Лекция 5
Определенный интеграл

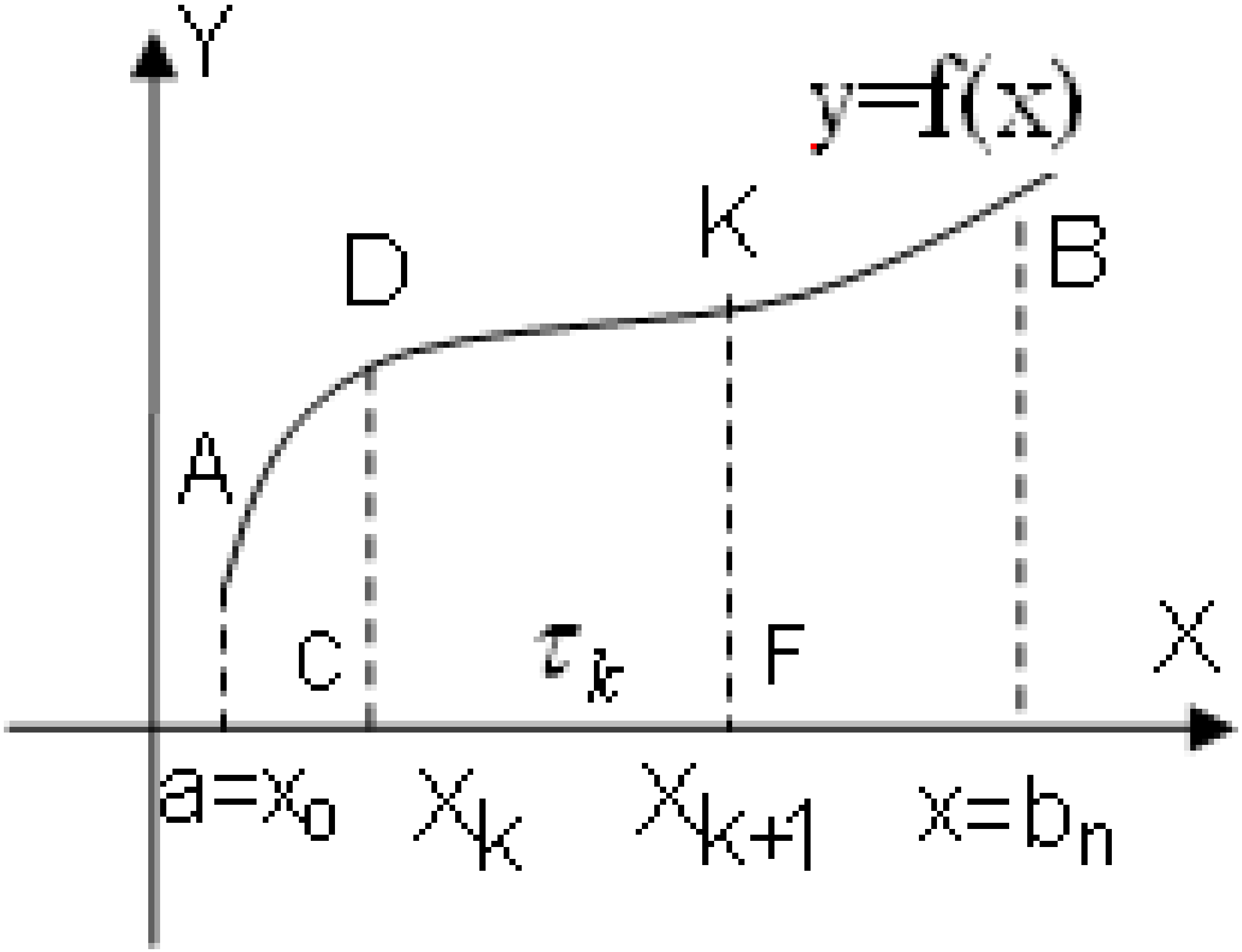
Вопросы:

1. Понятие определенного интеграла

2. Формула Ньютона-Лейбница

3. Методы вычисления определенного интеграла

1. Понятие определенного интеграла


Y
y=f(x)
K
D
B
A
X
C
τ_k
F
a=x_0
X_k
X_k+1
x=b_n

Пусть задана функция $y=f(x)$ и соответствующая кривая. Найдем площадь плоской фигуры ограниченной графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$.

Фигура AabB называется криволинейная трапеция.

Разобьем отрезок [a;b] на n частичных отрезков:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b$$

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ - длинна k-го частично отрезка

Пусть наибольшая разность $\lambda = \max \Delta X_k$

выберем на каждом частичном отрезке точку

$$\tau_k \in [x_k; x_{k+1}] (x_k < \tau_k < x_{k+1})$$

Найдем S (площадь) $S_K = S_{CDEF}$

длинна: ΔX_K

высота: $f(\tau_k)$

$S = \Delta x_r \cdot f(\tau_k)$

Сумма площадей всех прямоугольников будет

равна S криволинейной трапеции, т.е.

$$S_{AabB} \approx S_1 + S_2 + .. + S_n \approx \sum_{k=1}^{n} S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \cdot f(\tau_k) \text{ или}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \cdot f(\tau_k) = S$$

Определение

Если существует предел $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta X_k \cdot f(\tau_k) = S$, не зависящий от способа разбиения отрезка [a;b] и выбора точек τ_k, то этот предел называется Определенным интегралом функции f(x) на [a;b].

$\int\limits_a^b f(x)dx$ a, b – пределы интегрирования.

2. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и

F(x) – первообразная функции f(x), тогда справед-

лива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство

Разобьем отрезок [a;b] на n частичных отрезков

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Доказательство

Рассмотрим тождество $F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)$

Доказательство

$$F(x_n)-F(x_0)=$$

$$=[F(x_n)-F(x_{n-1})]+$$

$$+[F(x_{n-1})-F(x_{n-2})]+\ldots+$$

$$+[F(x_2)-F(x_1)]+[F(x_1)-F(x_0)]$$

Доказательство

Воспользуемся формулой Лагранжа.

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a), a < c < b$$

Доказательство

Тогда имеем $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1})$ (k=1…n)

$x_{k-1} < c_k < x_k$

Доказательство

$$F(b)-F(a)=F'(c_n)(x_{n-1}-x_n)+\ldots+F'(c_1)(x_1-x_0)=$$

$$=f(c_n)\cdot\Delta X_n+\ldots+f(c_1)\cdot\Delta X_1=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\cdot\Delta x_k$$

Доказательство

Т.к. функция непрерывна на отрезке [a;b] то она ин-

тегрируема, а $\Rightarrow$ существует предел суммы

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_{b}^{a} f(x) dx$$

Доказательство

Перейдем к пределу в равенстве:

$$F(b)-F(a)=\sum_{k-1}^{n} f(c_k)\Delta X_k$$

$$F(b)-F(a)=\lim_{x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta X_k=\int_b^a f(x)dx$$

Доказательство

Таким образом,

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Чт.д.

3. Методы вычисления определенного интеграла

Теорема

Пусть выполняется следующее условие:

1) функция y=f(x) непрерывна на [a;b]

2) функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную

на $[\alpha; \beta]$

3) $a \le \phi(t) \le b$, причем $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

Тогда справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dx$$

Замечание 1

Можно привести и другую запись формулы для замены переменной

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dx = \int_a^b f(t)dt, \alpha = \varphi(a); \beta = \varphi(b).$$

Замечание 2

При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной возвращаться к старой переменной ненужно.

Замечание 3

При замене переменной в определенном интеграле необходимо менять пределы интегрирования.

Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $\upsilon(x)$ непрерывны и дифферен-

цируемы на [a;b], тогда справедлива следующая фор-

мула

$$\int_a^b u\,d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon\,du$$

Доказательство

По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$(u \cdot \upsilon)\Big|_a^b = \int_a^b (u \cdot \upsilon)'\,dx = \int_a^b (u'\upsilon + u\upsilon')\,dx =$$

Доказательство

$$= \int_a^b u'\upsilon dx + \int_a^b u\upsilon' dx = \left| \begin{matrix} u' dx = du \\ \upsilon' dx = d\upsilon \end{matrix} \right| = \int_a^b \upsilon du +$$

Доказательство

$$(u \cdot v)\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv \Rightarrow \int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b$$