<u>МОДУЛЬ 2.</u> *МЕТОД КООРДИНАТ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ*

<u>Практическое занятие №6-7</u>

Тема: **Преобразование координат. Полярные координаты. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Метод координат**

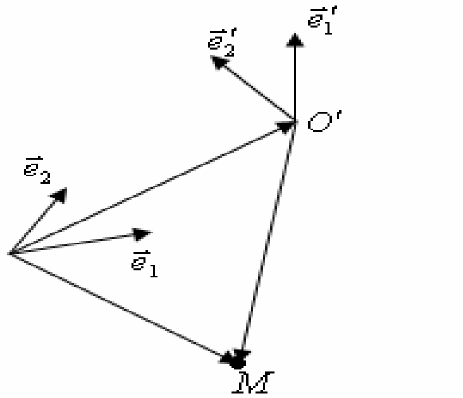
План

1. Преобразование АСК.
2. Преобразование ПДСК.
3. Полярные координаты.
4. Переход от полярных координат к прямоугольным.
5. Расстояние между точками.
6. Деление отрезка в данном отношении.
7. Метод координат.

Преобразование АСК

Основные факты

Рассмотрим на плоскости две аффинные системы координат $O\vec{e}_1\,\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$. Первую систему назовем старой, а вторую – новой. Пусть M - произвольная точка плоскости, которая в старой системе имеет координаты x, y, а в новой системе - x', y'.



Задача преобразования координат состоит в следующем: зная координаты нового начала координат и новых координатных векторов в старой системе:

$$\vec{e}_1{}'(c_{11}, c_{21}), \vec{e}_2{}'(c_{12}, c_{22}), O'(x_0, y_0)$$

выразить координаты x, y точки M в старой системе через координаты x', y' той же точки в новой системе.

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0,$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_0.$$

- *формулы преобразования* аффинной системы координат.

Преобразование ПДСК

Формулы преобразованияПДСК:

$$x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0,$$
$$y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0.$$

где $\varepsilon = 1$, если системы координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ и $O'\vec{i}\,'\vec{j}\,'$ ориентированы одинаково, и $\varepsilon = -1$, если они ориентированы противоположно.

Полярные координаты

Зададим на *ориентированной плоскости* точку O и единичный вектор $\vec{i}$. Пара, состоящая из точки O и вектора $\vec{i}$, называется *полярной системой координат* и обозначается так: $O\vec{i}$ или $(O,\vec{i})$.

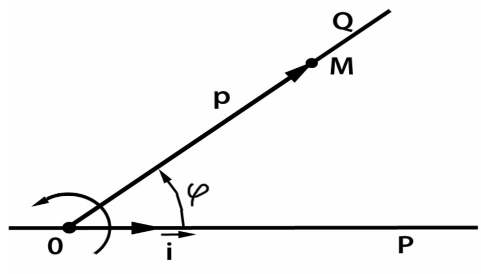


Рис. 11.

Пусть M - произвольная точка плоскости. Обозначим через ρ расстояние от точки O до точки M, а через φ- направленный угол $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$, т.е. $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\varphi=(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$. Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M в полярной системе $O\vec{i}$. Число ρ называется *полярным радиусом* или первой полярной координатой точки M, а число φ - *полярным углом* или второй координатой этой точки.

Переход от полярной системы к присоединенной ПДСК

Пусть ρ и φ - полярные координаты точки M, отличной от точки O, а x, y - ее координаты в присоединенной прямоугольной системе. Тогда $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ и $\varphi=(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$.

$$x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi.$$

Зная полярные координаты ρ и φ точки M, по формулам (30) найдем прямоугольные координаты x, y этой точки. Из формул (30) находим: $x^2+y^2=\rho^2$ и, значит,

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

Для точки M, отличной от полюса O, имеем $\rho\neq 0$, из формул (30), (31) находим:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Зная прямоугольные координаты x, y точки M, отличной от начала координат, мы по формулам (31) и (32) найдем полярные координаты ρ и φ этой точки.

Расстояние между точками

Пусть в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ точки A, B имеют координаты $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

$$\overrightarrow{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть M_1 и M_2- две точки плоскости, а λ- некоторое действительное число, причем $\lambda\neq -1$. Говорят, что M *делит отрезок* $\overline{M_1M_2}$ в данном отношении λ, если

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}.$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Так выражаются координаты x, y точки M , делящей в данном отношении λ .

Середина отрезка M_1M_2 имеет координаты $(\lambda = 1)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Сущность метода координат на плоскости

Метод координат в геометрии состоит в том, что посредством координат точек геометрические объекты задают аналитически с помощью чисел, уравнений, неравенств или их систем и тем самым при доказательстве теорем или решении геометрических задач используют *аналитические* методы. Это существенно упрощает рассуждения и часто позволяет доказывать теоремы или решать задачи, пользуясь определенным алгоритмом, в то время, как синтетический метод в геометрии в большинстве случаев требует искусственных приемов. Но для того чтобы пользоваться методом координат, необходимо уметь с помощью чисел, уравнений, неравенств или их систем задавать геометрические фигуры.

Задача 1. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

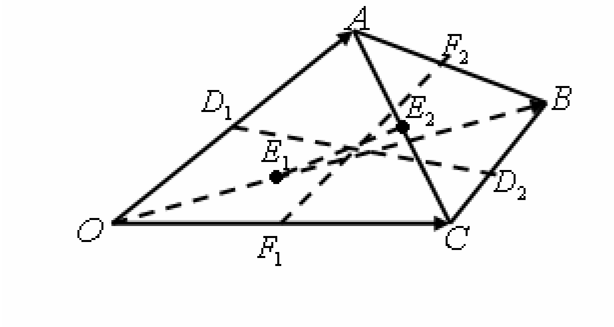


Рис. 1.

Решение. Пусть $OABC$ - данный тетраэдр, а $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$ - соответственно середины ребер OA и BC, OB и AC, OC и AB. Аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ выберем так, чтобы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$. В этой системе координат вершины тетраэдра имеют координаты $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$

Найдем координаты середины M отрезка D_1D_2. Точки D_1 и D_2 - середины отрезков OA и BC, поэтому они имеют координаты $D_1\left(\frac{1}{2},0,0\right), D_2\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, точка M имеет координаты $M\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Точно так же находим координаты середин отрезков E_1E_2 и F_1F_2 и убеждаемся в том, что эти точки имеют те же координаты: $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, поэтому они совпадают с точкой M.

<u>Задача 2.</u> Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N - центры тяжести треугольников A_1BD и $B_1D_1C_1$. Доказать, что точки M и N лежат на диагонали AC_1 параллелепипеда делят эту диагональ на три равные части.

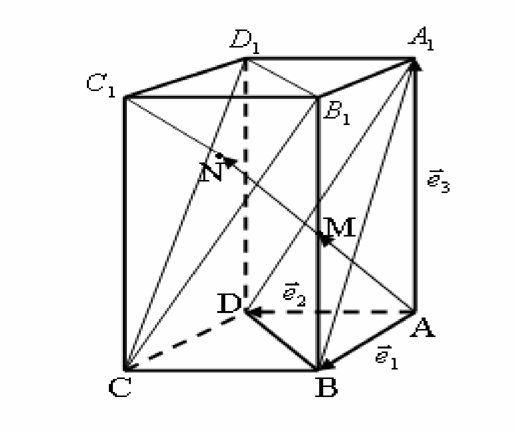


Рис. 2.

Решение. Задача будет решена, если докажем, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NC_1}$. Аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ выберем так, чтобы $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB},\vec{e}_2=\overrightarrow{AD},\vec{e}_3=\overrightarrow{AA_1}$. В этой системе координат вершины параллелепипеда имеют координаты $A(0,0,0),B(1,0,0).C(1,1,0),D(0,1,0),A_1(0,0,1),B_1(1,0,1),C_1(1,1,1),D_1(0,1,1)$. По формулам (2) находим координаты точек M и N: $M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),N\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. Векторы $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NC_1}$ имеют координаты

$\overrightarrow{AM}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{NC_1}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NC_1}$, поэтому точки M и N лежат на диагонали AC_1 и делят ее на три равные части.

<u>Задача 3.</u> Дана четырехугольная пирамида $SOACB$, ребра OA, OB и OS которой взаимно перпендикулярны и имеют длины: $OA=a,OB=b,OS=h$.

Основанием пирамиды служит прямоугольник $OACB$, на стороне AC которого взята точка K так, что $AK=c$.

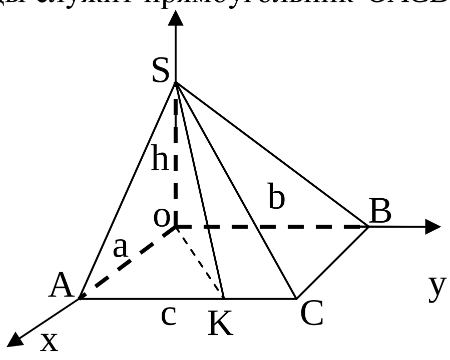


Рис. 3.

Решение. Прямоугольную правую систему координат $Oxyz$ выберем так, как показано на рисунке. В этой системе координат вершины пирамиды и точка K имеют координаты $O(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0), C(a,b,0), S(0,0,h), K(a,c,0)$.

Угол φ между плоскостями SBC и SOK равен углу между двумя векторами, перпендикулярными соответственно к этим плоскостям. В качестве таких векторов могут быть выбраны векторы $\vec{p} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}\right]$ и $\vec{q} = \left[\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}\right]$, поэтому $\varphi = (\vec{p}, \vec{q})$. Найдем координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и по этим координатам вычислим $\cos\varphi$.

Векторы $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OK}$ имеют координаты $\overrightarrow{BC}(a,0,0), \overrightarrow{SB}(0,b,-h), \overrightarrow{OS}(0,0,h), \overrightarrow{OK}(a,c,0)$. Находим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$: $\vec{p}(0,ah,ab); \vec{q}(-hc,ah,0)$.

$$\cos\varphi = \frac{ah}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+h^2}}.$$

<u>Задача 4.</u> На прямой даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C. По одну сторону от прямой l построены равносторонние треугольники AMB и BNC. Доказать, что середина отрезка MC, середина отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Пусть P – середина отрезка MC, а Q – середина отрезка AN (рис.). Требуется доказать, что треугольник PQB равносторонний. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, определим координаты вершин ΔPQB, найдем длины его сторон и убедимся в том, что $PQ = QB = BP$.

Систему координат выберем следующим образом: начало O совместим с точкой A, за вектор i примем вектор $\overrightarrow{AB}$, а вектор j направим так, чтобы его конец и точки M и N лежали по одну сторону от прямой l. Если $BC = a$, то легко убедиться в том, что вершины данных треугольников в системе Oij имеют координаты:

$$A(0,0), B(1,0), C(1+a,0),$$
$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), N\left(1+\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

Определим координаты точек $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$:

$$x_1 = \frac{3+2a}{4}, y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}; x_2 = \frac{2+a}{4}, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Пользуясь формулой для вычисления длины отрезка по координатам концов, получаем: $BQ = PQ = PB = \dfrac{\sqrt{a^2-a+1}}{2}$.

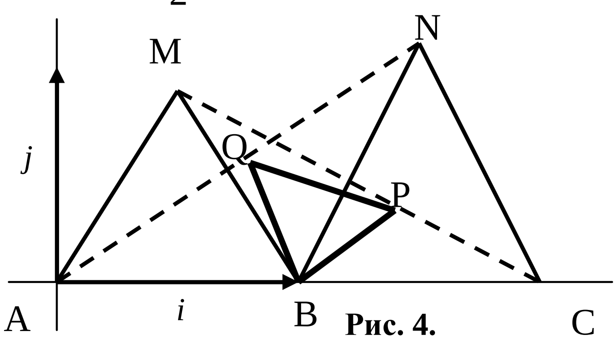


Рис. 4.

Задача 5. Найти множество всех точек M для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть постоянная величина α.

Решение. Прямоугольную декартову систему координат возьмем так, чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, а начало координат с точкой A (рис.). Если $AB = a$, то в выбранной системе координат: $A(0,0)$ и $B(a,0.)$ Для того, чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала искомому множеству точек, необходимо и достаточно, чтобы $AM^2 - BM^2 = \alpha$ или $x^2 + y^2 - [(x-a)^2 + y^2] = \alpha$. После элементарных преобразований получаем уравнение искомого множества точек в выбранной системе координат:

$$x = \frac{\alpha + a^2}{2a}. \qquad (*)$$

Этим уравнением, как легко видеть, определяется прямая, параллельная оси Oy (т.е. перпендикулярная прямой AB) и отстоящая от точки A на расстояние $\lambda = \frac{|\alpha + a^2|}{2a}$. Эта прямая пересекает луч AB, если $\alpha + a^2 > 0$, проходит через точку A, если $\alpha + a^2 = 0$, и пересекает дополнительный луч, если $\alpha + a^2 < 0$.

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = 0$, т.е. когда $AM^2 - BM^2 = 0$ В этом случае, очевидно, предыдущее соотношение эквивалентно условию $AM \equiv BM$. Таким образом мы получаем множество точек M, равноудаленных от точек A и B, уравнение которого, как следует из соотношения (*), имеет вид: $x = \frac{a}{2}$. Мы пришли к известной из курса элементарной геометрии теореме: множество точек, равноудаленных от двух точек A и B, есть прямая, проходящая через середину C отрезка AB и перпендикулярная к нему

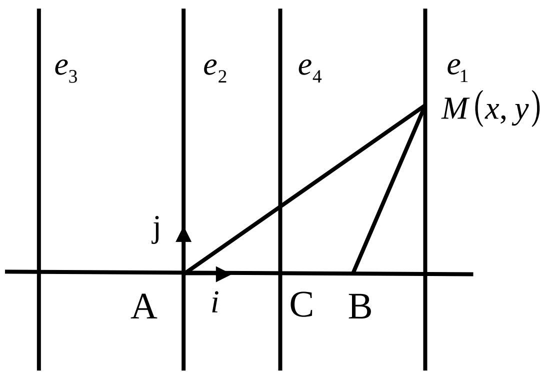


Рис. 5.

Задача 6. Найти полярные координаты $M(1;-\sqrt{3})$ если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось с положительно направленной осью абсцисс .

Решение:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$tg\varphi = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$ - IV четверть.

$\varphi = \frac{5\pi}{3}$

$M(2;\frac{5\pi}{3})$ - в полярной системе координат.

Задача 7. Найти координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если $A(2;1), B(4;0)$.

Решение. Согласно условию, $A(2;1), B(4;0)$ - известные, а $C(x_1;y_1), D(x_2;y_2)$- неизвестные вершины квадрата. Так как длина стороны квадрата $AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ и $BC=AB$, то

$$BC^2=(x_1-4)^2+y_1^2=5. \qquad (1)$$

Найдем угловой коэффициент стороны AB. Для этого воспользуемся формулой $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$, где (x,y)- координаты точки B, а (x_0,y_0)- координаты точки A; тогда получим $k=\dfrac{0-1}{4-2}=-\dfrac{1}{2}$. Но $BC\perp AB$ и, следовательно, уравнение BC имеет вид $y-0=2(x-4)$, т. е. $y=2x-8$. Далее, точка $C(x_1,y_1)$ лежит на BC и, значит,

$$y_1=2x_1-8. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), найдем две точки $C(5;2)$ и $C(3;-2)$, которые симметричны относительно точки B.

Для точки $C(5;2)$ имеем $\overrightarrow{AC}(3;1), \overrightarrow{BD}(x_2-4;y_2)$, откуда, учитывая, что $AC\perp BD$, получаем

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0, \text{ или } 3x_2-12+y_2=0\Rightarrow y_2=12-3x_2. \qquad (3)$$

Кроме того, $BD^2=(x_2-4)^2+y_2^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2$, или

$$(x_2-4)^2+y_2^2=10. \qquad (4)$$

Решив теперь систему уравнений (3) и (4), найдем две точки $D(5;-3)$ и $D(3;3)$.

Чтобы отобрать нужную точку, воспользуемся коллинеарностью векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Если $D(5;-3)$, то $\overrightarrow{CD}(0;5), \overrightarrow{AB}(2;-1)$, т. е. $\overrightarrow{CD}\nparallel\overrightarrow{AB}$ и, значит, точка $D(5;-3)$ не является вершиной квадрата. Если же $D(3;3)$, то $CD(-2;1)$, т. е. $\overrightarrow{CD}\parallel\overrightarrow{AB}$. Итак, точки $C(5;2)$ и $D(3;3)$ являются вершинами квадрата.

Рассуждая аналогично, для точки $C(3;-2)$ находим вершину $D(1;-1)$.

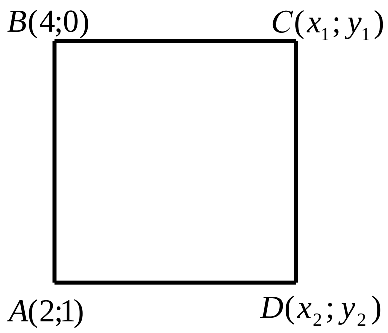


Рис. 6.

Задачи для самостоятельного решения

Расстояние между точками

184. Определить расстояние между двумя точками:
а) A (5, 2), B (1, -1);
б) C (-6, 3), D (0, -5);
в) O (0,0), P (-3, 4);
г) E (9, -7), F (4, 5).
185. Найти расстояние между точками:

а) A (1, 2, 3), B (1, -2, 0);
б) A (2, -3, 1), B (1, -3, 8);
в) A (-1, -1, 0), B (2, 3, $\sqrt{5}$).
186. Даны вершины треугольника A(3, 2), B(-1, -1), C(11, -6). Определить длины его сторон.
187. Определить радиус окружности, которая проходит через точку A (2, 1) и имеет центр в точке C (2, -3).
188. Определить радиус сферы, проходящей через точку A (-2, 0, 2) и имеющей центр в точке C (1, 1, 6).
189.Доказать, что треугольник ABC прямоугольный, если:
а) A (0, 0), B (3, 1), C (1, 7);
б) A (1, 1), B (2, 3), C (5, -1).
190. Даны две смежные вершины квадрата A (3, -7) и B (-1, 4). Вычислить его площадь.
191. Даны две противолежащие вершины квадрата $ABCD$:
A (3, 5) и C (1,-3). Вычислить его площадь.
192. Вычислить площадь правильного треугольника ABC, если заданы две его вершины: A (-3, 2) и B (1, 6).
193. Определить ординату точки M, зная, что ее абсцисса равна 7, а расстояние до точки N(-1, 5) равно 10.
194. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки A на расстоянии d, если:
а) A (4, -6), d =5;
б) A (3, -1), d =6;
в) A (-8, 13), d =17.
195. На оси абсцисс найти точку M, удовлетворяющую условию:
а) расстояние d от точки M до точки A (2, -3) равно 5;
б) расстояние d от точки M до точки A (10, 5) равно 10;
в) расстояние d от точки M до точки A (2, 6) равно 9.
196. На биссектрисах координатных углов найти точки, расстояние от которых до точки M (-2, 0) равно 10.
197. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек:
а) A (0, 0), B (9, -3); б) A (5, 13), B (-12, -4); в) A (0, 6), B (2, -4).
198. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точек:
а) A (-4, 0), B (-3, -7);
б) A (-3, -1), B (6, 2);
в) A (10,8), B (-6,4).
199. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (1, -3, 7) и B (5, 7, -5).
200. Какому условию должны удовлетворять координаты точки $M (x, y)$, если она равноудалена от точек:
а) A (7, -3), B (-2, 1);
б) A (5, 13), B (-12, -4);
в) A (0, 6), B (2, -4).
201. Вычислите координаты точки M, расстояние от которой до оси абсцисс и до точки A (1, 2) равно 10.
202. Найдите точку M, расстояние от которой до оси ординат и до точки A (8, 6) равно 5.
203. Вычислите координаты точки M, равноудаленной от осей координат и от точки:
а) A (-8, -1);
б) A (4, 2).
204. Даны три вершины A (3, -7), B (5, -7), C (-2, 5) параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна вершине B. Определить длины диагоналей этого параллелограмма.
205. Даны две противоположные вершины квадрата A (3, 0) и
C (-4, 1). Найти две его другие вершины.

206. Даны две смежные вершины квадрата A (2, -1) и B (-1, 3). Определить две его другие вершины.
207. Зная две противолежащие вершины ромба A (8, -3), C (10, 11) и длину его стороны AB=10, определить координаты остальных вершин ромба.
208. Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$. Вычислить площадь этого ромба, если две его противолежащие вершины есть точки A (4, 9) и C (-2, 1).
209. Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$. Вычислить длину высоты этого ромба, если две его противолежащие вершины есть точки A (3, -4) и B (1, 2).
210.Доказать, что точки A, B, C, D являются вершинами квадрата, если:
а) A (2, 2), B (-1, 6), C (-5, 3) и D (-2,-1);
б) A (7, 2, 4), B (4, -4, 2), C (6, -7, 8), D (9, -1, 10).
211. Вычислить периметр и площадь треугольника, вершинами которого служат точки: а) A(4, 2), B(9, 4), C(7, 6); б) A(3, 2), B(-1, -1), C(11, -6).
212. Доказать что треугольник ABC является равнобедренным, если:
а) A (3, -1, 2), B (0, -4, 2), C (-3, 2, 1);
б) A (3, 5, -4), B (-1, 1, 2), C (-5, -5, -2).
213. Даны вершины A (2, -1, 4), B (3, 2, -6), C (-5, 0, 2) треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A.
214. Определить координаты вершин равностороннего треугольника, лежащего в I координатной четверти, если длина его стороны 10 единиц, одна из вершин совпадает с началом координат O, а основание треугольника расположено на оси Ox.
215. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек:
а) A (2, 2), B (-5, 1), C (3, -5);
б) A (7, -1), B (-2, 2), C (-1, -5);
в) A (10, 7), B (-4, -7), C (12, -7);
г) A (2, 2), B (5, 1), C (7, -3);
д) A (5,4), B (3, 8), C (-2, -7);
е) A (2, 3), B (4, -1), C (5, 2).
216. Найти точку, равноудаленную от точек A (0, 1, -1), B (1, 0, 1),
C (-1, 1, 0), D (1, -1, 1).
217. Найти центр и длину радиуса окружности, проходящей через точки A (-1, 9), B (-8, 2), C (9, 9).
218. Найти координаты центра и радиус сферы, которая проходит через точки A (0, 0, 0), B (0, 2, 0), C (1, 0, 0), D (0, 0, 3).
219. Найти центр окружности, проходящей через точку A (-4, -2) и касающейся оси абсцисс в точке B (2, 0).

<u>Деление отрезка в данном отношении</u>

220. Найти координаты середин сторон треугольника ABC, если:
а) A (3,-7), B (5,2), C (-1,0);
б) A (1,-3), B (3,-5), C (-5,7);
в) A (3,2,-5), B (1,-4,3), C (-3,0,1).
221. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если:
а) A (3,-2), B (5,2), C (-1,4);
б) A (1,4), B (-5,0), C (-2,-1);
в) A (7,-4), B (-1,8), C (-12,-1);
г) A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3).
222. Дан отрезок AB, M – его середина. Найти координаты точки B, если:
а) A (-1,-3), M (5,1); б) A (-2,2), M (1,4); в) A (-2,-1,7), M (1,-1,5).
223. Даны две точки A (3,-1) и B (2,1). Определить:
а) координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B;
б) координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A.

224. Найти вершины треугольника ABC, зная середины его сторон:
а) M (3,-2), N (1,6), P (-4,2);
б) M (2,-1), N (-1,4), P (-2,2).

225. Даны координаты двух смежных вершин A и B параллелограмма $ABCD$ и точка M пересечения его диагоналей. Вычислить координаты двух остальных его вершин, если:
а) A $(-4\frac{1}{2},-7)$, B (2,6), M $(3,1\frac{1}{2})$;
б) A (-3,5), B (1,7), M (1,1).

226. Даны три вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противолежащую вершине B, если:
а) A (4,2), B (5,7), C (-3,4);
б) A (3,-5), B (5,-3), C (-1,3);
в) A (2,3), B (4,-1), C (0,5);
г) A (3,-1,2), B (1,2,-4), C (-1,1,2).

227. Отрезок AB разделен на пять равных частей. Определить координаты точек деления, если:
а) A (3,2), B (15,6);
б) A (-7,-2), B (13,3);
в) A (-1,8,3), B (9,-7,-2).

228. Отрезок AB разделен на три равные части. Определить координаты точек деления, если:
а) A (1,-3), B (4,3); б) A (-8,-5), B (10,4).

229. Даны три точки A (1,-1), B (3,3), C (4,5), лежащие на одной прямой. Определить отношения, в которых каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.

230. Точка C делит отрезок AB в отношении 3:5 (от A к B). Концами отрезка служат точки A (2,3) и B (10,11). Найти координаты точки C.

231. Отрезок с концами в точках A (3,-2) и B (10,-9) делится точкой C в отношении 2:5. Найти координаты точки C.

232. Определить координаты точек, делящих отрезок с концами A (2,3) и B (-1,2) в отношениях:

$$л_1 = 1; \quad л_2 = -2; \quad л_3 = \frac{1}{2}; \quad л_4 = 3; \quad л_5 = -\frac{3}{5}.$$

233. Отрезок с концами в точках A (-11,1) и B (9,11) разделен в отношении 2:3:5 (от A к B). Найти координаты точки деления.

234. Отрезок, концами которого служат точки A (-5,-2), B (4,2) разделен в отношении 3:4:2 (от A к B). Найти координаты точки деления.

235. Отрезок AB разделен на пять равных частей. Известна первая точка деления C (3,-5,7) и последняя F (-2,4,-8). Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.

236. а)Точка C (3,5) делит отрезок AB в отношении AC:CB = 3:4. Найти координаты начала отрезка – точки A, если его концом служит точка B(-1,1);
б) C (-1,0), AC:CB = 2:5, B (-5,-2);
в)C (-3,1,5), AC:CB = 3:2, B (7,-3,5).

237. а) Точка C(-2,1) делит отрезок AB в отношении AC:CB = 2:1. Найти координаты конца отрезка – точки B, если его началом служит точка A (-10,5);
б) C (1,2), AC:CB = 5:3, A (-9,-3);
в) C (-3,5), AC:CB = 1:7, A (-4,7).

238. Определить координаты концов отрезка AB, который точками C и D разделен на три равные части, если:
а) C (2,2) и D (1,5); б) C (2,0,2), D (5,-2,0).

239. На луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку M (4,3) найти точку P, расстояние которой от начала координат равно 9.

240. Дан треугольник ABC. Найти точку пересечения биссектрисы угла A с противолежащей стороной BC, если:
а) A (4,1), B (7,5),C (-4,7); б) A (1,-2), B (2,-5), C (4,7).

241. Два подобных треугольника имеют общую вершину A (3,-6) и общий угол при этой вершине. Найти две другие вершины большего треугольника, если известны вершины меньшего:
B (6,2;-3,6) и C (5;1), а отношение сходственных сторон равно 5/2.

242. На прямой AB найти точку, имеющую с абсциссой x, если:
а) A (-3,5), B (-1,2), x =5;
б) A (-12,-13), B (-2,-5), x =3.

243. Прямая проходит через точки A (2,-3) и B (-6,5). На этой прямой найти точку с ординатой y=5.

244. Определить точку, в которой прямая AB пересекает ось абсцисс, если: а) A (4,1) и B (-2,4); б) A (7,-3), B (23,-6).

245. Прямая проходит через точки A (5,2) и B (-4,-7). Найти точку пересечения этой прямой с осью ординат.

246. Даны вершины четырехугольника A (-3,12), B (3,-4), C (5,-4),
D (5,8). Определить, в каком отношении его диагональ AC делит диагональ BD.

247. Найти точку пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, если:
а) A (3,-2), B (3,5), C (0,4), D (-1,-1);
б) A (-2,14), B (4,-2), C (6,-2), D (6,10).

248. Точка M пересечения медиан треугольника ABC лежит на оси абсцисс, две вершины его – точки A (2,-3) и B (-5,1), третья вершина C лежит на оси ординат. Определить координаты точек M и C.

249. Прямая проходит через две точки A (-1,6,6) и B (3,-6,-2). Найти точки ее пересечения с координатными плоскостями.

250. Две вершины треугольника ABC имеют координаты A (3,6),
B (-3,5). Определить координаты вершины C при условии, что середины сторон AC и BC лежат на осях Ox и Oy соответственно.

251. Даны две вершины треугольника ABC: A (-4,-1,2) и B (3,5,-6). Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC – на плоскости Oxz.

252. Найти отношения, в которых каждая из плоскостей координат делит расстояние между точками A (2,-1,7) и B (4,5,-2).

Преобразование координат

253. Записать формулы преобразования аффинных систем координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:
а) $\bar{e}_1^{\,/}$ (4,3), $\bar{e}_2^{\,/}$ (0,5), $O^/$(3,-1); б) $\bar{e}_1^{\,/}$ (1,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (0,1), $O^/$(2,5);
в) $\bar{e}_1^{\,/}$ (4,-1), $\bar{e}_2^{\,/}$ (1,1), $O^/$(0,0); г) $\bar{e}_1^{\,/}$ (1,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (1,2), $O^/$(2,0);
д) $\bar{e}_1^{\,/}$ (-1,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (0,1), $O^/$(0,-5).

254. Написать формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:
а) $\bar{e}_1^{\,/}$ (1,0,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (2,4,0), $\bar{e}_3^{\,/}$ (-3,1,1/2), O' (0,0,0);
б) $\bar{e}_1^{\,/}$ (-1,1,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (2,-1,0), $\bar{e}_3^{\,/}$ (0,0,5), O' (5,0,-2);
в) $\bar{e}_1^{\,/}$ (-1,0,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (0,1,0), $\bar{e}_3^{\,/}$ (0,0,-1), O' (1,1,2);
г) $\bar{e}_1^{\,/}$ (1,0,0), $\bar{e}_2^{\,/}$ (0,1,0), $\bar{e}_3^{\,/}$ (0,0,1), O' (2,5,-1);

д) $\bar e_1^{/}$ (1,3,0), $\bar e_2^{/}$ (0,-3,1), $\bar e_3^{/}$ (1,1,-2), O'(0,3,-1).

255. Написать формулы преобразования при переносе начала координат в точку $O^{/}$ в каждом из следующих случаев: а) $O^{/}(5, \sqrt{2}\,)$; б) $O^{/}(-1,0)$; в) $O^{/}(-1,-3)$; г) $O^{/}(5, \frac{1}{2})$.

256. Относительно некоторой системы координат *A* (7, -5). Вычислить координаты этой точки в новой системе, которая получена переносом начала координат в точку O^1:
а) $O^1(2, 3)$; б) $O^1(-4, 7)$; в) $O^1(3, -9)$; г) $O^1(-1, -2)$; д) $O^1(3, -5)$.

257. Система $O\ \bar i^{\,1}\ \vec j^{\,1}$ получена из системы $O\ \bar i\ \vec j$ переносом начала в точку $O^1(-1, 3)$. Найти расстояние между точками *A* и *B*, если *A* (1, 2) в старой системе, а *B* (2, -1) в новой системе.

258. Даны две прямоугольные декартовы системы координат, причем вторая система получена из первой переносом начала в точку $O^{/}(5, \sqrt{11}\,)$ без изменения направления осей. Найти расстояние между точками *A* и *B*, если точка *B* имеет те же координаты во второй системе, что и точка *A* в первой.

259. Одна и та же точка имеет относительно двух различных систем координаты (2, 5) и (-3, 6) соответственно. Определить координаты начала каждой из этих систем относительно другой, зная, что их оси имеют одинаковое направление.

260. Написать формулы преобразования координат при аффинном повороте в каждом из следующих случаев:

а) $\bar e_1^{/}$ (2,1), $\bar e_2^{/}$ (-2,1); б) $\bar e_1^{/}$ (1,0), $\bar e_2^{/}$ (2,$-\sqrt{2}$);

в) $\bar e_1^{/}$ (0,1), $\bar e_2^{/}$ (1,0); г) $\bar e_1^{/}$ (0,-5), $\bar e_2^{/}$ (1,1).

259. Одна и та же точка имеет относительно двух различных систем координаты (2, 5) и (-3, 6) соответственно. Определить координаты начала каждой из этих систем относительно другой, зная, что их оси имеют одинаковое направление.

260. Написать формулы преобразования координат при аффинном повороте в каждом из следующих случаев:

а) $\bar e_1^{/}$ (2,1), $\bar e_2^{/}$ (-2,1); б) $\bar e_1^{/}$ (1,0), $\bar e_2^{/}$ (2,$-\sqrt{2}$);

в) $\bar e_1^{/}$ (0,1), $\bar e_2^{/}$ (1,0); г) $\bar e_1^{/}$ (0,-5), $\bar e_2^{/}$ (1,1).

261. В старой системе $O\ \bar e_1\ \bar e_2$ заданы точки *A* (3, 2), *B* (1, 0), *C* (-4, 1). Определить координаты этих точек в новой системе, если
O^1 (0, 2), $\bar e_1^{/}$ (2, 5), $\bar e_2^{/}$ (-1, 1).

262. Координаты точек *A* (5, -1); *B* (0, 2); *C* (-3, -2) определены в новой системе $O^1\bar e_1^{/}\ \bar e_2^{/}$. Найти координаты этих точек в старой системе, если: O^1 (1, 1), $\bar e_1^{/}$ (-3, 4), $\bar e_2^{/}$ (1, 2).

263. Пусть *OAB* – произвольный треугольник. Записать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы
$O,\ \bar e_1 = \overline{OA},\ \bar e_2 = \overline{OB}$ к новой системе в каждом из следующих случаев:

а) $O^{/}=A,\ \bar e_1^{/} = \overline{AB},\ \bar e_2^{/} = \overline{AO}$; б) $O^{/}=O,\ \bar e_1^{/} = \overline{OB},\ \bar e_2^{/} = \overline{OC}$;

в) $O^{/}=C,\ \bar e_1^{/} = \overline{CA},\ \bar e_2^{/} = \overline{CB}$.

264. В треугольнике *OAB* проведены медианы *AD* и *BE*, пересекающиеся в точке $O^{/}$. Напишите формулы преобразования координат при переходе от аффинной системы координат
$O,\ \bar e_1 = \overline{OA},\ \bar e_2 = \overline{OB}$ к аффинной системе $O^{/}, \bar e_1^{/} = \overline{O'A}, \bar e_2^{/} = \overline{O'B}$.

265. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны *a*. Оси координат были сонаправлены с лучами *CA* и *CB*, а начало координат совпадало с точкой *C*. Затем ось абсцисс была оставлена без изменения, а ось ординат заменена направленной прямой, содержащей гипотенузу *AB* и сонаправленной с лучом *AB*. Составить формулы преобразования координат при переходе от старой системы к новой.

266. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ - параллелепипед, O – точка пересечения диагоналей. Написать формулы преобразования координат точек, если $A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - старая система, а $O, \bar{e}_1^{/}, \bar{e}_2^{/}, \bar{e}_3^{/}$ - новая система, где $\bar{e}_1 = \overline{AB},\ \bar{e}_2 = \overline{AD},\ \bar{e}_3 = \overline{AA^{/}},\ \bar{e}_1^{/} = \overline{OA},\ \bar{e}_2^{/} = \overline{OB},\ \bar{e}_3^{/} = \overline{OC}.$

267. Дан тетраэдр $OABC$. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы $O, \bar{e}_1 = \overline{OA}, \bar{e}_2 = \overline{OB}, \bar{e}_3 = \overline{OC}$ к системе

$O' = A,\ \bar{e}_1^{/} = \overline{AO},\quad \bar{e}_2^{/} = \overline{AB},\ \bar{e}_3^{/} = \overline{AC}.$

267. Дан тетраэдр $OABC$. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы $O, \bar{e}_1 = \overline{OA}, \bar{e}_2 = \overline{OB}, \bar{e}_3 = \overline{OC}$ к системе

$O' = A,\ \bar{e}_1^{/} = \overline{AO},\quad \bar{e}_2^{/} = \overline{AB},\ \bar{e}_3^{/} = \overline{AC}.$

268. Найти формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ к системе $Ox^1y^1z^1$, если ось Oz^1 совпадает с осью Oz, лучи Ox^1 и Oy^1 являются соответственно биссектрисами углов xOz и yOz, и новые координатные векторы являются единичными.

269. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $\begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = x' + y' + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = x' - y' + 1 \\ y = y' \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - 5 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x = x' \\ y = y' + 1 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x \end{cases}$.

270. Определить координаты новых векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $\begin{cases} x = x' - 3y' + z' \\ y = x' + y' \\ z = x' + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \\ z' = z \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = x' - y' + z' + 1 \\ y = -x' - y' + 2z' + 2 \\ z = z' - 3 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x = y' \\ y = x' \\ z = x' + y' + z' + 1 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x = -x' + 1 \\ y = -y' + 1 \\ z = z' + 1 \end{cases}$.

271. В каждом из следующих случаев начертить на плоскости две различные системы координат, в которых точка M имеет одни и те же координаты если:
а) $M(2,1)$, системы координат прямоугольные декартовы;
б) $M(1,1)$, системы координат аффинные.

272. Найти координаты точки, имеющей одни и те же координаты в системах $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и $O'\bar{e}_1^{/}\bar{e}_2^{/}$, если $O^{/}(2,-3)$, $\bar{e}_1^{/}$ (1,3), $\bar{e}_2^{/}$ (-2,1).

273. Найти расстояние между двумя точками, имеющими одинаковые координаты (1,2) относительно двух различных прямоугольных систем координат, причем вторая система получается из первоначальной переносом начала в точку $O^1(3, 4)$.

274. В системе $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ A (2,1), B ($-\frac{3}{2}$, 3). Существует ли такая новая система координат с началом в точке $O^{/}$ (0,1), в которой A (1,0), B (0,1)?

275. В системе $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ A (1,1), B (2,2). Существует ли такая новая система координат, начало которой совпадает с началом старой системы и в которой A (1,1), B (-1,-2)?

276. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых систем координат в каждом из следующих случаев:

а) $\bar{i}^{/} = \frac{\sqrt{2}}{10}\bar{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\bar{j}$, $O^{/}(-3, \sqrt{2})$; системы $O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}^{/}\bar{j}^{/}$ одинаково ориентированы;

б) $(\bar{i}, \bar{i}^{/}) = 30^0$, $O^{/}(0,-2)$; системы $O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}^{/}\bar{j}^{/}$ имеют противоположные ориентации;

в) $(\bar{j}, \bar{j}^{/})=45^{0}$, $O^{/}(0,0)$; системы $O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}^{/}\bar{j}^{/}$ одинаково ориентированы;

г) $\bar{i}^{/}=\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{j}$, $O^{/}(2,-12)$; системы $O\bar{i}\bar{j}$ и $O'\bar{i}^{/}\bar{j}^{/}$ имеют противоположные ориентации.

277. Дан квадрат *ABCD* со стороной, равной *a*. Пусть направленные прямые *AB* и *AD* являются осями координат старой системы (*AB*-первая ось, *AD* – вторая). В каждом из следующих случаев написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат, если за первую и вторую новые координатные оси приняты соответственно направленные прямые:

а) *AC* и *BD*; б) *CD* и *CB*; в) *AD* и *DC*.

278. Две стороны прямоугольника *ABCD* первоначально лежали на осях координат (*AB* = 5 и *AD* = 2). Затем прямоугольник был передвинут так, так вершина *A*, совпадавшая раньше с началом координат, попала в точку $A_1(4, -1)$, а сторона *AB*, лежавшая на положительной части оси *Ox*, оказалось повернутой на угол $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Определить новое положение остальных трех вершин.

279. Дан прямоугольный треугольник *ABC*, в котором $\angle C=\frac{\pi}{2}$, *CA* = 3, *CB* = 4. Первоначально на плоскости была выбрана система координат $C\bar{i}\,\bar{j}$, где векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ были направлены вдоль лучей *CA* и *CB* соответственно. Определить координаты вершин относительно новой систе-

279. Дан прямоугольный треугольник *ABC*, в котором $\angle C=\frac{\pi}{2}$, *CA* = 3, *CB* = 4. Первоначально на плоскости была выбрана система координат $C\bar{i}\,\bar{j}$, где векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ были направлены вдоль лучей *CA* и *CB* соответственно. Определить координаты вершин относительно новой системы $O'\bar{i}^{/}\bar{j}^{/}$, где $\bar{i}^{/}$ и $\bar{j}^{/}$ направлены вдоль гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу соответственно.

280. Начало прямоугольной декартовой системы координат перенесено в точку $O^1(-1, 2)$, оси координат повернуты на угол

$\alpha = arctg\,\frac{5}{12}$. Координаты точек *A* (3, 2), *B* (2, -3) и *C* (13, - 13) определены в новой системе. Вычислить координаты этих точек в старой системе координат.

281. Даны три точки: *A* (5, 5); *B* (2, -1); *C* (12, -6). Найти их координаты в новой системе, если начало координат перенесено в точку *B*, а оси координат повернуты на угол $\alpha = arctg\,\frac{3}{4}$.

282. Дан куб $ABCDA^1B^1C^1D^1$ со стороной *a*. Написать формулы преобразования при переходе от системы $A\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ к системе $C'\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}'$, если векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ направлены вдоль лучей *AB*, *AD*, AA^1, а векторы $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ – вдоль лучей C^1B^1, C^1C, C^1D^1 соответственно.

283. Определить старые координаты нового начала и угол α, на который повернуты оси, если формулы преобразования координат заданы следующими равенствами:

а) $\begin{cases} x=-y'+3 \\ y=x'-2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=-x'-1 \\ y=-y'+3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'+5 \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'-3 \end{cases}$.

284. Даны формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $O\bar{i}\bar{j}$ к системе $O'\bar{e}_1^{/}\bar{e}_2^{/}$. Выяснить в каких из указанных ниже случаев новая система $O'\bar{e}_1^{/}\bar{e}_2^{/}$ является прямоугольной декартовой:

а) $\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' + 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x' - \dfrac{\sqrt{3}}{3}y' + 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{3}x' + \dfrac{1}{2}y' - 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}x' + y' - 2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x = -y' + 1 \\ y = x' \end{cases}$; г) $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' + 1 \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$.

Полярные координаты

285. Построить точки по их полярным координатам:
A (5, 0); B (2, $\frac{\pi}{4}$); C (3, -$\frac{\pi}{2}$); D (1, π).

286. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полярной оси точкам A (3, $\frac{\pi}{4}$); B (2, -$\frac{\pi}{2}$); C (3,- $\frac{\pi}{3}$).

287. Определить полярные координаты точек, симметричных относительно полюса точкам A (1, $\frac{\pi}{4}$); B (5, $\frac{\pi}{2}$); C (2, -$\frac{2\pi}{3}$); D (4, $\frac{5\pi}{6}$).

288. Определить полярные координаты вершин и точек пересечения диагоналей правильного шестиугольника *ABCDEF*, сторона которого равна *A*, приняв за полюс одну его вершину *A*, а за полярную ось – направленную прямую *AB*.

289. Определить полярные координаты вершин и точки пересечения медиан правильного треугольника *ABC*, сторона которого равна *A*, приняв за полюс одну его вершину *A*, а за полярную ось – направленную прямую *AB*.

290. Найти полярные координаты точек *A*, *B*, *C*, если в присоединенной прямоугольной системе они имеют координаты:
A ($\sqrt{3}$,1); B (0,2); C (-3,3); D (0,5); E (-3,0); F (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$).

291. Найти координаты точек *A*, *B*,*C* в присоединенной прямоугольной системе, если в полярной системе они имеют координаты:
A (5,0); B (6, $\frac{\pi}{4}$); C (2, $\frac{\pi}{2}$); D (10, $\frac{\pi}{3}$); E (8, $\frac{2\pi}{3}$); F (12, -$\frac{\pi}{6}$).

292. В полярной системе координат даны точки:
а) A (5, $\frac{\pi}{4}$); B (8, -$\frac{\pi}{12}$); б) A (5, $\frac{\pi}{6}$); B (3, -$\frac{\pi}{6}$); в) A (4, $\frac{\pi}{5}$); B (6, $\frac{6\pi}{5}$).
Вычислить расстояние d между ними.

293. В полярной системе координат даны две смежные вершины квадрата *ABCD*: A (12, -$\frac{\pi}{10}$), B (3, $\frac{\pi}{15}$). Определить его площадь.

294. Даны вершины треугольника: A (5, $\frac{\pi}{2}$); B (8, $\frac{5\pi}{6}$); C (3,$\frac{7\pi}{6}$). Проверить, является ли этот треугольник равнобедренным.