для классифицирующей деятельности.

10. Отношение порядка

Слово «порядок» часто употребляется в обыденной речи. Можно говорить о порядке слов в предложении, о порядке выполнения действий в примере и т. д. При этом в слово «порядок» вкладывается такой смысл: оно означает, какой элемент того или иного множества за каким следует (или какой элемент какому предшествует).

Таким образом, интуитивное понятие порядка между элементами некоторого множества связано с заданием на этом множестве отношения «x следует за y» (или «x предшествует y»).

Определение. ***Отношение R на множестве X называется отношением порядка (или отношением строгого порядка), если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.***

Примерами отношений порядка могут служить: отношение «меньше» на множестве натуральных чисел, отношение «короче» на множестве отрезков, отношение «выше» на множестве людей, сравниваемых по росту.

Если отношение порядка обладает еще свойством связанности, то говорят, что оно является отношением *линейного порядка*.

Например, отношение «меньше» на множестве натуральных чисел является отношением линейного порядка.

Определение. ***Множество X называется упорядоченным, если на нем задано отношение порядка.***

Так, множество N натуральных чисел можно упорядочить, если задать на нем отношение «меньше».

Если отношение порядка, заданное на множестве X, обладает свойством связанности, то оно *линейно упорядочивает* множество X.

Например, множество натуральных чисел можно упорядочить и с помощью отношения «меньше», и с помощью отношения «кратно» – оба они являются отношениями порядка. Но отношение «меньше», в отличие от отношения «кратно», обладает еще и свойством связанности. Значит, отношение «меньше» упорядочивает множество натуральных чисел линейно.

Наряду с отношениями строгого порядка в математике рассматривают отношения нестрогого порядка.

Определение. ***Отношение R на множестве X называется отношением нестрогого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.***

Например, отношения: «$x \le y$», «не выше» на множестве людей, сравниваемых по росту, «быть делителем» на множестве натуральных чисел.

Не все отношения делятся на отношения эквивалентности и порядка. Существует большое число отношений, не являющиеся ни отношением эквивалентности, ни отношением порядка.