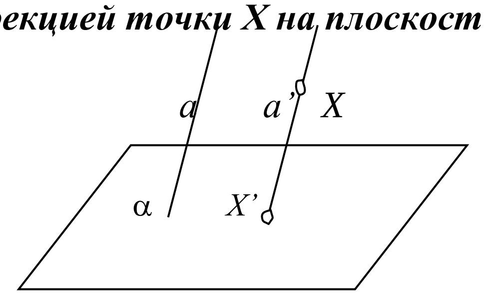
Параллельное проектирование и его свойства

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая *a*. Возьмем в пространстве произвольную точку X, не принадлежащую прямой *a,* и проведем через X прямую *a'* , параллельную *a*. Прямая *a'* пересекает плоскость в некоторой точке X', которая называется ***параллельной проекцией точки X на плоскость*** α.



Если точка X лежит на прямой *a*, то ее параллельной проекцией X' является точка, в которой прямая *a* пересекает плоскость α.

Если точка X принадлежит плоскости α, то точка X' совпадает с точкой X.

Таким образом, если задана плоскость α и пересекающая ее прямая *a,* то каждой точке X пространства можно поставить в соответствие единственную точку X'– параллельную проекцию точки X на плоскости α. Плоскость α называется *плоскостью проекций*. О прямой *a* говорят, что она задает *направление проектирования*– при замене прямой *a* любой другой параллельной ей прямой результат проектирования не изменится. Все прямые, параллельные прямой *a,* задают одно и тоже направление проектирования и называются вместе с прямой *a* проектирующими прямыми.

Проекцией фигуры F называется множеством фигур F' проекцией всех ее точек. Отображение, сопоставляющее которой точке X фигуры F ее параллельную проекцию– точку X' фигуры F', называется *параллельным проектированием фигуры F*.

Параллельной проекцией реального предмета является его тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, т.к. солнечные лучи можно считать параллельными.

Свойства параллельного проектирования:

Теорема. При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, и для лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:

1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.
2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.

<u>Следствие:</u> при параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.

При изображении геометрических тел на плоскости необходимо следить за тем, чтобы указанные свойства выполнялись. В остальном оно может быть произвольным. Например, углы и отношения длин непараллельных отрезков могут изменяться произвольно, т.е. треугольник при параллельном проектировании изображается произвольным треугольником. Но если треугольник равносторонний, то на проекции его медиана должна соединять вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Многогранники и их изображение

Многогранник – это ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от каждого из ограничивающих его многоугольников. Многоугольник на поверхности многогранника называется его *гранью*. Стороны граней называются *ребрами* многогранника, а вершины граней – *вершинами многогранника*.

Простейшие многогранники – это призма и пирамида.

Призмой называется многогранник, у которого две грани, называемые основаниями призмы, равны и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований.

Призма называется *прямой,* если ее боковые ребра перпендикулярны основанию.

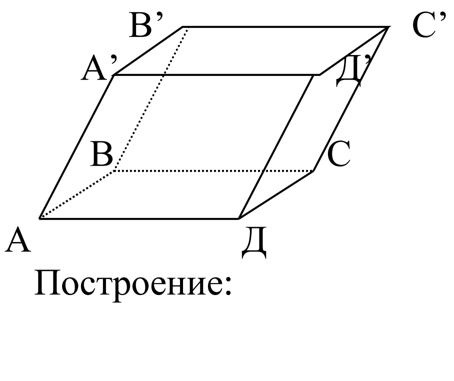
Прямая призма называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник.

Призма, у которой основание – параллелограмм, называется *параллелепипедом.*

Параллелепипед называется *прямоугольным,* если все его грани – прямоугольники.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, т.е. все грани которого – квадраты.

Изобразим наклонную призму, основанием которой является квадрат.



Построение:

1. Строим нижнее основание призмы (можно верхнее). Оно изобразится произвольным параллелограммом АВСД.
2. Так как ребра призмы параллельны, строим параллельные прямые, проходящие через вершины параллелограмма и откладываем на них равные отрезки АА’, ВВ’, СС’, ДД’, длина которых произвольна.
3. Соединяем последовательно точки А’,В’, С’, Д’.
   (Задание! Самостоятельно выполнить построение прямой призмы, основанием которой являются квадраты.)

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (основание) – какой-нибудь многоугольник, а остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной.

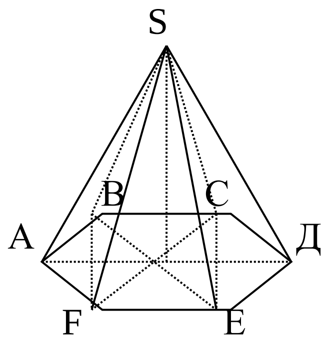
Общую вершину боковых граней называют *вершиной* пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также длина этого перпендикуляра называется *высотой* пирамиды.

Простейшая пирамида – треугольная (или тетраэдр). У нее 4 грани. Любая ее грань может считаться основанием.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник и высота проходит через центр этого многоугольника.

Чтобы изобразит правильную пирамиду, сначала чертят правильный многоугольник, лежащий в основании, и его центр – точку О. Затем проводят вертикальный отрезок OS, изображающий высоту пирамиды. И точку S соединяют со всеми вершинами основания.

(Задание! Самостоятельно построить изображение правильной пирамиды, основание которой является правильный шестиугольник).



Отметим ещё одно свойство многогранников, установленное Л.Эйлером.
Пусть дан выпуклый многогранник и *в*– число его вершин, *р* – число ребер, *r* – число граней. Тогда ***в–р+r =2*** для любого выпуклого многогранника.

На основании теоремы Эйлера можно заключить, что существуют только пять видов правильных многогранников, т.е. таких выпуклых многогранников, у которых все грани – равные друг другу правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Это тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр. (см. на стенде в каб. № 9)

Шар, цилиндр, конус и их изображение

Поверхность шара называется *сферой*.

Сферой называется множество точек пространства, удаленных от данной точки на заданное положительное расстояние. При этом данная точка называется *центром* сферы, а данное расстояние – ее *радиусом.*

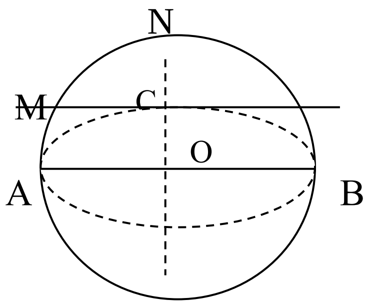
Шаром называется множество точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем некоторого данного положительного расстояния. Данная точка– это *центр* шара, а данное расстояние – *радиус* шара.

Радиусом шара и сферы называют также любой отрезок, соединяющий их центр с точкой на сфере.

Диаметр шара и сферы– это любой отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр, а также длина этого отрезка.

Если шар пересечь плоскостью, проходящей через его центр, то пересечением будет круг, радиус которого совпадает с радиусом шара. Этот круг называют *большим кругом*, а его окружность – *большой окружностью* или *экватором.*

При параллельном проектировании шар изображается в виде круга того же радиуса. Чтобы сделать изображение шара более наглядным, рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности, плоскость которой не перпендикулярна плоскости проекции. Эта проекция будет эллипсом. Центр шара изобразится центром этого эллипса.

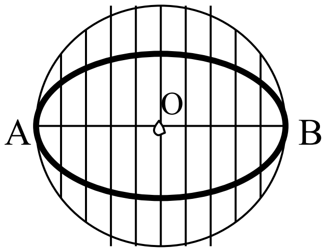


Теперь можно найти соответствующие полюсы N и S при условии, что отрезок, их соединяющий, перпендикулярен плоскости экватора. Для этого через точку O проводим прямую, перпендикулярную AB, и отмечаем точку C – пересечения этой прямой с эллипсом, затем через точку C проводим касательную к эллипсу, изображающему экватор. Доказано, что расстояние CM равно расстоянию от центра шара до каждого из полюсов. Поэтому, отложив отрезки ON и OS, равные CM, получим полюсы N и S.

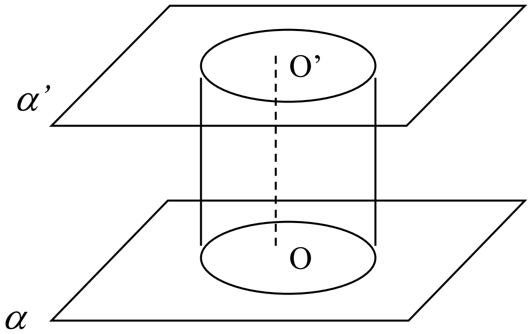
Один из *приемов построения эллипса*:

1) строят окружность с диаметром и проводят хорды, перпендикулярные диаметру,
2) половину каждой из хорд делят пополам,

3) полученные точки соединяют плавной линией.



Прямой круговой цилиндр – это геометрическое тело, образованное заключенными между двумя параллельным плоскостями отрезками всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей, и перпендикулярных плоскостям оснований.



Радиусом цилиндра называется радиус окружности его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований. Его *осью* называется прямая, проходящая через центры окружностей оснований.

Конусом называется тело, образованное всеми отрезками, соединяющими данную точку – его вершину – с точками некоторого круга – основания конуса.

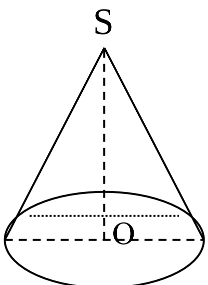
Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются его *образующими*.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая его вершину с центром окружности основания, перпендикулярна основанию.

Высотой конуса называется расстояние от его вершины до основания.

Прямой круговой конус изображают так:

1. Стоят эллипс – основание конуса,
2. Находят центр основания – точку O и перпендикулярно проводят отрезок OS– высота конуса,
3. Из точки S проводят к эллипсу касательные и выделяют отрезки SC и SD этих прямых от точки S до точек касания C и D.



C D

A