Лекция №4
Неопределенный интеграл

Вопросы:

1. Понятие неопределенного интеграла
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Методы интегрирования

1. Понятие неопределенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $\langle a,b \rangle$.

Определение

Функция F называется первообразной для функции f на (a,b), если:

1) F непрерывна на (a,b).

2) F дифференцируема на (a,b) и $F' = f$.

Теорема

Если F - первообразная для f на $(a,b) \Rightarrow$ любая первообразная для f на (a,b) представляется в виде: $F+C, C=const.$

Определение

Пусть f –определена на (a,b). Совокупность всех первообразных для функции f на (a,b) называется неопределенным интегралом для функции f на (a,b) и обозначается $\int f(x)dx,\ x \in (a,b)$.

Замечание

Функция $f(x)$ называется подынтегральным функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования.

Приведем таблицу основных интегралов. Часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования как операции, обратной дифференцированию, и таблицы производных. Справедливость остальных формул легко проверить дифференцированием.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C(0 < a \neq 1)$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

Замечание 1

Отметим некоторые частные случаи формулы I:

$$\int 1 \cdot dx = x + C (a = 0);$$

$$\int 0 \cdot dx = C$$

Замечание 2

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила:

1. $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$

2. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C;$

3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$

2. Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1

Если функция $y = f(x)$ имеет первообразную на [a, b], тогда для всех x из $(a;b)$ справедливы следующие формулы:

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

Свойство 2

Если функция *F(x)* непрерывна на отрезке *[a, b]* и дифференцируема на *(a,b)*, тогда справедливы следующие формулы:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойство 3

Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют первообразные на *[a, b]*, то и функция

f(x)±g(x) будет иметь первообразную на *[a,b]*, причем

справедлива формула:

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Свойство 4

Постоянный множитель можно выносить за знак ин-

теграла, т.е. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ при $\kappa \neq 0$.

3. Методы интегрирования

Теорема

Пусть функция f определена на $\langle A, B\rangle$ и имеет на нем первообразную F, и g определена на $\langle a, b\rangle$, дифференцируема на нем и $g(\langle a, b\rangle) \subseteq \langle A, B\rangle$ и $g(a, b) \subseteq (A, B)$ на $\langle a, b\rangle$, т.е. задана сложная функция $f(g(x))$. При этом справедлива следующая формула:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Формулу можно записать по-другому:

$$\int f(t)\cdot dt\Big|_{g(x)=t} = F(t)+C$$

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\cdot dx$. Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$- функция, имеющая непрерывную производную. Тогда получаем следующую формулу интегрирования подстановкой:

$$\int f(x)\cdot dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и интеграл $\int v\,du$ существует, то и интеграл $\int u\,dv$ также существует и справедлива формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$